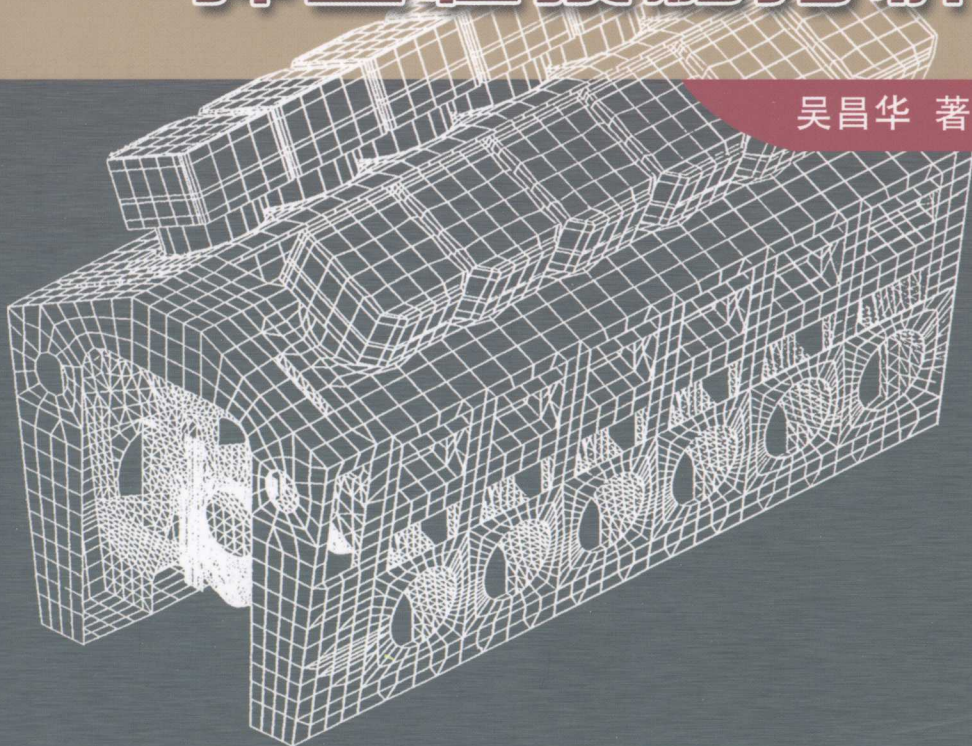


JICHE YU CHAIYOUJI TANSUXING JIECHU FENXI



机车与柴油机 弹塑性接触分析

吴昌华 著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

铁路科技图书出版基金资助出版

机车与柴油机弹塑性接触分析

吴昌华 著

**Elasto-Plastic Contact Analysis of
Locomotive and Diesel Engine**

Wu Changhua

中国铁道出版社

2007年·北京

内 容 简 介

本书根据参变量变分原理和由其导出的有限元参数二次规划法,采用多层多支的子结构技术,对柴油机的曲轴、连杆、活塞、气缸盖、机体、气缸套,增压器的压气机、涡轮机和机车的牵引齿轮、车体、轮轴以及轮轨关系等各种非线性结构分析问题进行了深入的探讨,并列举了大量的工程计算实例,详细阐述了对上述零部件计算时模型的建立、作用载荷的施加和边界条件的处理等计算分析的基本问题,对某些零部件还给出了结构的设计原则。

本书可供从事柴油机、机车车辆、轮轨关系、透平机械、空气压缩机、机械传动等领域产品设计和分析工作的科研工作者、工程技术人员以及高等院校相关专业师生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

机车与柴油机弹塑性接触分析/吴昌华著. —北京:
中国铁道出版社, 2007. 5
ISBN 978-7-113-07948-2

I. 机… II. 吴… III. ①机车-弹塑性接触-分析
②柴油机-弹塑性接触-分析 IV. U267 TK42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 074026 号

书 名: 机车与柴油机弹塑性接触分析

作 者: 吴昌华 著

出版发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市宣武区右安门西街 8 号)

责任编辑: 聂清立

封面设计: 薛小卉

印 刷: 北京盛兰兄弟印装有限公司

开 本: 880×1230 1/32 印张: 11.125 字数: 328 千

版 本: 2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 1~2 000 册

书 号: ISBN 978-7-113-07948-2/TB·90

定 价: 40.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

编辑部电话: (010)51873138 发行部电话(010)51873124

序

计算、实验、理论共同构成了当代科学的三大支柱。有限元法以及随后的计算机辅助工程(CAE)是 20 世纪应用力学的重大创造。在科学与工程计算多方面产生了深刻影响,在制造业方面也有重大影响,对交通、铁路也不例外。

