教育部高校学生司推荐

2007
最新版

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(一)

（第5版）

本书编写组

高等教育出版社

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(一)

第5版

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1/《高等数学》编写组编.—5版.—北京:高等教育出版社,2007.2

全国各类成人高考复习考试辅导教材.专科起点升本科

ISBN 978-7-04-021354-6

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第012333号

策划编辑 田晓兰 **责任编辑** 田晓兰 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 尹 莉
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2000年9月第1版
开　　本	787×1092 1/16		2007年1月第5版
印　　张	14	**印　　次**	2007年1月第1次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	22.00元

物料号 21354-00

出 版 前 言

2006 年年末，教育部高校学生司和教育部考试中心组织修订了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》. 新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容，共编为 5 册，由高等教育出版社出版.

为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，前大纲编写修订和考试命题研究人员，及时修订了与考纲配套的系列复习考试辅导教材. 包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《艺术概论》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《生态学基础》、《医学综合》共 10 册.

本系列辅导教材融复习内容与考试内容于一体，不仅有助于考生复习并掌握扎实的基础知识，而且有利于考生把握考试的重点、难点，提高应试能力. 其内容的编排与《大纲》的知识系统完全一致，不仅充分体现了《大纲》的知识能力要求，而且注重贴近考试实际，收录了大量的应用性和能力型练习题并附有解题指导和参考答案，使考生在整个学习进程中能够做到“学练结合”，及时检验复习效果，增强应考适应力和信心.

本套教材的编写，融入了诸多专家、命题研究人员和一线教师的心血；凝结着“从知识立意向能力立意转化”等现代教育思想的精华；体现了我们出版工作者在考试用书编写方面的整体策划思想.

鉴于“2007 年版的专升本高等数学(一)考试大纲”在上一版的基础上未作大的改动，本版教材也只在第 4 版的基础上依据新大纲作了少许调整和完善，附录部分改为 2006 年的高等数学(一)考题及参考答案，供考生参考.

高等教育出版社

2007 年 1 月

编者的话

成人高等教育事业近年来得到迅速发展，尤其是专科起点升本科的发展更为显著．由于形势的发展，考生群体发生了较大变化．为了适应教育事业发展的要求，教育部于2006年年底又修订了考试大纲．为了对成人高等教育事业的发展作出更大贡献，尽最大可能给成人考生以有益的帮助，使其能适应形势变化，编者又在2006年版的基础上作了一些修改，使本书更益于读者．

为了能为读者提供一本优秀的考试辅导书，本书编写人员认真研究了2007年版《考试大纲》，在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则：

1．严格按照2007年版《考试大纲》中规定的考试内容和考试要求编写．

2．针对成人考生的特点，针对考试命题的基本原则而编写．针对考试命题的基本原则体现在本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容．避开复杂的运算与特殊的技巧性运算．针对成人考生的特点体现在突出基本概念的要素、基本性质的特点及基本计算方法的条理化．强调概念或公式的结构形式．书中选配大量的例题，以有助于读者达到理解掌握．在每个例题中加以分析讲解，侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法．有些例题的后面还给出一些说明，在说明中指出读者应该注意的问题或一些带有共性的问题特点，意在引导读者自学并提高效率．例题中包含了自1994年至2005年全国专升本考试高等数学(一)的部分试题，以有利于考生了解试题的广度与深度．例题包含了《考试大纲》中所规定的常见的基本题型．在以考试题为例题的题中给出编号注明，如(9804)表示1998年试题中的第4题，(0021)表示2000年试题中第21题，这使读者能明确该题所出现的年份与该题在该年试卷中出现的位置．

为了能与考试试题题型一致，本书中给出的选择题都是单选项，但是为了加大信息量，书中尽量对各选项进行分析．

在每章中都给出小结，指出本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型．

在每节后选有同步练习题，并附有参考解答．

高等教育出版社考试分社对本书的出版做了大量的工作，作者表示诚挚谢意．

本书编写组

2007年1月

目　　录

第一章　极限、连续

第一节　函　　数

教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)理学、工学》(2007 年版)高等数学(一)中去掉了函数的概念与性质的相关内容.这意味着函数的相关内容不再单独命题.但是极限、连续、导函数等部分还要研究函数的性质,如单调性、有界性等.为了便于读者复习,本节只对函数的概念、基本性质进行简单复习,不再讨论其相关练习题.

