高等学校教材

微积分（上）

第二版

主编　苏德矿　吴明华

高等教育出版社

高等学校教材

微 积 分

(上)

第二版

主　编　苏德矿　吴明华

编　者　苏德矿　吴明华
　　　　金蒙伟　杨起帆

浙江大学数学系

高等教育出版社

内容简介

本书在教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果的基础上，根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并结合教学实践经验修订而成。为适应广大高校教师的教学需求，作者广泛吸取教师使用意见，在保留第一版注重分析综合、将数学建模的基本内容和方法融入教材等特色的基础上，修改了一些重要概念的论述和重要定理的证明，增加了部分教学内容，调整了一些内容的讲述顺序，使本书内容更加丰富，系统更加完整，有利于教师教学和学生学习。

本书分上、下两册。上册共6章，主要内容有：函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程；下册共6章，主要内容有：矢量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，第二类曲线积分与第二类曲面积分，级数，含参量积分。

本书可作为高等院校工科、理科、经济及管理类专业的微积分教材。读者可登陆以下网址浏览与本书配套的微积分多媒体辅助教学课件：

http://course.zju.edu.cn/eln/cosinfo.jsp?iOrdinal=525

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上/苏德矿，吴明华主编. —2版. —北京：高等教育出版社，2007.7
ISBN 978-7-04-021787-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①苏…②吴… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第073987号

策划编辑 于丽娜 **责任编辑** 高尚华 **封面设计** 张申申
责任绘图 杜晓丹 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 殷 然
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2000年7月第1版
开　　本	787×960　1/16		2007年7月第2版
印　　张	26.5	印　　次	2007年7月第1次印刷
字　　数	490 000	定　　价	27.60元

物料号　21787-00

第二版前言

《微积分》(第一版)自2000年出版以来，被广泛采用并得到一致好评。根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参照中华人民共和国教育部制定的最新全国硕士研究生入学考试数学一、二、三、四的基本要求，本书在第一版的基础上，广泛听取教师使用意见和建议，结合编者自身的教学实践经验进行了修订。

在保持第一版结构严谨、逻辑严密、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等特点的基础上，编者从教学需求的角度出发，进行了仔细的推敲，改写了一些重要概念的论述和重要定理的证明，调整了一些内容的讲述顺序，增加了部分教学内容，使本书内容体系更加完整，更有利于教师教学和学生学习。本教材主要修订内容如下：

(1) 删除了教材中较为繁琐的内容、例题、习题，尤其删除了数列极限中难度较大的习题。

(2) 考虑到中学数学课程降低了对反三角函数的要求，而这部分内容对学好微积分又非常重要，为此在附录中增加了基本初等函数的性质与图像。

(3) 针对目前中学数学课程中，对参数方程介绍比较少，而且不再介绍极坐标系的有关内容等问题，在教材中增加了参数方程的简单介绍和较详细的极坐标系的内容介绍，同时在附录中增加了曲线极坐标方程的图形。

(4) 对教材中重要或较难理解的定理及重要的例题采用多种方法进行分析和证明，便于学生更好地理解所学内容，同时也有利于学生自学能力的提高。

(5) 基于教学实践中积累的丰富教学经验，对教材中重要或较难理解的方法，采用与众不同的叙述方法，有利于学生理解与掌握。

与本书配套的微积分多媒体辅助教学课件以文字、图形、声音、动静态图像等形式把本书内容集成自学课件，并以网页的形式呈现。其中，每个章节包括基本点、重点、难点、内容概述、教学内容、教学要求等，每章还附有例题、练习题、自测题与课后学习供任课教师参考使用和学生自学使用。特别是微分中值定理、数学建模初步、曲面方程等内容中都配有较多的动态演示图形，对学生理解教材内容有很大的帮助。读者可登陆以下网址浏览相关内容：

http://course.zju.edu.cn/eln/cosinfo.jsp?iOrdinal=525

在本书修订过程中，浙江大学及其他兄弟院校讲授微积分课程的教师给我

们提出了宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢。

本次修订致力于加强学生自学能力和研究能力的培养，为提高学生的综合能力和创新能力奠定良好的数学基础。希望本教材的再版能为推动普通高等院校素质教育的改革与素质教育工程的实施贡献一份力量。