机车设计,从蒸汽机车算起,已经有 180 多年的历史,就内燃机车和电力机车来说,也有半个多世纪了,机车设计是广义的机械设计,它包括柴油机、增压器、电机、传动系统、走行部分和车体结构等诸多部件的设计,走行部分设计还包括轮轨关系分析,牵涉的面极其广泛,完全突破了传统意义上的机械设计范围。

进行设计离不开力学分析,设计现代化大功率的机车更是如此。然而各种机车部件的结构、作用载荷和边界条件都极复杂,求解析解几乎不可能,只能求助于数值分析。半个多世纪以前,由于计算手段的局限,机车各种部件的数值分析也只能采用各种假设以简化计算。例如,把计算对象简化为梁,用材料力学的方法进行分析。所以当时机车部件的力学计算,无一例外都极其粗糙,对设计基本上没有多少参考价值。那时设计新型机车和部件基本上都采用类比法,从结构形式到重要尺寸都参考前人的设计,局部做一些改动。对于改进的部件,则通过试验进行验证。如果试验结果不理想,则改进设计,重新投料、加工、组装,再一次进行试验,直到试验结果满意为止。所以那时新型机车的设计周期是很长的,成本也相当可观。

电子计算机问世以后,特别是 20 世纪 60 年代有限单元法出现以后,情况发生了根本性的变化。由于计算手段的革命性变革,工程设计中复杂结构的力学分析已经可以实现,计算精度也大为提高。这个情况也影响了机车设计领域,分析的模型开始逐渐接近图纸,计算方法愈来愈先进,精度愈来愈高。再往后,随着计算机科学的发展,计算力学理论和算法的进步愈来愈快,简直是突飞猛进,日新月异。到了 21 世纪,工程设计

中的各种问题,不论是静力的还是动力的,线性的还是非线性的,单一物理问题的还是多种物理问题耦合的,都纷纷开始用数值分析方法进行模拟,以期在方案设计时就能发现问题,予以改进,以缩短试制周期,降低成本。这类分析工作基本上都获得了很好的结果。机车设计自然也不例外,对分析工作愈来愈重视,模型愈来愈逼真,计算愈来愈精细,从而新型机车的试制周期也愈来愈短。

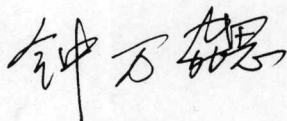
本书作者是 20 世纪 60 年代初从大学毕业到工厂参加机车和柴油机设计、计算工作的,这正是有限单元法产生并开始工程中逐步得到应用的时候。所以作者基本上是从电子计算机在我国开始应用起,就在机车和柴油机各部件力学分析数值计算的第一线工作,是我国从事计算力学工作的第一代。在长期的计算工作中,他自己编程序,做考题,建立模型,准备数据,上机计算,积累了丰富的用计算机算题解决实际问题的经验。这本书就是作者在机车和柴油机领域从事设计、计算工作 40 余年的总结。

从内容来看,这本书至少有 5 个特点。首先,书中对弹塑性接触问题非线性分析所用的理论完全不同于国外的同类分析,它采用参变量变分原理和由其导出的有限元参数二次规划法,而程序实现则采用多层多支的子结构技术。这二者都是我国学者自主创新提出并发展的。其次,书中有些内容,如轮轨关系的弹塑性接触分析等,是该领域的前沿问题,也是当前的热门课题,各国铁路工作者都在竞相进行研究。书中列举的大量有关工程计算实例表明,采用书中提出的计算模型和方法解算这些问题是切实可行的,计算收敛稳定,结果正确,这就为这些问题的求解开辟了一条新的途径。第三,当前国内外出版的关于计算力学和有限元计算的书籍很多,但这些书大多是关于计算力学理论和算法的,即便有一些论述某个领域工程问题的数值计算,也多半是教科书性质的,所举算例往往很简单,离工程实际距离较大。而这本书中所举的大量计算实例都是作者及其团队几十年来解决工程实际问题的经验总结,是极其宝贵的财富。第四,书中对半个世纪以来,机车和柴油机各种部件力学分析模型和计算方法的发展情况,都给出了详细的回顾,并指出了不同时期计算模型的优缺点,是对机车和柴油机各种部件计算模型和方法发展演变的综述。第五,书中在讨论机车和柴油机各种部件计算的模型和方法时,特别是在对柴油机曲轴、连杆、机体和机车车体进行力学分析时,阐述了作者从长期