一、函数的定义

若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的函数.记为 $y=f(x)$.

常称 x 为自变量,y 为函数.称使函数有定义的点的全体为函数的定义域.

由函数定义可以看出,其关键特征是:

x 的允许范围,即函数的定义域;

对应规则,即函数的依赖规则.

因此说函数概念的两个基本要素为:定义域,对应规则(或称依赖关系).

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才认为它们是同一个函数.

二、函数常用的三种表示方法

解析法,如 $y=f(x)$;图像法;表格法.

三、函数解析表示法中常见的几种形式

1. 由一个解析式表示,如 $y=f(x)=x^2+2x+3$.

2. 分段函数　如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的,则称之为分段函数.

如

$$y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x<1, \\ x^2, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数,而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,它是由三个解析式来表达.

3. 隐函数　如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出,则称 y 为 x 的隐函数.

如由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 为隐函数.

相对于隐函数来说,人们称由解析表达式 $y=f(x)$ 确定的函数为显函数.

4. 参数方程表示的函数　如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来,如

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

四、函数的性质

1. 单调性 设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在该区间内单调增加.

如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在该区间内单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调.

上述区间可以为有限区间,也可以为无穷区间;可以为开区间,也可以为闭区间.

如果没有指明区间,而是说"$f(x)$ 为单调函数",总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的方法:

(1) 依定义判定 在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$,比较 $f(x_2)$ 与 $f(x_1)$. 如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果总有 $f(x_2)-f(x_1)<0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

(2) 依导数的符号判定 如果在某区间内总有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果在某区间内总有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

通常都采取第二种方法判定.

2. 奇偶性 设 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$),如果对于 D 内任意的点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数,如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为该区间内的奇函数.

上述区间可以为有限区间 $[-a,a]$ 或 $(-a,a)$,也可以为 $(-\infty,+\infty)$.

判定函数奇偶性的方法一般是利用定义.

奇、偶函数的图像有如下特点:

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

性质 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数;两个奇(偶)函数之积必为偶函数;奇函数与偶函数之积必为奇函数.

也可以利用上述性质判定函数的奇偶性.

3. 周期性 若存在 $T>0$,对于任意的 x,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为周期函数,使得上述关系式成立的最小正数 T,称为 $f(x)$ 的最小周期,简称为函数 $f(x)$ 的周期.

需指出并不是每个周期函数都有周期.

4. 有界性 设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M>0$,对于该区间内任意的 x,恒有 $|f(x)|<M$,则称 $f(x)$ 在该区间内为有界函数.

上述区间可以为有限区间,也可以为无穷区间;可以为开区间,也可以为闭区间.

如果没有指明区间,而是说"$f(x)$ 为有界函数",总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间内为有界函数.

五、初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 D_y. 若对 D_y 中的每一个值 y，通过关系 $y=f(x)$，有值 x 与之对应，这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$，常称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在研究函数时，往往习惯于将 x 作为自变量，将 y 作为因变量. 因此习惯上总把 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换成 x，将 x 换为 y，从而得到 $y=\varphi(x)$. 通常情况下，$y=f(x)$ 的反函数都是指 $y=\varphi(x)$，或记作 $f^{-1}(x)$.

反函数的图形的特点　函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 这两条曲线在 xOy 坐标平面上关于直线 $y=x$ 对称.

需指出，不是每一个函数都存在反函数. 如函数 $y=C$ 不存在反函数.

2. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$　(μ 为实数).

(2) 指数函数 $y=a^x$　($a>0, a\neq 1$).

(3) 对数函数 $y=\log_a x$　($a>0, a\neq 1$).

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

上述五类函数的定义域、单调性需记熟.

