PROBLEM SOLUTIONS FOR MATRIX ANALYSIS AND APPLICATIONS

矩阵分析与应用习题解答

李剑　李细林　苏泳涛　丁子哲　编
Li Jian　Li Xilin　Su Yongtao　Ding Zizhe

张贤达　审校
Zhang Xianda

清华大学出版社

内容简介

本书是研究生教材《矩阵分析与应用》的配套参考书，由矩阵与线性方程组、特殊矩阵、矩阵的变换与分解、梯度分析与最优化、奇异值分析、总体最小二乘方法、特征分析、子空间分析与跟踪、投影分析共9章组成。每章均包含两部分内容：第一部分总结复习该章所涉及的主要理论知识，第二部分为习题的详细解答。所选习题分为基础题型、综合题型、应用题型。这些习题可以帮助读者巩固加深对基础概念的理解，提高综合运用知识的技能和解决实际应用问题的能力。

本书可供电子、通信、自动化、计算机等学科的研究生学习辅导之用，也可供相关专业和领域的教师和科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵分析与应用习题解答/李剑等编. —北京：清华大学出版社，2007.5
ISBN 978-7-302-14553-0

Ⅰ. 矩… Ⅱ. 李… Ⅲ. 矩阵分析—高等学校—解题 Ⅳ. O151.21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 007519 号

责任编辑：王一玲
责任校对：白 蕾
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62772015
地 址：北京清华大学学研大厦A座
邮 编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：19 **字 数**：436千字
版 次：2007年5月第1版 **印 次**：2007年5月第1次印刷
印 数：1～3000
定 价：29.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103 产品编号：023060-01

前　言

作为数学的一个分支，矩阵理论是众多理工学科的重要数学工具，它极大地推动了信号与信息处理、通信、控制、航天等领域的发展。很多高校都开设有矩阵的相关课程。而要学好它，做习题是一个必不可少的环节。目前，国内外比较全面的矩阵理论习题解答书籍很少。鉴于此，作者编著了本书。

本书由矩阵与线性方程组、特殊矩阵、矩阵的变换与分解、梯度分析与最优化、奇异值分析、总体最小二乘方法、特征分析、子空间分析与跟踪、投影分析共9章组成，所包含的320道习题全部选自张贤达教授编著的《矩阵分析与应用》(清华大学出版社，2004)。每章又分为两个部分：前半章为总结与复习主要理论知识，后半章为习题的详细解答。

华罗庚先生在其《高等数学引论》的序言中精辟地论述到：习题的目的首先是熟悉和巩固学习了的东西；其二是启发大家灵活运用，独立思考；其三是融会贯通。本书的习题也充分体现了这三点，这些习题大致可以分为三类：基础题型用以巩固所学的知识，加深对基本概念的理解；综合题型训练读者灵活运用知识的能力，有一定的难度；应用题型大多选自信息科学方面的国际著名杂志论文，是对某个实际问题的数学抽象，有很强的开放性和可推广性，因此有利于培养读者运用所学理论知识解决实际应用问题的能力，并体会前沿研究中的矩阵应用，但读者在解答这类习题时并不需要专业背景知识。部分综合型和应用型习题在清华大学矩阵分析课程中被选为作业题，收到了良好的效果。

全书共9章，其中第1、2章由苏泳涛编写，第1、3、6章由丁子哲编写，第5、7章由李细林编写，第4、8、9 章由李剑编写，张贤达教授负责全书的审校。全书使用LaTex排版，符号和编排与《矩阵分析与应用》保持一致。

编写本书的主旨，当然不是“越俎代庖”，不可将书中的解答看作是“标准答案”。它们应作为读者在经过自己的独立思考而后对照的“参考答案”。若再进而起到抛砖引玉的作用，启发出更漂亮的解答，将是作者莫大的欣慰。

在本书编写过程中，作者得到了课题组高秋彬、朱峰、张玲、王煜航、胡亚峰、施维、张莉、武露、谢德光、李培胜、常冬霞、张道明的帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

