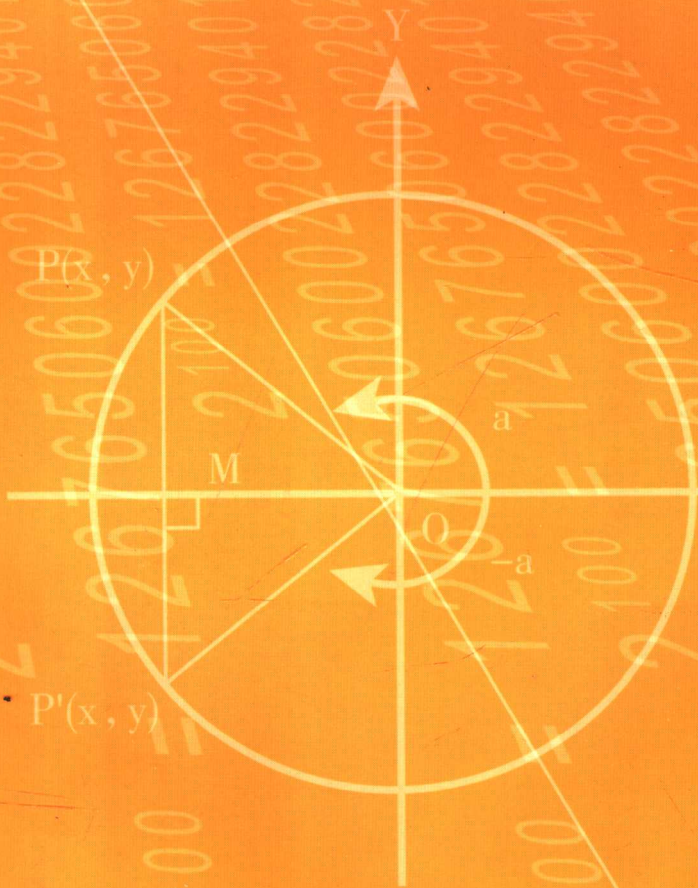


高职高专教材

# 数学

(上册)

宋劲松 主编



中国计量出版社

CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

高职高专教材

# 数 学

(上册·基础数学)

主 编 宋劲松

主 审 王瑞明

参编人员 (按姓氏笔画为序)

王书香 王 华 刘凤英 任秀恩

李凤贞 张新红 张锦玲 郑 浩

赵晓莉 赵 静 程钟卉 靳淑雅

潘建英

中国计量出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数学 (上册·基础数学) / 宋劲松主编. —北京: 中国计量出版社, 2006. 8  
高职高专教材  
ISBN 7-5026-2297-7

I. 数... II. 宋... III. 数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 034482 号

## 内 容 提 要

本书是根据现行五年制职业教育学生年龄小、可塑性强的特点, 在“夯实基础、注重能力、兼顾继续教育”的原则下而编写的。

本书内容取材简明, 通俗易懂, 既注重科学性和趣味性, 又注重应用性和现实性. 在写作上力求生动, 在形式上力求活泼. 内容编排上, 在体现职业教育实用性的前提下, 遵循成人高考的内容体例进行编排, 为学生接受继续教育在知识的深度和广度上做好储备。

全书分上、下两册, 上册为基础数学部分, 下册为高等数学部分. 上册既可作为中、高等职业教育的基础数学教材, 也可作为高升专的参考复习用书; 下册既可作为高等职业教育的高等数学教材, 也可作为专升本的参考复习用书。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010) 64275360

<http://www.zgjl.com.cn>

北京玥实印刷有限公司印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

\*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 14.25 字数 350 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

\*

印数 1—1 500 定价: 25.00 元

# 前 言

---

本教材的内容与九年义务教育初中数学相衔接，在“夯实基础、注重能力、兼顾继续教育”的原则下，注意针对学生年龄小、可塑性强的特点，内容编排上注意课堂练习和课后习题相结合，讲解与练习相融合，尽可能做到由浅入深，循序渐进。