定义　上述五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

3. 复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数即 $y=f(u)$，变量 u 是变量 x 的函数 $u=g(x)$.

定义　若对于 x 在某范围中的每一个确定的值，依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应，而对于 u 的此确定值，y 按确定的规则有值与之对应，则称 y 为 x 的复合函数.

若 $y=f(u), u=g(x)$，则常记为 $y=f[g(x)]$，称 x 为自变量，u 为中间变量，y 为函数.

需指出，并不是任何两个函数 $y=f(u), u=g(x)$ 都能复合成 x 的函数. 例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$，不论 x 取什么值，相应的 u 总不小于 2，但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leqslant 1$，可知 $\arcsin(x^2+2)$ 无意义. 换言之，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

第二节　极　　限

一、极限的概念与性质

1. 数列的极限

一列按一定顺序排列的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，称为数列，常记为 $\{x_n\}$.

若 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 为单调(增加)上升数列.

若 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$,则称数列$\{x_n\}$为单调(减少)下降数列.

单调上升数列与单调下降数列统称为单调数列.

若存在 $M>0$,对任意的 n,恒有 $|x_n| \leqslant M$,则称数列$\{x_n\}$为有界数列.

在数列$\{x_n\}$中,如果自前向后任意取无穷多个项,依次排列,可以得到新数列,记为$\{x_{n_k}\}$,则称数列$\{x_{n_k}\}$为数列$\{x_n\}$的一个子列.

对于数列$\{x_n\}$,如果随着项数 n 的无限增大,数列中的项 x_n 在变化过程中与某常数 A 无限接近,则称 A 为数列$\{x_n\}$的极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则称$\{x_n\}$为收敛的,否则称其为发散的.

收敛数列具有以下性质:

若数列$\{x_n\}$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的值必定唯一;

若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$必为有界数列.反之不真.

若数列$\{x_n\}$收敛于 A,即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则数列$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$也必定收敛于 A.

此性质有两个主要应用:

(1) 判定数列$\{x_n\}$发散.如果存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于 A,而$\{x_{m_j}\}$收敛于 B,且 $A \neq B$,则可知$\{x_n\}$必定发散.

如数列 1,0,1,0,…中含有子列 1,1,…,1,…,收敛于 1.同时有子列 0,0,…,0,…,收敛于 0,因此可以断定数列 1,0,1,0,…发散.

(2) 欲求数列$\{x_n\}$的极限,有时可以将其认作是某些数列的子列.如果能判定后者收敛,则可得知数列$\{x_n\}$收敛.

2. 函数的极限

(1) $x\to\infty$ 时,$f(x)$的极限

如果 x 无限远离坐标原点时,$f(x)$能与某常数 A 无限接近,则称当 x 趋于无穷时,$f(x)$以 A 为极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

如果 x 沿数轴正向无限远离坐标原点时,称 x 趋于正无穷,记为 $x\to+\infty$.

如果 x 沿数轴负向无限远离坐标原点时,称 x 趋于负无穷,记为 $x\to-\infty$.

由函数极限的定义可以得出,若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,则必有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

(2) $x\to x_0$ 时,$f(x)$的极限

若当 x 无限接近 x_0 时,函数 $y=f(x)$无限接近常数 A,则称当 x 趋近于 x_0 时,$f(x)$以 A 为极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

当 x 在数轴上从 x_0 的左侧无限接近 x_0 时,即 $x<x_0$,且 $x\to x_0$,常记为 $x\to x_0^-$.

当 x 在数轴上从 x_0 的右侧无限接近 x_0 时,即 $x>x_0$,且 $x\to x_0$,常记为 $x\to x_0^+$.

相应地有:给定函数 $y=f(x)$及常数 A,当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$以 A 为极限,则称当 $x\to x_0^-$ 时,$f(x)$的左极限为 A,记为$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

给定函数 $y=f(x)$及常数 A,当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$以 A 为极限,则称当 $x\to x_0^+$ 时,$f(x)$的右极限为 A,记为$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

3. 极限的性质

性质 1 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则必定存在 x_0 的某邻域,在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处,恒有$f(x)>0$.