结构设计工作中总结出的设计原则和经验,这也是极为难能可贵的。

今年我国铁路要实行全面大提速,客车运行速度和货车牵引吨位都将有大幅度提高,今后在高速与重载方面还将进一步与国际接轨,这就对机车车辆的设计提出了更高的要求。机车车辆是机械工程的典型结构之一,希望这本书能在我国机车和柴油机设计,以至整个机械领域设计的现代化方面起到促进作用,推动我国铁路更快地向高速重载方向发展。

中国科学院院士

A handwritten signature in black ink, consisting of three characters: '钟' (Zhong), '万' (Wan), and '松' (Song), written in a cursive style.

2007年3月

前 言

随着我国铁路向高速、重载方向的发展,对机车设计的要求愈来愈高。首先,功率要大,发动机强化程度要高;其次,要确保强度和刚度;第三,动力学性能要好。这些都离不开对结构的精细分析。在半个世纪以前,由于计算手段落后,机车上各种零部件的应力分析计算方法都非常粗糙,要想真正解决强度问题只有通过试验。当时唯一的例外是车体,可以简化为高次超静定结构,用力法求解。但尽管做了各种各样的简化,计算一个车体方案仍至少需要十几个人月,完全不能满足设计的需要。有限单元法的出现使上述情形产生了根本的变化,计算速度大大加快,计算精度大幅度提高,为实现机车及其装置的结构精细分析提供了可能。

任何机器都是由零件装配而成,零部件之间摩擦的接触问题,属于边界非线性的力学范畴。这类问题极其复杂,通常用迭代法求解,但对于三维问题收敛速度有时得不到保证。

20世纪80年代中期,钟万勰院士提出了求解接触问题的参变量变分原理,指出在满足不可穿透条件的前提下,接触问题可以转化成一个二次规划问题。这是一个线性互补问题,可以用成熟的兰姆克(Lemke)算法求解。这就绕过了迭代,从根本上保证了接触问题求解的平稳收敛,确保了计算的高效率。

当前,随着机车的强化程度日益提高,愈来愈多的车上设备有部分零部件产生塑性变形,轮轨关系更是典型的弹塑性接触问题,因此结构的弹塑性分析就提到日程上来。弹塑性问题属于材料非线性的力学范畴,用常规方法求解同样也离不开迭代。参变量变分原理采用与接触问题类似的方法来处理弹塑性问题的本构关系,于是把弹塑性问题的计算也归结为求解一个二次规划问题。这样,接触问题与弹塑性问题这两类在物理上性质完全不同的非线性问题,用一个理论、一套解法、一个计算程序统一了起来,而且用一套数据可以求解,对于弹塑性接触问题的计算更是便捷,极大地方便了工程上的应用。

本书的内容是作者及其团队在 40 多年时间里,从手工计算到后来用有限元法进行电算,特别是从 20 世纪 90 年代中期开始采用由参变量变分原理导出的有限元参数二次规划法,解决机车和柴油机设计中大量实际问题的经验总结。全书共分 7 章,由两部分组成。第一部分就是第 1 章,主要介绍钟万勰院士的参变量变分原理和该理论的有限元实现——有限元参数二次规划法以及求解大规模线性和非线性结构分析问题的多层多支子结构技术。第二部分介绍有限元参数二次规划法和子结构技术在机车和柴油机设计中的应用,包括从第 2 章到第 7 章的全部内容,其中第 2、3 两章论述柴油机主要运动件曲轴、连杆、活塞与连接螺栓(钉)和固定件气缸盖、机体、气缸套作为装配结构计算分析的模型与方法,以及随着计算理论与手段的进步传统计算模型与算法的演变与发展;第 4 章论述增压器转子压气机和涡轮的弹性和弹塑性接触分析;第 5 章论述机车牵引系统齿轮副和轮对的接触分析;第 6 章论述机车各种形式车体半个世纪以来计算模型与计算方法的发展,以及几种车体主要结构形式优缺点的比较;第 7 章主要论述轮轨弹性接触分析和弹塑性接触分析,比较两种计算的不同,并根据计算结果讨论不同踏面形状车轮的力学性能。