全书分上、下两册，在体现职业教育的实用性特点下，基本遵循成人高考的内容体例进行编排，为接受继续教育的学生做好知识上的储备。上册涵盖了集合、函数、数列、空间几何、解析几何以及排列、组合等内容，既可作为中、高等职业教育的基础数学教材，也可作为高升专的参考复习用书。下册涵盖了一元函数微积分、多元函数微积分、空间解析几何、概率论、无穷级数、微分方程、线性规划等内容，既可作为高等职业教育的高等数学教材，也可作为专升本的参考复习用书。

参加教材编写的人员分工如下：集合与简单逻辑、幂函数、指数函数、对数函数部分由赵静负责，函数部分由张新红负责，三角函数、数列部分由李凤贞负责，平面向量与解析几何部分由赵晓莉、程钟卉负责，空间几何部分由郑浩负责，极坐标与参数方程、多元函数微积分部分由任秀恩、王书香负责，复数、一元函数微积分部分由刘凤英、靳淑雅、

张锦玲负责，无穷级数部分由潘建英负责，排列与组合、概  
率初步部分由王华负责，极限与连续、空间解析几何、常微  
分方程、线性规划简介部分由宋劲松负责，全书由宋劲松任  
主编，由王瑞明任主审。

本书在编写过程中，得到了廊坊职业技术学院西校区有  
关领导的大力支持，在此表示感谢。

鉴于编者水平和时间所限，书中的不当之处，恳请读者  
及时赐教，以便今后改进（电子邮箱：[tfsecre@sohu.com](mailto:tfsecre@sohu.com)）。

编 者

2006年7月

# 目 录

---

<b>第一章 集合与简单逻辑</b> .....	(1)
第一节 集合的概念及其表示方法 .....	(1)
第二节 集合间的关系及其运算 .....	(3)
第三节 简单的逻辑关系 .....	(7)
本章小结 .....	(13)
复习题一 .....	(14)
<b>第二章 函数</b> .....	(16)
第一节 映射与区间 .....	(16)
第二节 函数及其表示方法 .....	(19)
第三节 函数的基本性质 .....	(22)
第四节 反函数 .....	(25)
第五节 一元二次函数及其应用 .....	(27)
本章小结 .....	(32)
复习题二 .....	(35)
<b>第三章 幂函数 指数函数 对数函数</b> .....	(38)
第一节 幂函数 .....	(38)
第二节 指数函数 .....	(43)
第三节 对数函数 .....	(45)
本章小结 .....	(50)
复习题三 .....	(52)
<b>第四章 三角函数</b> .....	(54)
第一节 角的概念的推广 弧度制 .....	(54)
第二节 任意角的三角函数 .....	(57)
第三节 三角函数的诱导公式 .....	(64)
第四节 三角函数的图像及其性质 .....	(68)
第五节 正弦型曲线 .....	(74)
第六节 加法定理及其推论 .....	(80)
第七节 反三角函数的图像及其性质 .....	(86)

第八节 三角函数的应用 .....	(92)
本章小结 .....	(98)
复习题四 .....	(101)
<b>第五章 数列</b> .....	(104)
第一节 数列的概念 .....	(104)
第二节 等差数列 .....	(106)
第三节 等比数列 .....	(110)
本章小结 .....	(113)
复习题五 .....	(114)
<b>第六章 复数</b> .....	(116)
第一节 复数的概念 .....	(116)
第二节 复数的四则运算 .....	(120)
第三节 复数的三角形式 .....	(122)
第四节 复数的指数形式 .....	(126)
本章小结 .....	(127)
复习题六 .....	(128)
<b>第七章 平面向量与解析几何</b> .....	(129)
第一节 向量的概念及其运算 .....	(129)
第二节 向量的坐标表示及其运算 .....	(132)
第三节 直线方程 .....	(136)
第四节 平面内两条直线的位置关系 .....	(139)
第五节 曲线与方程 .....	(144)
第六节 圆 .....	(145)
第七节 椭圆 .....	(148)
第八节 双曲线 .....	(151)
第九节 抛物线 .....	(155)
本章小结 .....	(158)
复习题七 .....	(161)
<b>第八章 空间几何</b> .....	(163)
第一节 平面 .....	(163)
第二节 直线与直线的位置关系 .....	(165)
第三节 直线与平面的位置关系 .....	(168)
第四节 平面与平面的位置关系 .....	(173)
第五节 简单的空间几何体 .....	(178)
本章小结 .....	(187)
复习题八 .....	(191)