性质 2 若 $f(x)\geqslant 0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则必有 $A\geqslant 0$.

性质 3 $f(x)$在点 x_0 处的极限存在的充分必要条件是$f(x)$在点 x_0 处的左极限与右极限都存在,且相等,此时三者值相同.

左极限与右极限是考察自变量从某一确定方向趋于某一确定值时,函数的变化趋势,它的用途主要有两个方面:

(1) 研究自变量趋于区间的端点时,函数的极限问题;

(2) 研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形,考察在分段点处的极限问题.

对于上述情形(2),由性质 3 可得出如下结论.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在,且$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在,但两者不相等,或两者至少有一个不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定不存在.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在,且相等,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$必定存在,且三者相等.

有必要强调指出,极限描述了在给定过程下函数的变化性态,而极限值表示一个确定的常数. 函数 $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 时是否有极限与函数$f(x)$在点 x_0 处有无定义无关.

二、极限的四则运算

性质 1 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]$必定存在,且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\pm B.$$

性质 2 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=AB.$$

推论 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$,$n$ 为自然数,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)]^n=[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)]^n=A^n$.

性质 3 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$,且 $B\neq 0$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\frac{A}{B}.$$

例 1 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的(　　).

A. 必要非充分条件　　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　　D. 无关条件

分析 由极限的定义可以看出,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在与函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有无定义无关,

因此应选 D.

例 2 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$都不存在

B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$都存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$之中的一个存在

D. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$存在与否与$f(x)$、$g(x)$有关

分析 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在. 设$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$存在,则由极限性质可知,$\lim\limits_{x\to x_0}\{[f(x)\pm g(x)]-f(x)\}=\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在,这与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在相矛盾,这表明应选 A.

三、极限存在准则与两个重要极限

准则Ⅰ(夹逼定理) 如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n \quad (n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

则数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

上述准则可以推广到求函数的极限:

如果在x_0的某邻域内(或$|x|>M$),有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立;且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A,$$

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在,且等于$A$.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

由上述两个准则可以得出两个重要极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};\quad \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e};\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

后面三个极限公式属于同一类型.

读者应熟记两个重要极限的结构形式特点:

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,$$

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e};\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}.$$

只要符合上述结构形式的,极限公式总成立. 如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1$;$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\mathrm{e}$;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\mathrm{e}$;等等.

例 3 (9401) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 mx}{x^2}$($m$ 为常数)等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. m^2　　D. $\frac{1}{m^2}$

分析 由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 mx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{mx}\right)^3 m^3 x=0$,而知应选 A.

例 4 (0301) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$等于(　　).

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

分析 利用重要极限公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}\\&=e^{-2}.\end{aligned}$$

可知应选 D.

例 5 (0406) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$________.

分析 利用重要极限公式可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}=e.$$

例 6 (9602) 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}$等于(　　).

A. e　　B. e^b　　C. e^{ab}　　D. e^{ab+d}

分析 由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{ab}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{d}=e^{ab}.\end{aligned}$$

可知应选 C.

将此结论当作公式使用,将能简化运算. 相仿,可以得出$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab}$. 也可以将这个结论当作公式使用.

例 7 (9421) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}$,其中 m,n 为常数.

分析 由上述"公式",可得

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=e^{mn}.$$

例 8 (0511) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=$____.

分析 由上述"公式",可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{-1}.$$

例 9 (9816) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x$.

分析 由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{-1}.$$

例 10 (0016) 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 可以将所求极限的函数式先变形,化为重要极限形式.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

例 11 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 所给极限与重要极限形式相近,可考虑化为标准形式求之.

(1) 先变形,化为标准形式.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(2)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

例 12 (0217) 计算$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析 由例 10 变形求解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

例 13 设$\lim\limits_{x\to1}g(x)=3$,$\lim\limits_{x\to1}h(x)=3$,且$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则$\lim\limits_{x\to1}[3x^2+4f(x)]=$______.