囿于作者水平有限，错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

作者

2006年10月于清华园

目　录

第 1 章　矩阵与线性方程组

矩阵是描述和求解线性方程组最基本和最有用的工具。本章涉及向量和矩阵的基本概念，归纳了向量和矩阵的基本运算。

1.1　主要理论与方法

1.1.1　矩阵的基本运算

一、矩阵与向量

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

它使用m个方程描述n个未知量之间的线性关系。这一线性方程组很容易用矩阵——向量形式简记为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

称为$m \times n$矩阵，是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合；而

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

分别为$n \times 1$向量和$m \times 1$向量，是按照列方式排列的复数或实数集合，统称列向量。类似地，按照行方式排列的复数或实数集合称为行向量，例如

$$\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \tag{1.5}$$

是$1 \times n$向量。

二、矩阵的基本运算

1. 共轭转置：若$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是一个$m\times n$矩阵，则$\boldsymbol{A}$的转置记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，是一个$n\times m$矩阵，定义为$[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]_{ij}=a_{ji}$；矩阵$\boldsymbol{A}$的复数共轭$\boldsymbol{A}^*$ 定义为$[\boldsymbol{A}^*]_{ij}=a_{ji}^*$；复共轭转置记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

共轭转置又叫Hermitian伴随、Hermitian转置或Hermitian共轭。满足$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$的正方复矩阵称为Hermitian矩阵或共轭对称矩阵。

2. 矩阵求和：两个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$和$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$之和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，定义为$[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。

3. 标量与矩阵相乘：令$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是一个$m\times n$矩阵，且α是一个标量。乘积$\alpha\boldsymbol{A}$是一个$m\times n$矩阵，定义为$[\alpha\boldsymbol{A}]_{ij}=\alpha a_{ij}$。

4. 矩阵与向量相乘：$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$与$r\times 1$向量$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_r]^{\mathrm{T}}$的乘积$\boldsymbol{Ax}$只有当$n=r$时才存在，它是一个$m\times 1$向量，定义为

$$[\boldsymbol{Ax}]_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\cdots,m$$

5. 矩阵与矩阵相乘：$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$与$r\times s$矩阵$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$的乘积$\boldsymbol{AB}$只有当$n=r$时才存在，它是一个$m\times s$矩阵，定义为

$$[\boldsymbol{AB}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,s$$

根据定义，容易验证矩阵的加法服从下面的运算规则。

- 加法交换律(commutative law of addition)：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
- 加法结合律(associative law of addition)：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

定理 1.1 矩阵的乘积服从下面的运算法则。

(1) 乘法结合律(associative law of multiplication)：若$\boldsymbol{A}\in C^{m\times n},\boldsymbol{B}\in C^{n\times p},\boldsymbol{C}\in C^{p\times q}$，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$。

(2) 乘法左分配律(left distributive law of multiplication)：若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个$m\times n$ 矩阵，且$\boldsymbol{C}$是一个$n\times p$矩阵，则$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$。

(3) 乘法右分配律(right distributive law of multiplication)：若$\boldsymbol{A}$是一个$m\times n$ 矩阵，并且$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$是两个$n\times p$矩阵，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$。

(4) 若α是一个标量，并且$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个$m\times n$矩阵，则$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$。

6. 逆矩阵：令$\boldsymbol{A}$是一个$n\times n$矩阵，若可以找到一个$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$满足$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，称矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，并称$\boldsymbol{A}^{-1}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵。

下面是共轭、转置、共轭转置和逆矩阵的性质。

(1) 矩阵的共轭、转置和共轭转置满足分配律：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$$

(2) 矩阵乘积的转置、共轭转置和逆矩阵满足关系式

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$$
$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \quad (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{ 为可逆的正方矩阵})$$

(3) 共轭、转置和共轭转置等符号均可与求逆符号交换，即有

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*, \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}, \quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}$$

因此，常常分别采用紧凑的数学符号$\boldsymbol{A}^{-*}, \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{A}^{-\mathrm{H}}$。