---

<b>第九章 极坐标与参数方程</b> .....	(195)
第一节 极坐标 .....	(195)
第二节 参数方程 .....	(200)
本章小结 .....	(205)
复习题九 .....	(206)
<b>第十章 排列与组合</b> .....	(208)
第一节 基本计数原理 .....	(208)
第二节 排列 .....	(209)
第三节 组合 .....	(211)
第四节 二项式定理 .....	(213)
本章小结 .....	(214)
复习题十 .....	(215)
<b>参考文献</b> .....	(217)



# 第一章 集合与简单逻辑

集合论是现代数学的基础,它的基本观点已经渗透到数学的各个领域.逻辑学是研究思维形式及其规律的一门科学,具有十分广泛的应用.本章简要介绍关于集合的概念、常用符号、简单运算以及逻辑学的有关知识.

## 第一节 集合的概念及其表示方法

### 一、集合的概念

首先观察下面的例子.

- (1)中国所有的省份.
- (2)某学校的所有班级.
- (3)平方等于1的实数.
- (4)中国古代的四大发明.
- (5)大于3小于21的偶数.
- (6)太阳系的九大行星.

像这样,把由一些对象集在一起构成的整体叫做**集合**,简称**集**,而将集合中的每个对象叫做集合的**元素**.如(1)是由中国所有的省份构成的集合,每个省份都是这个集合的一个元素;(2)是由某学校的所有班级构成的集合,这个学校的每个班级都是这个集合的一个元素;(3)是由1、-1构成的集合,1、-1都是这个集合的元素.

集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

构成集合的每个元素必须是确定的,不能是模棱两可的.如“小李所在班级的全体高个子男生”就不能构成一个集合,因为这里的“高个子”不是确定的.

对于构成集合的每个元素,不能重复出现.如“太阳系的九大行星”,每个行星只能写一次.

由于集合是由一些对象构成的整体,所以不必考虑这些元素的先后顺序.如由“中国古代的四大发明”构成的集合,“火药、指南针、造纸术、印刷术”与“指南针、造纸术、火药、印刷术”所表达的含义是相同的.

集合通常用大写英文字母  $A, B, C, \dots$  来表示,集合中的元素通常用小写英文字母  $a, b, c, \dots$  来表示.如果元素  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于  $A$ ,记作  $a \in A$ ,读作“ $a$  属于  $A$ ”.如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,就说  $a$  不属于  $A$ ,记作  $a \notin A$ ,读作“ $a$  不属于  $A$ ”.元素与集合之间是“属于”或“不属于”的关系.如(5)中,如果用  $A$  表示所有大于3小于21的偶数构成的集合,则  $4 \in A$ ,  $10 \in A$ ,  $22 \notin A$ .

由数构成的集合叫做**数集**,常用的数集及专用符号如表1-1所示.

表 1-1

集合	自然数集	整数集	正整数集	有理数集	实数集
符号	$N$	$Z$	$N^+$	$Q$	$R$

自然数集  $\mathbf{N}$  包括 0 和全体正整数. 正整数集可以由自然数集排除掉 0 得到, 符号右上角的 \* 表示把 0 排除掉. 如非零实数集表示成  $\mathbf{R}^*$ .

**例 1** 用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1)  $-19$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{N}$       (2)  $0$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{Q}$       (3)  $1+\sqrt{2}$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{R}$

**解:** (1)  $-19 \notin \mathbf{N}$     (2)  $0 \in \mathbf{Q}$     (3)  $1+\sqrt{2} \in \mathbf{R}$

不含任何元素的集合叫做空集, 记作  $\emptyset$ . 如“所有大于 2 的负整数”构成的集合.

只含有一个元素的集合叫做单元素集. 如“方程  $x+3=0$  的解”构成的集合.

至少含有一个元素的集合叫做非空集合. 如“中国古代四大发明”构成的集合.

含有有限多个元素的集合, 叫做有限集. 如“一年中有 31 天的月份”构成的集合.