本书的研究成果是在铁道部科教司和国家自然科学基金委员会资助下完成的。本书在撰写过程中始终得到了大连理工大学钟万勰院士的支持与关心,得到了大连交通大学交通运输工程学院领导与同事的大力支持。大连交通大学原机械工程研究所的同事们以及作者指导的硕士研究生和博士研究生对本书的研究工作付出了辛勤的劳动,在此向他们致以诚挚的谢意。

本书的出版得到了铁路科技图书出版基金的资助。

由于水平所限,书中错误在所难免,敬请广大读者批评指正。

作者

2007 年 2 月

目 录

1 参变量变分原理	1
1.1 接触分析的参变量变分原理和有限元参数二次规划解	1
1.2 弹塑性分析的参变量变分原理和有限元参数二次规划解	29
1.3 多层多支子结构分析方法	52
2 柴油机运动件的分析	75
2.1 曲轴的分析	75
2.2 连杆的分析	99
2.3 活塞的分析	119
2.4 螺栓(钉)连接件的分析	133
3 柴油机固定件的分析	139
3.1 气缸盖的分析	139
3.2 机体的分析	154
3.3 气缸套的分析	178
4 增压器转子的分析	196
4.1 压气机转子的弹塑性接触分析	196
4.2 涡轮的接触分析	221
5 机车牵引系统的分析	228
5.1 齿轮系统的接触分析	228
5.2 机车轮对的接触分析	241
6 车体的分析	255
6.1 车体的种类、结构形式和基本特点	255
6.2 车体计算的模型	261
6.3 车体的作用载荷、计算工况与边界条件	277
6.4 内走廊式车体计算工程实例	286
6.5 外走廊式车体计算工程实例	291
7 轮轨关系的分析	297

7.1 轮轨弹性接触分析	298
7.2 轮轨弹塑性接触分析	312
7.3 磨损形踏面车轮与钢轨的弹塑性接触分析	319
7.4 横向力作用下的轮轨接触分析	331
参考文献	339

1	弹塑性接触分析	1
1	弹塑性接触分析	1
65	弹塑性接触分析	3.1
82	弹塑性接触分析	3.1
87	弹塑性接触分析	3
87	弹塑性接触分析	1.3
90	弹塑性接触分析	3.3
119	弹塑性接触分析	3.3
139	弹塑性接触分析	4.3
139	弹塑性接触分析	3
139	弹塑性接触分析	1.3
154	弹塑性接触分析	3.3
157	弹塑性接触分析	3.3
161	弹塑性接触分析	4
190	弹塑性接触分析	1.1
193	弹塑性接触分析	3.3
228	弹塑性接触分析	3
228	弹塑性接触分析	1.3
241	弹塑性接触分析	3.3
255	弹塑性接触分析	4
262	弹塑性接触分析	1.3
261	弹塑性接触分析	3.3
277	弹塑性接触分析	3.3
285	弹塑性接触分析	1.3
291	弹塑性接触分析	3.3
295	弹塑性接触分析	3

Contents

1 Parametric variational principle	1
1.1 Parametric variational principle and FE parametric quadratic programming method in contact analysis	1
1.2 Parametric variational principle and FE parametric quadratic programming method in elasto-plastic analysis	29
1.3 Multi-level and multi-branch substructure analysis method	52
2 Analysis of moving parts in diesel engine	75
2.1 Analysis of crankshaft	75
2.2 Analysis of connecting rod	99
2.3 Analysis of piston	119
2.4 Analysis of bolt parts	133
3 Analysis of stationary parts in diesel engine	139
3.1 Analysis of cylinder head	139
3.2 Analysis of engine block	154
3.3 Analysis of cylinder liner	178
4 Analysis of supercharger rotor	196
4.1 Elasto-plastic contact analysis of compressor rotor	196
4.2 Contact analysis of turbine	221
5 Analysis of locomotive traction system	228
5.1 Contact analysis of gear system	228
5.2 Contact analysis of locomotive wheel set	241
6 Analysis of locomotive body	255
6.1 Categories, structural types and main features of locomotive body	255
6.2 Computational models of locomotive body	261
6.3 Applied loads, computed loadcases and boundary conditions	

of locomotive body	277
6.4 Computational example of locomotive body with inside corridor	286
6.5 Computational example of locomotive body with outside corridor	291
7 Analysis of wheel-rail relation	297
7.1 Elastic contact analysis of wheel-rail	298
7.2 Elasto-plastic contact analysis of wheel-rail	312
7.3 Elasto-plastic contact analysis of worn-tread wheel and rail ...	319
7.4 Contact analysis of wheel-rail under lateral loads	331
References	339