(4) 对于任意矩阵$\boldsymbol{A}$，矩阵$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$都是Hermitian 矩阵。若$\boldsymbol{A}$可逆，则对于Hermitian矩阵$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$，有$\boldsymbol{A}^{-\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$。

7. 幂等矩阵：矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times n}$称为幂等矩阵(idempotent matrix)，若$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}$。

8. 对合矩阵：矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times n}$称为对合矩阵(involutory matrix)，若$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{AA} = \boldsymbol{I}$。

三、向量的线性无关性与非奇异矩阵

1. 向量组线性相关/无关：一组m维向量$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$称为线性无关，若方程

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

只有零解$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$。若能够找到一组不全部为零的系数$c_1, c_2, \cdots, c_n$使得上述方程成立，则称$m$维向量组$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$线性相关。

2. 奇异/非奇异矩阵：一个$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$是非奇异的，当且仅当矩阵方程$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$只有零解$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。若$\boldsymbol{A}$不是非奇异的，则称$\boldsymbol{A}$ 奇异。

四、初等行变换与阶梯型矩阵

1. 矩阵的初等行变换：令矩阵$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$的$m$个行向量分别为$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_m$。下列运算称为矩阵$\boldsymbol{A}$的初等行运算(elementary row operation)或初等行变换：

(1) 互换矩阵的任意两行，如$\boldsymbol{r}_p \leftrightarrow \boldsymbol{r}_q$，称为 I 型初等行变换。

(2) 一行元素同乘一个非零常数α，如$\alpha\boldsymbol{r}_p \to \boldsymbol{r}_p$，称为 II 型初等行变换。

(3) 将第p行元素同乘一个非零常数β后，加给第q行，即$\beta\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_q \to \boldsymbol{r}_q$，称为III型初等行变换。

2. 阶梯型矩阵：一个$m \times n$矩阵称为阶梯型(echelon form)矩阵，若

(1) 全部由零组成的所有行都位于矩阵的底部。

(2) 每一个非零行的首项元素总是出现在上一个非零行的首项元素的右边。

(3) 首项元素下面的同列元素全部为零。

1.1.2 向量空间、内积空间与线性映射

一、向量空间

以向量为元素的集合V称为向量空间，若加法运算定义为两个向量之间的加法，乘法运算定义为向量与标量域S中的标量之间的乘法，并且对于向量集合V中的向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}$和标量域$S$中的标量$a_1, a_2$，以下两个闭合性和关于加法及乘法的八个公理(axiom) [也称公设(postulate)或定律(law)]满足：

闭合性(closure properties)

(c1) 若$\boldsymbol{x} \in V$和$\boldsymbol{y} \in V$，则$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$，即$V$在加法下是闭合的，简称加法的闭合性(closure for addition)；

(c2) 若a_1是一个标量，$\boldsymbol{y} \in V$，则$a_1\boldsymbol{y} \in V$，即V在标量乘法下是闭合的，简称标量乘法的闭合性(closure for scalar multiplication)。

加法的公理

(a1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，称为加法的交换律(commutative law for addition)；

(a2) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{w}, \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w} \in V$，称为加法的结合律(associative law for addition)；

(a3) 在V中存在一个零向量$\boldsymbol{0}$，使得对于任意向量$\boldsymbol{y} \in V$，恒有$\boldsymbol{y} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{y}$ (零向量的存在性)；

(a4) 给定一个向量$\boldsymbol{y} \in V$，存在另一个向量$-\boldsymbol{y} \in V$使得$\boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ (负向量的存在性)。

标量乘法的公理

(s1) $a(b\boldsymbol{y}) = (ab)\boldsymbol{y}$对所有向量$\boldsymbol{y}$和所有标量$a, b$成立，称为标量乘法的结合律(associative law for scalar multiplication)；

(s2) $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$对所有向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$和标量$a$ 成立，称为标量乘法的分配律(distributive law for scalar multiplication)；