含有无限多个元素的集合, 叫做无限集. 如自然数集.

本书所讨论的数集, 如无特殊说明, 都是指实数集.



用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1)  $7$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{N}$     (2)  $\frac{1}{3}$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{Z}$     (3)  $1.4142$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{Q}$     (4)  $\sqrt{7}$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{R}$

## 二、集合的表示方法

把一个具体的集合表示出来, 通常采用以下两种方法.

### 1. 列举法

把集合中的所有元素一一列举出来, 每个元素只写一次, 不考虑元素之间的顺序, 并且放在一个大括号内表示集合的方法叫做列举法. 如“小于 5 的自然数”构成的集合用列举法可以表示成  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 也可以表示成  $\{4, 3, 0, 1, 2\}$ .

当一个集合的元素较多, 或是无限集时, 可以只写出几个元素, 其他元素用省略号表示. 如偶数集可以表示成  $\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ .

### 2. 描述法

把集合中元素所具有的特征描述出来, 并且放在一个大括号内表示集合的方法叫做描述法. 如偶数集用描述法可以表示成  $\{n | n=2m, m \in \mathbf{Z}\}$  或  $\{2m | m \in \mathbf{Z}\}$ ; 不等式  $x+6 > 0$  的解集可以表示成  $\{x | x > -6\}$ . 在不致混淆时, 用描述法也可省去竖线及其左边部分. 如所有等边三角形构成的集合就可以表示成  $\{\text{等边三角形}\}$ .

**例 2** 用合适的方法表示下列集合.

(1) 9 的平方根.

(2) 某图书馆的所有藏书.

(3) 英文中的所有元音字母.

(4) 绝对值小于 2 的全体实数.

**解:** (1) 用列举法表示为  $\{-3, 3\}$ .

(2) 用描述法表示为  $\{\text{某图书馆的藏书}\}$ .

(3) 用列举法表示为  $\{a, e, i, o, u\}$ .

(4)用描述法表示为 $\{x|-2 < x < 2\}$ .

有些集合用描述法更合适,如(2),(4),而有些集合用列举法更简单,如(1),(3),因此在具体问题中,要根据具体情况选择适当的方法.



用适当方法表示下列集合.

- (1)全国所有的高等学校.
- (2)所有大于3而小于7的实数.
- (3)直角坐标平面上第一象限内所有的点.
- (4)绝对值等于5的数.



### 习题 1-1

1. 用适当的方法表示下列集合.

- (1)所有的奇数.
- (2)绝对值小于或等于10的整数.
- (3)所有5的正整数倍.
- (4)两条直线 $y=2x+1$ 与 $y=x-2$ 的交点.
- (5)中国古代四大名著.
- (6)中国的十二生肖.
- (7)大于-2的实数.
- (8)所有的四边形.

2. 在下列各题的\_\_\_\_\_处填上合适的符号( $\in, \notin$ ).

- (1)  $0$  \_\_\_\_\_  $\{0\}$     (2)  $5$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{Z}$     (3)  $-3$  \_\_\_\_\_  $\mathbf{N}$   
 (4)  $0$  \_\_\_\_\_  $\emptyset$

## 第二节 集合间的关系及其运算

### 一、集合间的关系

#### 1. 集合间的包含关系

观察下面两个集合

$A = \{\text{我校一年级学生}\}$

$B = \{\text{我校全体学生}\}$

显然,集合 $A$ 中的每个元素都属于集合 $B$ .

像这样,如果集合 $A$ 中的每一个元素都属于集合 $B$ ,那么把集合 $A$ 叫做 $B$ 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$ ),读作“ $A$ 包含于 $B$ ”(或“ $B$ 包含 $A$ ”).

对于任意非空集合 $A$ ,都有“ $A \subseteq A$ ”,即任何一个集合都是它本身的子集.

由于空集中不含任何元素,不妨规定,空集是任何集合的子集,即  $\emptyset \subseteq A$ .

如果集合  $A$  是  $B$  的子集,但集合  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ ,那么集合  $A$  叫做  $B$  的真子集,记作  $A \subset B$ (或  $B \supset A$ ). 如集合  $\{2,3\}$  不但是  $\{1,2,3,4\}$  的子集,而且还是它的真子集,可记作  $\{2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$ .