1 参变量变分原理

1.1 接触分析的参变量变分原理和有限元参数二次规划解

1882年赫兹(Hertz)发表的论文《论弹性体的接触》是接触力学的第一篇文献,它宣告了接触力学的诞生。赫兹理论在铁路的轮轨关系、机械工程的齿轮、轴承等领域得到了广泛的应用。

但赫兹理论没有考虑接触体之间的摩擦,而且只适用于接触体之间的接触状态确定的条件。实际上两个物体接触总是有摩擦的,而且在大多数工程接触问题中两个接触体相互接触部分的接触状态通常并不确定。因此一个多世纪以来接触力学一直是力学的一个重要研究方向。但接触问题属于边界待定的非线性问题,分析极其复杂,在现代计算手段出现之前发展非常缓慢。

随着电子计算机的产生,特别是有限单元法的问世,接触问题的研究得到了飞速的发展。首先出现了从数学角度建立刚性体和弹性体单边接触问题的变分原理。接着,以有限元法为基础,接触问题的数值解法迅速发展起来。

迭代法是求解接触问题普遍采用的方法。这个方法是先对载荷作用下接触体的接触区估计初始接触状态,然后进行计算,再根据求得的接触区各节点的位移,修改初始接触状态,重新进行计算,这样一直进行下去,直到收敛。这就是所谓的“试验—误差—迭代”法。

迭代法往往伴随着很大的计算工作量。尽管现在电子计算机的运算速度有了极大的提高,但工作量大终究是个问题,特别是对大型、复杂、带有多个接触区的工程结构的分析,计算耗费是必须考虑的问题。另外,如果接触状态的线性增量不能适应结构变化时,迭代法还可能导致错误解,所以这也限制了迭代法增量的步长。

与发展用迭代法求解接触问题的同时,数学规划法在这方面的应用也得到迅速的发展。数学规划法是基于势能原理或余能原理推导出来的一种方法,因而在理论上是比较严格的。

数学规划法首先用于无摩擦弹性接触问题。它是基于无摩擦接触弹性的互补条件和不可穿透条件,借助现代泛函分析的新概念建立起来的,成熟的数学规划算法保证了解的稳定收敛。随后在有摩擦接触问题领域数学规划法应用的研究也开展起来,并由平面逐渐推广到空间接触问题。

本节将简要介绍接触问题的参变量变分原理的概念及其处理办法以及有限元参数二次规划解法^{[1][2][3]}。

1.1.1 平面弹性接触问题的描述

接触问题是边界待定问题,其接触边界在计算前不能真正确定,所以,以下涉及的接触边界都是指变形后可能发生接触的边界。

设接触体系由 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ 两个物体组成,见图 1.1(a)。一般说,物体的边界可以分为给定外力边界 $S_p^{(a)}$,给定位移边界 $S_u^{(a)}$ 和可能发生接触的边界 $S_c^{(a)}$ 。这里上标 $a=1,2$,为两个接触物体的编号。

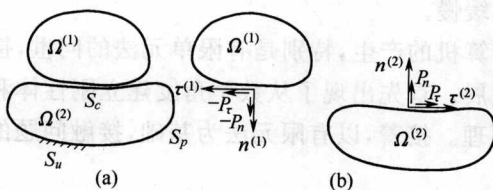


图 1.1 两个物体接触

假设所研究的问题满足如下条件:

- (1) 接触物体是弹性的,且位移和变形很小;
- (2) 接触表面连续;
- (3) 承认库伦(Coulomb)摩擦定律。

另外,两个物体的可能接触边界非常接近,所以可以用公用的 S_c 表征。 S_c 的定义为:两个物体分别有可能接触边界 $S_c^{(1)}$ 和 $S_c^{(2)}$, $S_c^{(1)}$ 与 $S_c^{(2)}$ 上对应的可能接触点之间的连线为公法线,所有公法线中点的连线定义为 S_c ,如图 1.2 所示。根据 S_c 与 $S_c^{(a)}$ 上点的对应关系,可以沿 S_c 来定义 $S_c^{(a)}$ 上点的位移。因此,体系的总边界 S 可以写成