(s3) $(a + b)\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{y}$对所有向量$\boldsymbol{y}$和所有标量$a, b$成立(标量乘法的分配律)；

(s4) $1\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ 对所有$\boldsymbol{y} \in V$成立，称为标量乘法的单位律(unity law for scalar multiplication)。

二、实内积空间

实内积空间(real inner product space)是满足下列条件的实向量空间E：对E中每一对向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，存在向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的内积$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 服从以下公理：

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0,\ \forall\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，称为内积的严格正性(strict positivity)或称内积是正定的(positive definite)，并且$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$；

(2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$，称为内积的对称性(symmetry)；

(3) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle,\ \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$；

(4) $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$对所有实向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$及所有实标量$\alpha$成立。

三、复内积空间

复内积空间(complex inner product space)是满足下列条件的复向量空间C：对C中每一对向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，存在复向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$之间的内积$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 服从以下公理：

(1) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$，称为内积的严格正性或称内积是正定的；

(2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$，称为内积的共轭对称性(conjugate symmetry)或Hermitian性；

(3) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$，对所有向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$成立；

(4) $\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = c^* \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$对所有复向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 及所有复标量c成立。

四、线性映射

令V和W分别是R^m和R^n 的子空间，并且$T: V \mapsto W$是一映射。称T为线性映射或线性变换，若对于$\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$和所有标量c，映射T满足线性关系式

$$T(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w}) \tag{1.7}$$

和

$$T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v}) \tag{1.8}$$

1.1.3 随机向量

一、随机向量的统计描述

1. 均值向量：考查$m \times 1$随机向量$\boldsymbol{x}(\xi) = [x_1(\xi), x_2(\xi), \cdots, x_m(\xi)]^{\mathrm{T}}$。令随机变量$x_i(\xi)$的均值$\mathrm{E}\{x_i(\xi)\} = \mu_i$，则随机向量的数学期望称为均值向量，记作$\boldsymbol{\mu}_x$，定义为

$$\boldsymbol{\mu}_x = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(\xi)\} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{x_1(\xi)\} \\ \mathrm{E}\{x_2(\xi)\} \\ \vdots \\ \mathrm{E}\{x_m(\xi)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

式(1.9)表明，均值向量的元素是随机向量各个元素的均值。

2. 自相关矩阵：随机向量的自相关矩阵定义为

$$\boldsymbol{R}_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(\xi)\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi)\} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

式中，$r_{ii}, i=1,2,\cdots,m$表示随机变量$x_i(\xi)$的自相关函数，定义为

$$r_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{|x_i(\xi)|^2\}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1.11}$$

而r_{ij}表示随机变量$x_i(\xi)$和$x_j(\xi)$之间的互相关函数，定义为

$$r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{x_i(\xi)x_j^*(\xi)\}, \quad i,j=1,2,\cdots,m,\ i\neq j \tag{1.12}$$

显然，自相关矩阵是共轭对称的，即为Hermitian矩阵。

3. 自协方差矩阵：随机向量$\boldsymbol{x}(\xi)$的自协方差矩阵定义为

$$\boldsymbol{C}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{[\boldsymbol{x}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_x][\boldsymbol{x}(\xi)-\boldsymbol{\mu}_x]^{\mathrm{H}}\} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

式中，主对角线的元素

$$c_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{|x_i(\xi)-\mu_i|^2\}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1.14}$$

表示随机变量$x_i(\xi)$的方差σ_i^2，即$c_{ii}=\sigma_i^2$，而非主对角线元素

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{[x_i(\xi)-\mu_i][x_j(\xi)-\mu_j]^*\} = \mathrm{E}\{x_i(\xi)x_j^*(\xi)\} - \mu_i\mu_j^* = c_{ji}^* \tag{1.15}$$