编　者

2007 年 3 月于求是园

目 录

第一章　函数与极限

微积分的核心和基础是极限，极限的思想自始至终贯穿于微积分之中. 极限是建立在无限基础上的概念，它的研究对象是函数，考虑的是一个动态过程. 极限方法的无限性和动态性与初等数学处理问题的方法(其主要特征为有限性和静态性)有着本质的不同，但又有着密切的联系. **微积分是以函数为研究对象，运用极限手段(如取无穷小或无穷逼近等极限过程)分析处理问题的一门数学学科.**

§1　函　　数

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

人们在观察、研究某一运动过程中，会遇到许多不同的量. 其中有的量在研究过程中保持不变，这种量叫做**常量**；也有的量在运动过程中可取不同的值，这种量叫做**变量**. 例如，火车在两车站之间的行驶过程中，乘客的数量是常量；而火车离两站的距离，燃料的储存量等都是变量. 又如，在某一地点，物体自由下落的过程中，离地面的距离是变量，而重力加速度 g 是常量. 必须注意，上述常量与变量的概念，依赖于所考察的过程. 仍以落体为例，如果由高空落下，重力加速度就不是常量而是变量.

二、函数的定义

一切客观事物都是不断变化发展的，在变化过程中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系着的. 为了探索和掌握运动的规律性，就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系，这是微积分研究的主要内容.

函数是微积分研究的对象. 虽然在中学已经讲授过一些有关函数的知识，但不够详尽透彻. 我们要对函数有一个清楚的认识.

首先，我们再叙述一下一元函数的定义.

定义1.1 设 D、B 是两个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中任何一个实数 x，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称对应法则 f 是 D 上的函数，记为

$$f:x\mapsto y \quad 或 \quad f:D\to B,$$

y 称为 x 对应的函数值，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

有时也简称因变量 y 是自变量 x 的函数，虽然这种说法并不太确切，但反映了 y 是依赖于 x 的变量，在使用上有方便之处. 所以我们在以后常用这种说法，但应正确理解，**函数的本质是指对应法则 f 与定义域，不是指因变量 y.**

D 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$. $f(D)\triangleq$①$\{f(x):x\in D\}$ 称为函数的值域，记作 $R(f)$. 在平面坐标系 Oxy 下，集合 $\{(x,y):y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

由函数的定义可知，定义域、对应法则是确定函数的两个要素. 至于变量本身的具体意义及采用什么记号是无关紧要的，比如

$$y=f(x),\ x\in D \quad 与 \quad S=f(t),\ t\in D$$

代表同一个函数.

如果同时研究几个不同的函数，即不同的对应规律，就必须用不同的记号加以区别，如 $f,g,\varphi,\psi,\cdots$. 有时为了简便起见，可用 $y=y(x)$ 表示一个函数，这样 y 既代表对应规律又代表因变量.

在函数的定义中，当 x 在 D 上每取一个值 x_0，所对应的值 y_0 称为函数 f 在 $x=x_0$ 处的值，记作 $f(x_0)$，即有 $y_0=f(x_0)$.

如果一个函数是由数学表达式给出，而定义域没有具体的规定，那么它的定义域就是使得函数在数学上有意义的自变量所取数值的全体. 如果该函数有实际背景，则它的定义域还要根据问题的实际条件来确定.

表示函数的定义域常用区间、不等式这两种方法.