分析 由题目条件及夹逼定理可知$\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$,因此$\lim\limits_{x\to1}[3x^2+4f(x)]=\lim\limits_{x\to1}3x^2+\lim\limits_{x\to1}4f(x)=15$.

例 14 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

分析 注意当 $x\to 1$ 时，$\sin(x-1)\to 0$，$x^2-1\to 0$，因此不能利用极限的商的运算法则，如果将$(x-1)$看作一个整体，$x^2-1=(x-1)(x+1)$，可将所给函数比化为

$$\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1},$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

说明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$中将 $x-1$ 认作为一个整体，则上述极限为重要极限$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$ 类型.

四、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

若在自变量 x 的某种变化趋向下，函数 $f(x)$ 以零为极限，则称在 x 的这种趋向下，$f(x)$ 为无穷小量（或无穷小）.

若在自变量 x 的某种变化趋向下，自某时刻起，函数 $f(x)$ 的绝对值可以大于预先给定的任意大的正数，则称在 x 的这种趋向下，$f(x)$ 为无穷大量（或无穷大）.

称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，常常形式上记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大量，常常形式上记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

有必要指出无穷小量并不是表达量的大小，而是表达量的变化性态，或者说它是描述在某个过程中量的变化趋势.

零是可以作为无穷小量的唯一的数，其他任何数，即使其绝对值是很小很小的数，也不是无穷小量，必须将无穷小量与很小很小的数区分开来，不可混为一谈.

同样无穷大量也是描述在某个变化过程中量的变化趋势，它不是数，即使绝对值再大的常数也不是无穷大量.

还要指出，无穷小量与无穷大量总是与自变量的变化过程相联系的，脱离过程谈无穷大量与无穷小量是没有意义的.

2. 无穷小量的性质

为了简便，我们约定，下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量都是指在同一过程而言. 在性质的叙述中省略不提.

性质 1 两个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质 2 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 3 两个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 4 若 $f(x)$ 为无穷大量，则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小量；若 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则

$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量.

性质 5 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 当 $x\to x_0$ 时为无穷小量.

性质 5 常被称为极限基本定理.

性质 4 表明,可以说"无穷大量的倒数为无穷小量",但是不能笼统地说"无穷小量的倒数为无穷大量".

五、无穷小量的比较

定义 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta=0$,

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称在 $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ 时,α 较 β 为高阶无穷小量,常记为 $\alpha=o(\beta)$.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称在 $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ 时,α 较 β 为低阶无穷小量.

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$,则称在 $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ 时,α 与 β 为同阶无穷小量.

特别当 $A=1$ 时,称在 $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ 时,α 与 β 为等价无穷小量,常记为 $\alpha\sim\beta$.

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $e^x-1\sim x$.

性质 若当 $\underset{(x\to\infty)}{x\to x_0}$ 时 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质常称为等价无穷小量代换. 这个性质常常使用在极限运算中,起到简化运算的作用,但必须注意,只能在乘除中使用,不能在加减运算中使用.

六、常见的求极限的方法

需要指出,极限的定义指明了概念,并指明了极限值是个确定的常数,它并没有提供求极限的方法. 人们利用极限定义验证了 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$. 将此作为公式,并利用下列方法:

(1) 利用极限的四则运算法则. 使用极限的四则运算法则必须注意要满足运算条件. 当把一个函数分解为几个函数的"和、差、积、商"求极限时,必须使得每个"函数"都有极限,且作为分母的"函数"的极限不能为零.

(2) 对于分式的极限. 若分母的极限为零,而分子的极限不为零,则需先求其倒数的极限,若其值为零,利用无穷小量与无穷大量关系可知所求分式的极限为 ∞.

(3) 对于分式的极限,若分子与分母极限都为零. 可考虑能否消去分子与分母的公因式,将新分式化为(1)或(2).

(4) 对于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$,其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为 x 的多项式,可利用公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, m=n\\ 0, m>n\\ \infty, m<n\end{cases}.$$