表示随机变量$x_i(\xi)$和$x_j(\xi)$之间的协方差。自协方差矩阵也是Hermitian矩阵。

随机向量间的互相关矩阵与互协方差矩阵很容易由自相关矩阵与自协方差矩阵推广得到。

4. 统计不相关：两个随机向量$\boldsymbol{x}(\xi)$与$\boldsymbol{y}(\xi)$统计不相关，若它们的互协方差矩阵等于零矩阵，即$\boldsymbol{C}_{xy}=\boldsymbol{O}$。

5. 正交：两个随机向量$\boldsymbol{x}(\xi)$和$\boldsymbol{y}(\xi)$称为正交，若它们的互相关矩阵为零矩阵，即

$$\boldsymbol{R}_{xy} = \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(\xi)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(\xi)\} = \boldsymbol{O} \tag{1.16}$$

二、正态随机向量

若随机向量$\boldsymbol{x}(\xi)=[x_1(\xi),x_2(\xi),\cdots,x_m(\xi)]^{\mathrm{T}}$的各分量为联合正态分布的随机变量，则称$\boldsymbol{x}(\xi)$为正态随机向量。

1.1.4 内积与范数

一、向量的内积与范数

1. 常数向量的内积与范数

(1) 内积：两个$m\times 1$维常数向量$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{\mathrm{T}}$ 和$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_m]^{\mathrm{T}}$的内积(或叫点积)定义为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* y_i \tag{1.17}$$

(2) 范数：

(a) l_1范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| \tag{1.18}$$

上述范数有时也叫和范数或1范数。

(b) l_2范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_m|^2)^{1/2} \tag{1.19}$$

这一范数常称Euclidean范数，有时也称Frobenius范数。

(c) l_∞范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_m|) \tag{1.20}$$

也称无穷范数或极大范数。

(d) l_p范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geqslant 1 \tag{1.21}$$

l_p范数也叫Hölder范数[20]。

2. 随机向量的内积与范数

(1) 内积：若$\boldsymbol{x}(\xi)$和$\boldsymbol{y}(\xi)$ 分别是样本变量ξ的随机向量，则它们的内积定义为

$$\langle \boldsymbol{x}(\xi), \boldsymbol{y}(\xi) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi)\boldsymbol{y}(\xi)\} \tag{1.22}$$

其中，样本变量ξ可以是时间t、圆频率f、角频率ω和空间变量s等。

(2) 范数：随机向量$\boldsymbol{x}(\xi)$的范数定义为

$$\|\boldsymbol{x}(\xi)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\xi)\boldsymbol{x}(\xi)\} \tag{1.23}$$

二、矩阵的范数

1. Frobenius范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \tag{1.24}$$

这一定义可以视为向量的Euclidean范数对按照矩阵各行排列“长向量”

$$\boldsymbol{x} = [a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}]^{\mathrm{T}}$$

的推广。矩阵的Frobenius范数也被称为Euclidean范数、Schur范数、Hilbert-Schmidt范数或者l_2范数。

2. l_p范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p} \tag{1.25}$$

式中，$\|\boldsymbol{x}\|_p$是向量$\boldsymbol{x}$的l_p范数，由式(1.21)定义。l_p范数也称为Minkowski p 范数，或者简称p范数。

3. 行和范数(row-sum norm)

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\text{row}} = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\} \tag{1.26}$$

4. 列和范数(column-sum norm)

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\text{col}} = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\} \tag{1.27}$$

5. 谱范数(spectrum norm)

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\text{spec}} = \sigma_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}} \tag{1.28}$$

1.1.5 基与Gram-Schmidt正交化

一、向量子空间的基

生成子空间W的线性无关的向量$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_d\}$称为子空间$W$的基向量(basis vectors) 或简称为基。生成子空间W的基向量的个数称为子空间W 的维数，即有

$$d = \dim(\text{Span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_d\}) \tag{1.29}$$

二、Gram-Schmidt正交化

令$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$ 是p维向量子空间W的任意一组基(即线性无关的向量)。于是，子空间W的标准正交基$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$可以通过Gram-Schmidt正交化构造如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \\
&\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_i, \qquad \boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{p}_k}{\|\boldsymbol{p}_k\|}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