$$S = S_p + S_u + S_c = S_c + \sum_{a=1}^2 (S_p^{(a)} + S_u^{(a)}) \quad (1.1)$$

并且接触边界两侧几乎处处满足

$$n^{(1)} = -n^{(2)}, \tau^{(1)} = -\tau^{(2)} \quad (1.2)$$

式中 $n^{(a)}$ 与 $\tau^{(a)}$ 分别为两物体的外法向单位矢量和切向单位矢量。以下一律以 $n^{(2)}$ 与 $\tau^{(2)}$ 作为边界 S_c 上某一点的局部坐标系, 并记为 n 与 τ , 略去上标, 如图 1.2 所示。

S_c 上某一点的接触力可分解为法向接触力 P_n 和切向接触力 P_τ , 规定这两个接触力与局部坐标系同向为正, 如图 1.1 所示。

设 S_c 上各点的接触力满足库仑摩擦定律, 则

$$|P_\tau| \leq -\bar{\mu} P_n \quad (1.3)$$

式中 $\bar{\mu}$ 为两接触体间的摩擦系数。

两物体接触时, 接触面间的法向力只能受压, 不可能受拉, 所以有

$$P_n \leq 0 \quad (1.4)$$

将 (1.3) 与 (1.4) 合在一起, 可表示为

$$\tilde{f}_1 = P_\tau + \bar{\mu} P_n \leq 0 \quad (1.5)$$

$$\tilde{f}_2 = -P_\tau + \bar{\mu} P_n \leq 0 \quad (1.6)$$

$$\tilde{f}_3 = P_n \leq 0 \quad (1.7)$$

$$\text{也可写成} \quad \tilde{f}_k = \tilde{f}_k(P_\tau, P_n) \leq 0, k=1, 2, 3 \quad (1.8)$$

这里“~”用来标记接触物体的量。

$\tilde{f}_k$ 可以用解析几何方法画成如图 1.3 所示的接触力空间:

当 $\tilde{f}_1 = 0$ 时, 由 (1.5) 式可知, $P_\tau + \bar{\mu} P_n = 0$, 这是一条直线, 位于第 II 象限;

当 $\tilde{f}_2 = 0$ 时, 由 (1.6) 式可知, $-P_\tau + \bar{\mu} P_n = 0$, 这也是一条直线, 但位于第 III 象限;

当 $\tilde{f}_3 = 0$ 时, 由 (1.7) 式可知, $P_n = 0$, 这是纵坐标轴。

当 $\tilde{f}_k < 0$ 时 ($k=1, 2, 3$), 接触力状态点位于 $\tilde{f}_k = 0$ 三条直线所围区

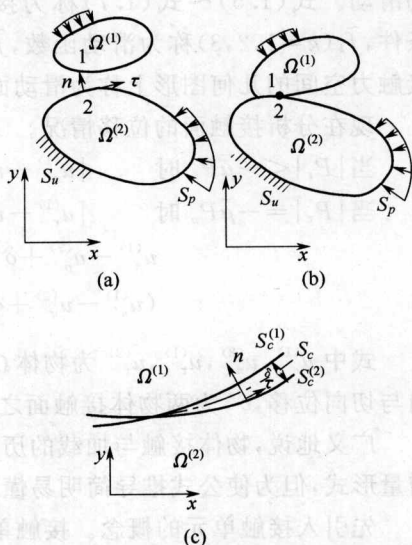


图 1.2 确定接触边界

域之内,发生了接触,但未滑动。当 $\tilde{f}_k = 0$ 时,接触力状态点位于区域边界上,接触物体发生相对滑动 ($\tilde{f}_1 = 0$ 或 $\tilde{f}_2 = 0$) 或脱开 ($\tilde{f}_3 = 0$)。在这里, $\tilde{f}_3 = 0$ 时的脱开称作广义的滑动。式 (1.5) ~ 式 (1.7) 称为接触滑动条件, $\tilde{f}_k (k=1, 2, 3)$ 称为滑动函数, $\tilde{f}_k = 0$ 在接触力空间的几何图形上称为滑动面。