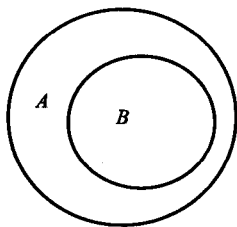


图 1—1

可见,空集  $\emptyset$  是任何非空集合  $A$  的真子集,即  $\emptyset \subset A$ .

如图 1—1 所示,用文氏图可以形象地说明集合间的包含关系,圆表示集合,则集合  $B$  既是集合  $A$  的子集又是真子集.

**例 1** 写出集合  $A = \{1,2,3\}$  的所有子集和真子集.

**解:** 集合  $A$  有三个元素  $1,2,3$ . 它的子集包括空集  $\emptyset$ ;任取一个元素组成的子集  $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ;任取两个元素组成的子集  $\{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}$ ;三个元素全取组成的集合  $\{1,2,3\}$ . 在这 8 个子集中,除集合  $A$  本身外,其余 7 个都是它的真子集.

一般地,如果一个集合  $A$  含有  $n$  个元素,那么它的所有子集个数为  $2^n$  个,真子集的个数为  $2^n - 1$  个.

## 2. 集合的相等

设  $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,1,4,3\}$ . 显见  $A \subseteq B$ ,且  $B \supseteq A$ .

像这样,对于两个集合  $A$  和  $B$ ,如果  $A \subseteq B$ ,且  $B \supseteq A$ ,则称集合  $A$  与  $B$  相等,记作  $A = B$ ,读作“ $A$  等于  $B$ ”. 两个集合相等,是指两个集合的元素完全相同.



判断下列集合间的包含关系.

- (1)  $A = \{\text{整数}\}, B = \{\text{偶数}\}$ .
- (2)  $C = \{\text{英文字母}\}, D = \{\text{英文中的辅音字母}\}$ .
- (3)  $E = \{\text{小于 4 的正整数}\}, F = \{1,2,3\}$ .

## 二、集合的运算

### 1. 交集

先看下面的例子

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{c, d, f, g\}$$

$$C = \{c, d\}$$

显然,集合  $C$  是由集合  $A$  与  $B$  的公共元素构成的集合.

像这样,设  $A$  和  $B$  是两个集合,由既属于  $A$  又属于  $B$  的所有元素构成的集合叫做  $A$  与  $B$  的交集,记作  $A \cap B$ ,读作“ $A$  交  $B$ ”. 即  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ . 如图 1—2 中的阴影部分所示.

显然有,  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ .

**例 2** 设  $A = \{x | 0 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}, B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ ,求

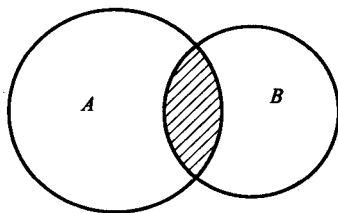


图 1—2

$A \cap B$ .

解:  $A = \{x | 0 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\} = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$

由交集的定义得  $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 4\} = \{1, 2\}$ .

例 3 设  $A = \{\text{矩形}\}$ ,  $B = \{\text{菱形}\}$ , 求  $A \cap B$ .

解: 由交集的定义得  $A \cap B = \{\text{矩形}\} \cap \{\text{菱形}\} = \{\text{正方形}\}$

对任意集合  $A$  与  $B$ , 由交集定义有

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

求交集的运算叫做交运算.

## 2. 并集

给定集合

$A = \{\text{某学校的男生}\}$

$B = \{\text{某学校的女生}\}$

$C = \{\text{某学校的学生}\}$

可以看到, 集合  $C$  是由集合  $A$  与  $B$  中所有元素集在一起构成的集合.

像这样, 设  $A$  和  $B$  是两个集合, 由属于  $A$  或  $B$  的所有元素构成的集合叫做  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 读作“ $A$  并  $B$ ”.

即  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ . 如图 1-3 中的阴影部分所示.

显然有  $A \subseteq A \cup B$ ,  $B \subseteq A \cup B$ ,  $A \cap B \subseteq A \cup B$ .