式中，$2\leqslant k\leqslant n$。

1.1.6 矩阵的标量函数

一、矩阵的二次型

任意一个正方矩阵$\boldsymbol{A}$的二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是一实标量。以实矩阵为例，考查二次型

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & 7 & 5\\ -1 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \\
&= x_1^2 - x_2x_1 - x_3x_1 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_3x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2x_3 + 3x_3^2 \\
&= x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3 + 11x_2x_3
\end{aligned}$$

这是变元x的二次型函数，故称$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的二次型。

一个复共轭对称矩阵$\boldsymbol{A}$称为

正定矩阵，若二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

半正定矩阵，若二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (也称非负定的);

负定矩阵，若二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

半负定矩阵，若二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (也称非正定的);

不定矩阵，若二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$既可能取正值，也可能取负值。

二、矩阵的迹

1. 定义：$n \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的对角元素之和称为$\boldsymbol{A}$的迹(trace)，记作$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1.31}$$

2. 性质：

(1) 关于迹的等式 [27]

(a) 若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$ 均为$n \times n$矩阵，则$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$。

(b) 若c是一个复或者实的常数，则$\mathrm{tr}(c\boldsymbol{A}) = c\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$。

(c) 若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$ 均为$n\times n$矩阵，并且c_1和c_2为常数，则$\mathrm{tr}(c_1\boldsymbol{A} \pm c_2\boldsymbol{B}) = c_1\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \pm c_2\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$。

(d) 矩阵$\boldsymbol{A}$的转置、复数共轭和复共轭转置的迹分别为

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{*}) = [\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})]^{*}$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = [\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})]^{*}$$

(e) 迹是相似不变量：若$\boldsymbol{A}$为$m \times n$ 矩阵，且$\boldsymbol{B}$为$n \times m$矩阵，则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$$

(f) 若矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为$m \times m$矩阵，并且$\boldsymbol{B}$非奇异，则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$$

(g) 若$\boldsymbol{A}$是一个$m \times n$矩阵，则$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}_{m\times n}$ (零矩阵)。

(h) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}})$和$\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}})$。

(i) 分块矩阵的迹满足

$$\mathrm{tr}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{D})$$

式中，$\boldsymbol{A} \in C^{m\times m}, \boldsymbol{B} \in C^{m\times n}, \boldsymbol{C} \in C^{n\times m}, \boldsymbol{D} \in C^{n\times n}$。

(j) 矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$的迹相等，且有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \tag{1.32}$$

(k) 迹等于特征值之和，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{1.33}$$

(l) 对于任何正整数k，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \tag{1.34}$$

式右的和称为$\boldsymbol{A}$的诸特征值的k次矩。

(2) 关于迹的不等式 [27]

(a) 对一个复矩阵$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$，有$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) \geqslant 0$。

(b) 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$m \times n$矩阵，则

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^2] \leqslant \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}) \quad \text{(Cauchy-Schwartz不等式)}$$

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^2] \leqslant \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$$

$$\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^2] \leqslant \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$$

(c) Schur不等式：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) \leqslant \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$。

(d) $\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}] \leqslant 2[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})]$。

(e) 若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为$m \times m$对称矩阵，则$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2)$。

三、行列式

1. 定义：一个$n \times n$正方矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式记作$\det(\boldsymbol{A})$或$|\boldsymbol{A}|$

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

若$\boldsymbol{A} = \{a\} \in C^{1\times 1}$，则它的行列式由$\det(\boldsymbol{A}) = a$给出。

2. 性质：

(1) 关于行列式的等式关系 [27]

(a) 如果矩阵的两行(或列)互换位置，则行列式数值保持不变，但符号改变。

(b) 若矩阵的某行(或列)是其他行(或列)的线性组合，则$\det(\boldsymbol{A}) = 0$。特别地，若某行(或列)与另一行(或列) 成正比或相等，或者某行(或列)的元素均等于零，则$\det(\boldsymbol{A}) = 0$。