对区间我们常引入下面的记号. 开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\triangleq U(x_0,\ \delta)$ $(\delta>0)$ 称为以 x_0 为心，以 δ 为半径的邻域，简称为 x_0 的 δ 邻域. 若不需要指明半径 δ 时，记作 $U(x_0)$，称为 x_0 的某邻域. $(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)\triangleq\mathring{U}(x_0,\ \delta)$ 称为以 x_0 为心，以 δ 为半径的空心邻域，简称为 x_0 的 δ 空心邻域，若不需要指明半径 δ 时，记作 $\mathring{U}(x_0)$，称为 x_0 的某空心邻域. 同理，

① 符号"$\triangleq$"表示"定义为"或"记为".

$(x_0,x_0+\delta)\triangleq \mathring{U}_+(x_0,\delta)$，$[x_0,x_0+\delta)=U_+(x_0,\delta)$统称为$x_0$的右邻域，

$(x_0-\delta,x_0)\triangleq \mathring{U}_-(x_0,\delta)$，$(x_0-\delta,x_0]=U_-(x_0,\delta)$统称为$x_0$的左邻域.

例1 (1) $y=x^2$，其中$x\in[0,1]$. 该函数的定义域是$[0,1]$；

(2) $y=x^2$. 该函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=x^2$，其中x表示正方形的边长，y表示正方形的面积. 它的定义域是$[0,+\infty)$.

例2 判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$；　　(2) $y=\ln x^2$，$S=2\ln|t|$.

解 (1) 函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 而函数$y=x+1$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，即两个函数的定义域不同，尽管$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，两个函数的对应法则相同，但不是同一个函数.

(2) 函数$y=\ln x^2$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而函数$S=2\ln|t|$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以两个函数的定义域相同. 又

$$S=2\ln|t|=\ln|t|^2=\ln t^2,$$

所以两个函数的对应法则也相同. 尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但两个函数表示同一个函数.

三、函数的表示方法

一般地，函数可以用三种不同的方法来表示，即表格法、图象法和公式法.

1. 表格法

例3 保险丝的熔断电流I(单位:A)和直径D(单位:mm)之间有如下表所示的关系：

直径D(mm)	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.00
熔断电流I(A)	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.00

从表中由直径D可读出对应的I值.

表格法的特点是简明方便，缺点是自变量的取值有限.

2. 图像法

有些函数自然地产生了图像.

例4 在自动记录气压计中，有一个匀速转动的圆柱形记录鼓，印有坐

标方格的记录纸就裹在这鼓上，记录鼓每 24 小时转动一周. 气压计指针的端点装有一支黑水笔，笔尖接触着记录纸. 这样经过 24 小时之后，取下的记录纸上就描画了一条曲线，这条曲线表示气压 P 随时间 t 变化的函数关系.

例 5 如图 1 - 1 所示的心电图(EKG)显示两个人的心率模式，一位正常，另一位不正常. 尽管也可以构造一个心电图函数的近似公式，但很少这样做. 这种重复出现的图形正是医生需要了解的. 从图像上可以看出，每个心电图都把一个显示电流活动的函数表示为一个相对于时间的函数.

图 1 - 1

图像法的特点是形象直观，富有启发性，一目了然.

3. 公式法(解析法)

公式法是把一个函数通过指明运算的数学式子表示出来，依照它，从自变量的值可以计算出因变量的对应值. 其特点是精确、完整，便于理论上分析研究.

公式法包含的一类函数，称为**分段函数**，它是一个在其定义域的不同部分用不同数学表达式表示的函数. 注意分段函数不是由几个函数组成，而是一个函数.

下面我们介绍几个常用的函数.

例 6 取整函数

$$y=[x],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其图像如图 1 - 2 所示. 如 $[4]=4$，$[4.15]=4$，$[-4.5]=-5$，$[\sqrt{2}]=1$. 由取整函数定义，不难看出，取整函数有如下性质：$[x]\leqslant x<[x]+1$.

例 7 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其图像如图 1 - 3 所示.