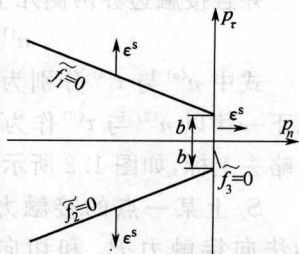


图 1.3 接触力空间

现在分析接触面的位移情况。

$$\text{当 } |P_\tau| < -\bar{\mu}P_n \text{ 时 } |u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}| = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{当 } |P_\tau| = -\bar{\mu}P_n \text{ 时 } |u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}| > 0 \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \delta^* &\geq 0, P_n \leq 0 \\ (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \delta^*) \cdot P_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

式中 $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, u_\tau^{(1)}, u_\tau^{(2)}$ 为物体 $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ 相对接触点局部坐标系的法向与切向位移, δ^* 为两物体接触面之间的初始间隙。

广义地说,物体接触与加载的历史有关,因而其公式推导过程应采用增量形式,但为使公式推导简明易懂,在这里仍采用一步法进行讨论。

先引入接触单元的概念。接触单元定义为在接触面上由两个接触体分别各取一个节点的连线构成的单元,接触单元与二节点间的公法线重合,且占有接触平面内一个单位边界宽度。尽管接触单元只有两个节点,但假设它有法向和切向两根弹簧(见图 1.4),且具有刚度

$$D_c = \begin{bmatrix} E_\tau & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

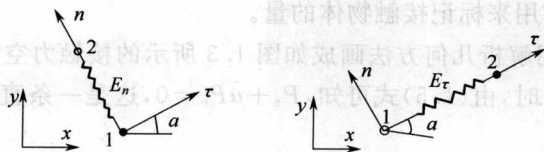


图 1.4 接触单元

局部坐标系下的接触点相对位移用 ϵ_c 表示。

$$\epsilon_c = [\epsilon_\tau, \epsilon_n]^T \quad (1.13)$$

$$\text{式中 } \epsilon_\tau = u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)} = \Delta u_\tau \quad (1.14)$$

$$\epsilon_n = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \delta^* = \Delta u_n + \delta^* \quad (1.15)$$

由于讨论的是弹性接触问题,接触单元的本构关系为

$$P_c = D_c \cdot \epsilon_c^e \quad (1.16)$$

在这里,为了与后面的弹塑性分析相对比,把接触相对位移分解成两部分,一部分是弹性相对位移 ϵ_c^e ,即发生接触但未达到滑动时的相对位移,另一部分是滑动相对位移 ϵ_c^p ,即

$$\epsilon_c = \epsilon_c^e + \epsilon_c^p \quad (1.17)$$

代入(1.16)式,得

$$P_c = D_c (\epsilon_c - \epsilon_c^p) \quad (1.18)$$

由图 1.3 可见,当接触力状态点落到滑动面上时,接触力达到极限状态,这时将发生滑动相对位移。

当接触力状态点落在 $\tilde{f}_1=0$ 或 $\tilde{f}_2=0$ 上时,切向摩擦力达到临界值,接触体之间可能发生沿接触面切向的滑动,但不会脱开,即 $\epsilon_n^p=0$ 。将对应 $\tilde{f}_1=0$ 面上的滑动量定义为 $\tilde{\lambda}_1$,对应 $\tilde{f}_2=0$ 面上的滑动量定义为 $-\tilde{\lambda}_2$,显然应有 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \geq 0$ 。

当接触力状态点落在 $\tilde{f}_3=0$ 上时, $P_n = P_\tau = 0$,接触点相互脱开, $\epsilon_n^p \geq 0$,沿接触面切向的移动没有制约。将脱离量定义为 $\tilde{\lambda}_3$,显然 $\tilde{\lambda}_3 \geq 0$ 。

如果与 $\tilde{f}_k, k=1,2,3$ 对应地定义滑动势函数

$$\tilde{g}_1 = P_\tau + C_0 \quad (1.19)$$

$$\tilde{g}_2 = -P_\tau + C_0 \quad (1.20)$$

$$\tilde{g}_3 = P_n \quad (1.21)$$

式中 C_0 为任意常数,则滑动相对位移可表示为

$$\epsilon_c^p = \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_c} \right)^T \tilde{\lambda} \quad (1.22)$$

$$\text{或 } \epsilon_c^p = \sum_{k=1}^3 \tilde{\lambda}_k \cdot \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial P_c} \quad (1.22a)$$

$$\text{式中 } \tilde{g} = [\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3]^T \quad (1.23)$$

$$\tilde{\lambda} = [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]^T \quad (1.24)$$

$$P_c = [P_\tau, P_n]^T \quad (1.25)$$