(c) 任何一个正方矩阵$\boldsymbol{A}$和它的转置矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$具有相同的行列式，即

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \tag{1.36}$$

但$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = [\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})]^*$。

(d) 单位矩阵的行列式等于1，即$\det(\boldsymbol{I}) = 1$。

(e) 一个Hermitian矩阵的行列式为实数，因为

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^* \tag{1.37}$$

(f) 两个矩阵乘积的行列式等于它们的行列式的乘积，即

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}), \qquad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in C^{n\times n} \tag{1.38}$$

(g) 对于一个三角(上三角或下三角)矩阵$\boldsymbol{A}$，其行列式等于三角矩阵主对角线所有元素的乘积，即

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

一个对角矩阵$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$的行列式也等于其对角元素的乘积。

(h) 给定一个任意的常数(可以是复数) c，则

$$\det(c\boldsymbol{A}) = c^n \det(\boldsymbol{A}) \tag{1.39}$$

(i) 若$\boldsymbol{A}$非奇异，则$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = [\det(\boldsymbol{A})]^{-1}$。

(j) 对于矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_{m\times n}, \boldsymbol{C}_{n\times m}, \boldsymbol{D}_{n\times n}$，分块矩阵的行列式满足

$$\boldsymbol{A}\text{非奇异} \iff \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) \tag{1.40}$$

或

$$\boldsymbol{D}\text{非奇异} \iff \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{D})\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}) \tag{1.41}$$

(2) 关于行列式的不等式关系[27]

(a) Cauchy-Schwartz不等式：若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是$m \times n$矩阵，则

$$|\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})|^2 \leqslant \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B})$$

(b) Hadamard不等式：对于$m \times m$矩阵$\boldsymbol{A}$，有

$$\det(\boldsymbol{A}) \leqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

(c) Fischer不等式：若$\boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_{m\times n}, \boldsymbol{C}_{n\times n}$，则

$$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\right) \leqslant \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{C})$$

(d) Minkowski不等式：若$\boldsymbol{A}_{m\times m} \neq \boldsymbol{O}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_{m\times m} \neq \boldsymbol{O}_{m\times m}$ 半正定，则

$$\sqrt[m]{\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} \geqslant \sqrt[m]{\det(\boldsymbol{A})} + \sqrt[m]{\det(\boldsymbol{B})}$$

(e) 正定矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式大于0，即$\det(\boldsymbol{A}) > 0$。

(f) 半正定矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式大于或者等于0，即$\det(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$。

(g) 若$m \times m$矩阵$\boldsymbol{A}$半正定，则

$$[\det(\boldsymbol{A})]^{1/m} \leqslant \frac{1}{m}\det(\boldsymbol{A})$$

(h) 若矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_{m\times m}$均半正定，则

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \geqslant \det(\boldsymbol{A}) + \det(\boldsymbol{B})$$

(i) 若$\boldsymbol{A}_{m\times m}$正定，$\boldsymbol{B}_{m\times m}$半正定，则

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \geqslant \det(\boldsymbol{A})$$

四、矩阵的秩

1. 定义：矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩定义为该矩阵中线性无关的行和列的数目。

2. 性质：

(1) 秩的性质

(a) 秩是一个正整数。

(b) 秩等于或小于矩阵的行数或列数。

(c) 当$n \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的秩等于n时，则$\boldsymbol{A}$是非奇异矩阵，或称$\boldsymbol{A}$ 满秩(full rank)。

(d) 如果$\text{rank}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) < \min\{m,n\}$，则称$\boldsymbol{A}$是秩亏缺的(rank deficient)。一个秩亏缺的正方矩阵称为奇异矩阵。

(e) 若$\text{rank}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m\,(< n)$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$具有满行秩(full row rank)。

(f) 若$\text{rank}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = n\,(< m)$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$具有满列秩(full column rank)。