例 8 狄利克雷(Dirichlet)函数

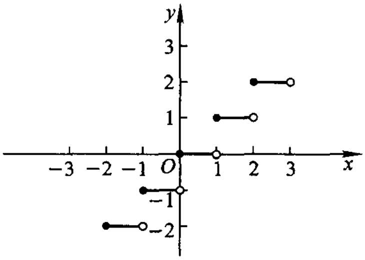

图 1－2

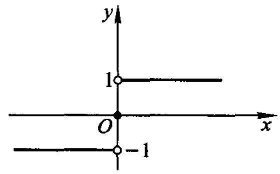

图 1－3

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

这个函数定义在整个数轴上，把定义域全体实数分成两类，有理数的函数值为1，无理数的函数值为0，但无法画出它的图像.

四、复合函数

变量间的依赖关系有时是错综复杂的，表现之一是锁链式的依赖关系，即y依赖于u，u依赖于x，等等，这种关系在数学上就抽象为复合函数的概念.

定义 1.2 设 $y=f(u)$，$u\in E$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$. 若 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$，则$y$通过$u$构成$x$的函数，称为由$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称为**复合函数**，记作 $y=f(\varphi(x))$.

复合函数的定义域为$\{x:\ x\in D \text{ 且 } \varphi(x)\in E\}$，其中$x$称为自变量，$y$称为因变量，$u$称为中间变量，$\varphi(x)$称为内函数，$f(u)$称为外函数. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，则复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

若判断两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$能不能构成复合函数，只要看 $y=f(\varphi(x))$的定义域是否为非空集. 若不为空集，则能构成复合函数，否则就不能构成复合函数.

今后，我们要学会分析复合函数的复合结构，既要会把几个函数复合成一个复合函数，又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合.

五、反函数

函数 $y=f(x)$表示了y依赖于x的对应规律，x是自变量，y是因变量. 如果反过来，让y独立变化，考察x如何依赖于y而变化，这就引出了反函数的概念.

定义 1.3 设 $y=f(x)$，$x\in D$. 若对$R(f)$中每一个y，都有唯一确定且满足$y=f(x)$的$x\in D$与之对应，则按此对应法则就能得到一个定义在$R(f)$上的

函数，称这个函数为f的**反函数**，记作

$$f^{-1}:R(f)\to D \quad 或 \quad x=f^{-1}(y),\ y\in R(f).$$

由于习惯上用x表示自变量，y表示因变量，所以常把上述反函数改写成

$$y=f^{-1}(x),\ x\in R(f).$$

由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原来函数的值域，值域是原来函数的定义域. 注意函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图象相同，函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$图象关于直线$y=x$对称.

例如，按习惯记法，函数$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$是$y=a^x(a>0,a\neq 1)$的反函数，$y=\arcsin x$是$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数.

六、初等函数

在中学数学课程中，我们已经熟悉了以下几类函数：

常值函数　$y=C$（C是常数），$x\in\mathbf{R}$；

幂函数　$y=x^a$（a为幂常数），该函数的定义域由常数a确定，且总包含区间$(0,+\infty)$；

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1)$，$x\in\mathbf{R}$；

对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$；

三角函数　$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$；$y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$；

$y=\tan x$，$x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$；

$y=\cot x$，$x\in(k\pi,k\pi+\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$；$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$；

$y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$；$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in\mathbf{R}$.

以上六类函数，我们统称为**基本初等函数**，它们的图形及性质，见附录Ⅰ，请读者一定要记住，今后我们经常要用到基本初等函数的图像与性质. 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为**初等函数**.

例如，多项式函数

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ x\in\mathbf{R}$$

是常值函数与正整数幂函数经过有限次四则运算得到的. 有理（分式）函数

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

（$P_n(x)$，$Q_m(x)$分别为n次和m次多项式函数）的定义域是$\mathbf{R}$中剔除使$Q_m(x)=0$的根的数集.