例 4 设  $A = \{x | (x-1)(x+2) = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4 = 0\}$ , 求  $A \cup B$ .

解:  $A = \{x | (x-1)(x+2) = 0\} = \{1, -2\}$

$B = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$

由并集的定义得  $A \cup B = \{1, -2\} \cup \{-2, 2\} = \{-2, 1, 2\}$ .

例 5  $A = \{x | x > 2\}$ ,  $B = \{x | x \leq 4\}$ , 求  $A \cup B$ .

解: 由并集的定义得  $A \cup B = \{x | x > 2\} \cup \{x | x \leq 4\} = \mathbf{R}$

对于任意集合  $A$  与  $B$ , 由并集的定义有

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

求并集的运算叫做并运算.

## 3. 补集

在研究某些集合时, 这些集合常常都是某一个给定集合的子集. 如方程  $x^2 - 4 = 0$  的解集  $\{-2, 2\}$  显然是实数集  $\mathbf{R}$  的子集. 通常把这个给定的集合叫做全集, 用  $U$  表示. 如在整数集  $\mathbf{Z}$  中研究问题时,  $\mathbf{Z}$  就是全集; 在实数集  $\mathbf{R}$  中研究问题时,  $\mathbf{R}$  就是全集; 要了解某校每名学生的基本情况, 那么该校学生就构成一个全集. 由此可见, 全集是相对的, 它与研究的问题有关.

集合  $A$  是全集  $U$  的子集, 则  $A \cup U = U$ ,  $A \cap U = A$ .

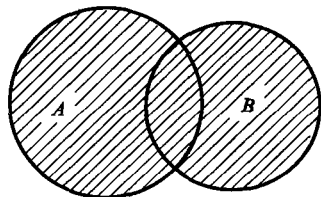


图 1-3

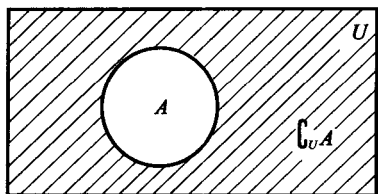


图 1-4

设  $U$  为全集, 集合  $A$  为  $U$  的子集, 由  $U$  中所有不属于  $A$  的元素构成的集合叫做  $A$  在  $U$  中的补集, 记作  $\complement_U A$ , (也可简单的记成  $\complement A$ ), 读作“ $A$  在  $U$  中的补(的补)”, 即  $\complement_U A = \{x | x \in U, x \notin A\}$ . 如图 1-4 中的阴影部分所示.

例 6 设  $U = \{\text{不大于 8 的自然数}\}$ ,  $A = \{1, 5, 7\}$ , 求  $\complement_U A$ .

解: 因为  $U = \{\text{不大于 8 的自然数}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{1, 5, 7\}$

所以  $\complement_U A = \{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$ .

例 7 设  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$ , 求  $\complement_U A$ .

解: 因为  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | -1 < x \leq 2\}$

所以  $\complement_U A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } > 2\}$ .

对于全集  $U$  的任意子集  $A$ , 由补集的定义有

$$A \cap \complement_U A = \emptyset$$

$$A \cup \complement_U A = U$$

$$\complement_U(\complement_U A) = A$$

其中  $\complement_U(\complement_U A)$  表示  $\complement_U A$  的补集.



### 练习

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ ,  $B = \{1, 3, 7, 10, 13\}$ , 求  $A \cap B$  与  $A \cup B$ .
2. 已知  $A = \{a, 0\}$ ,  $B = \{-1, 3\}$ ,  $A \cap B = \{-1\}$ , 求  $A \cup B$ .
3. 设全集  $U = \{x | -5 < x < 5\}$ ,  $A = \{0, 1, 2\}$ , 求  $\complement_U A$ .
4. 设全集  $U = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $M = \{a, c\}$ ,  $N = \{b, c, e\}$ , 求  $\complement_U M$  与  $\complement_U N$ .