(g) 任何矩阵$\boldsymbol{A}$左乘满列秩矩阵或者右乘满行秩矩阵后，矩阵$\boldsymbol{A}$的秩保持不变。

(h) 当矩阵的秩$\text{rank}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = r \neq 0$时，至少存在一个$r \times r$子矩阵$\boldsymbol{X}_{r\times r}$满秩或非奇异。即是说，矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}$可以分块为

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{r\times r} & \boldsymbol{Y}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{Z}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{W}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{X}_{r\times r}$非奇异。

(2) 关于秩的等式

(a) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$，则$\text{rank}(\boldsymbol{A}^{\text{H}}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}^{\text{T}}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}^*) = \text{rank}(\boldsymbol{A})$。

(b) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$和$c \neq 0$，则$\text{rank}(c\boldsymbol{A}) = \text{rank}(\boldsymbol{A})$。

(c) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times m}$和$\boldsymbol{C} \in C^{n\times n}$均非奇异，则对于任一矩阵$\boldsymbol{B} \in C^{m\times n}$有$\text{rank}(\boldsymbol{AB}) = \text{rank}(\boldsymbol{B}) = \text{rank}(\boldsymbol{BC}) = \text{rank}(\boldsymbol{ABC})$。即是说，矩阵$\boldsymbol{B}$左乘与(或)右乘一个非奇异矩阵后，$\boldsymbol{B}$的秩保持不变。

(d) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$且$\boldsymbol{B} \in C^{m\times n}$，则$\text{rank}(\boldsymbol{A}) = \text{rank}(\boldsymbol{B})$，当且仅当存在非奇异矩阵$\boldsymbol{X} \in C^{m\times m}$和$\boldsymbol{Y} \in C^{n\times n}$ 使得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{XAY}$。

(e) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$，则

$$\text{rank}(\boldsymbol{AA}^{\text{T}}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}^{\text{T}}\boldsymbol{A}) = \text{rank}(\boldsymbol{A})$$
$$\text{rank}(\boldsymbol{AA}^{\text{H}}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}^{\text{H}}\boldsymbol{A}) = \text{rank}(\boldsymbol{A})$$

(f) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times m}$，则

$$\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m \iff \det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \iff \boldsymbol{A}\text{非奇异}$$

(g) 若$m \times m$矩阵$\boldsymbol{A}$非奇异，且$\boldsymbol{B} \in C^{m\times n}, \boldsymbol{C} \in C^{n\times m}, \boldsymbol{D} \in C^{n\times n}$，则

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = m \iff \boldsymbol{D} = \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$$

(3) 关于秩的不等式

(a) 对于任意$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$均有$\text{rank}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m, n\}$。

(b) 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in C^{m\times n}$，则$\text{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant \text{rank}(\boldsymbol{A}) + \text{rank}(\boldsymbol{B})$。

(c) 若$\boldsymbol{A} \in C^{m\times k}$和$\boldsymbol{B} \in C^{k\times n}$，则

$$\text{rank}(\boldsymbol{A}) + \text{rank}(\boldsymbol{B}) - k \leqslant \text{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\text{rank}(\boldsymbol{A}), \text{rank}(\boldsymbol{B})\}$$

(d) 如果从任意矩阵中删去某些行与(或)某些列，则所得子矩阵的秩不可能大于原矩阵的秩。

1.1.7 逆矩阵

一、逆矩阵的性质

$n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 具有以下性质：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$。

(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的。

(3) 逆矩阵的行列式等于原矩阵行列式的倒数，即 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$。

(4) 逆矩阵是非奇异的。

(5) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$。

(6) 复共轭转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\text{H}}$ 的逆矩阵等于逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的复共轭转置，即 $(\boldsymbol{A}^{\text{H}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\text{H}}$。逆矩阵的复共轭转置常采用符号 $\boldsymbol{A}^{-\text{H}} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\text{H}}$ 简记之。

(7) 若 $\boldsymbol{A}^{\text{H}} = \boldsymbol{A}$, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\text{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$。

(8) $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$。

(9) 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆的，则

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.42}$$