### 习题 1-2

1. 写出集合  $A = \{a, b, c, d\}$  的所有子集, 并指出哪些是真子集.
2. 讨论下列各题中两集合的关系.
  - (1)  $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $B = \{x | x \leq 2\}$ .
  - (2)  $A = \{x | x = 3n, n \in \mathbf{N}, n < 6\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ .
  - (3)  $A = \{x | |x| = 3\}$ ,  $B = \{x | x + 3 = 0\}$ .
  - (4)  $A = \{1, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{\text{小于 10 的正奇数}\}$ .
3. 已知  $A = \{x | x(x+1)(x-3) = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ , 求  $A \cap B$  与  $A \cup B$ .
4. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ , 求  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $\complement_U A$ ,  $\complement_U B$ ,  $\complement_U(A \cup B)$ ,  $\complement_U A \cup \complement_U B$ ,  $\complement_U A \cap \complement_U B$ .
5. 已知集合  $M = \{x | x^2 - px + 15 = 0\}$ ,  $N = \{x | x^2 + 2x + q = 0\}$ ,  $M \cap N = \{3\}$ , 求  $p - q$ .
6. 设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{c, d, e, f\}$ ,  $C = \{b, c, e, g\}$ , 证明:
  - (1)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .
  - (2)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

## 第三节 简单的逻辑关系

### 一、命题

通常把具有真假意义的陈述句叫做命题. 命题中真或假二者必居其一. 感叹句、疑问句、祈使句都不能作为命题.

如果一个命题叙述的事情是真的, 就说它是真命题(或说它的真值为真); 如果一个命题叙述的事情是假的, 就说它是假命题(或说它的真值为假). 如

- (1) 中国人民是伟大的人民.
- (2) 全体立正!
- (3) 3 大于 1.
- (4) 明天开会吗?
- (5) 雪是黑的.
- (6) 0 不是自然数.
- (7) 天气多好啊!

这几句话中, (2) 是祈使句, (4) 是疑问句, (7) 是感叹句, 它们都不是命题. (1), (3), (5), (6) 是命题, 其中 (1), (3) 是真命题, (5), (6) 是假命题.

命题的真值有时会因人、因时、因地而异. 如“明天是国庆节”这个命题在 9 月 30 日就是真命题, 而在其他时间就是假命题.

为了方便起见, 常用大写字母  $P, Q, R$  等表示命题. 如  $P$ : 上海是一个大城市. 命题  $P$  的意思是“上海是一个大城市”.



判断下列语句哪些是命题, 如果是命题, 指出命题的真假.

- (1) 请交物理作业!
- (2) 计算机只能作为计算工具使用.
- (3) 集合  $\{1, 3\}$  是集合  $\{0, 1, 3, 5\}$  的真子集.
- (4) 42 能被 13 整除.
- (5) 任何一个非空集合至少有两个子集.

### 二、逻辑联结词

不含逻辑联结词的命题叫做原子命题. 用逻辑联结词把一些原子命题连接起来构成的新命题叫做复合命题.

#### 1. 否定联结词——非

先看下面的命题

$P$ : 岳飞是民族英雄.

$Q$ : 岳飞不是民族英雄.

$R$ : 3 是奇数.

$S$ : 3 不是奇数.

容易看出, 命题  $Q$  是  $P$  的否定形式, 命题  $S$  是  $R$  的否定形式.

一般地,设  $P$  是命题,则  $P$  的否定形式也是命题,记作“ $\neg P$ ”,读作“非  $P$ ”.其真值如表 1—2 所示.

表 1—2

$P$	$\neg P$
真	假
假	真

**例 1** 写出下列命题的否定形式,并确定其真假.

(1) $P$ :河北省的省会是石家庄市.

(2) $Q$ :6 是有理数.

(3) $R$ : $-1, 1, 3$  都是自然数.

**解:**(1) $\neg P$ :河北省的省会不是石家庄市.因为  $P$  为真,所以  $\neg P$  为假命题.

(2) $\neg Q$ :6 不是有理数.因为  $Q$  为真,所以  $\neg Q$  为假命题.

(3) $\neg R$ : $-1, 1, 3$  不都是自然数.因为  $R$  为假,所以  $\neg R$  为真命题.

这里“都是”的否定形式是“不都是”,而不是“都不是”.

## 2. 合取联结词——且

先看下面的命题

$P$ :2 是有理数.

$Q$ :2 是实数.

$\neg P$ :2 不是有理数.

$\neg Q$ :2 不是实数.

上述四个命题中,命题  $P$  和  $Q$  为真命题,命题  $\neg P$  和  $\neg Q$  为假命题,用联结词“且”进行连接,有如下形式的命题.

$P$  且  $Q$ :2 是有理数,且 2 是实数.

$P$  且  $\neg Q$ :2 是有理数,且 2 不是实数.

$\neg P$  且  $Q$ :2 不是有理数,且 2 是实数.

$\neg P$  且  $\neg Q$ :2 不是有理数,且 2 不是实数.

判断上面四个复合命题的真假,易知只有“ $P$  且  $Q$ ”为真命题,其余三种情况皆为假命题.

一般地,设  $P, Q$  是两个命题,用联结词“且”连接得到一个与  $P$  和  $Q$  相关的新命题,记作“ $P \wedge Q$ ”,读作“ $P$  且  $Q$ ”.只有当  $P$  和  $Q$  都为真命题时,复合命题“ $P \wedge Q$ ”才为真命题,只要  $P$  或  $Q$  中有一个命题为假,“ $P \wedge Q$ ”就为假命题,其真值情况如表 1—3 所示.

表 1—3

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

**例 2** 判断下列命题是真还是假.

(1) $P$ :4 是偶数,且 4 大于 5.



(2)Q:矩形有四条边且内角和为  $360^\circ$ .

(3)S:空气中含有氧气且含有氮气.

(4)T:  $|-3|=-3, (-3)^2=-9$ .

解:(1)因为“4是偶数”为真,“4大于5”为假,所以P为假命题.

(2)因为“矩形有四条边”为真,“矩形的内角和为  $360^\circ$ ”也为真,所以Q为真命题.

(3)因为“空气中含有氧气”为真,“空气中含有氮气”也为真,所以S为真命题.

(4)因为“ $|-3|=-3$ ”为假,“ $(-3)^2=-9$ ”也为假,所以T为假命题.

### 3. 析取联结词——或

先看下面的命题

P:张宁是羽毛球运动员.

Q:张宁是奥运冠军.

$\neg P$ :张宁不是羽毛球运动员.

$\neg Q$ :张宁不是奥运冠军.

上述四个命题中,若命题P和Q为真命题,则命题 $\neg P$ 和 $\neg Q$ 为假命题,用联结词“或”进行连接,有如下形式的命题.

P或Q:张宁是羽毛球运动员,或张宁是奥运冠军.

P或 $\neg Q$ :张宁是羽毛球运动员,或张宁不是奥运冠军.

$\neg P$ 或Q:张宁不是羽毛球运动员,或张宁是奥运冠军.

$\neg P$ 或 $\neg Q$ :张宁不是羽毛球运动员,或张宁不是奥运冠军.

判断上面四个复合命题的真假,易知只有“ $\neg P$ 或 $\neg Q$ ”为假命题,其余三种情况皆为真命题.

一般地,设P,Q是两个命题,用联结词“或”连接得到一个与P和Q相关的新命题,记作“ $P \vee Q$ ”,读作“P或Q”.只要P,Q中有一个为真命题,复合命题“ $P \vee Q$ ”就为真命题.只有当P和Q都为假命题时,命题“ $P \vee Q$ ”为假命题.其真值情况如表1-4所示.

表 1-4

P	Q	$P \vee Q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例3 判断下列复合命题是真还是假.

(1)P:  $8 > 7$  或  $8 = 7$ .

(2)Q:  $3 < 2$  或 3是偶数.

(3)S:正方形的对角线相等或菱形的对角线垂直.

(4)T:中学生学习语文或不学习数学.

解:(1)因为“ $8 > 7$ ”为真,“ $8 = 7$ ”为假,所以P为真命题.

(2)因为“ $3 < 2$ ”为假,“3是偶数”为假,所以Q为假命题.

(3)因为“正方形的对角线相等”为真,“菱形的对角线垂直”为真,所以S为真命题.

(4)因为“中学生学习语文”为真,“中学生不学习数学”为假,所以T为真命题.

一般地,“P且Q”的否定形式是“非P或非Q”,即

$$\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q) \quad (1-1)$$