

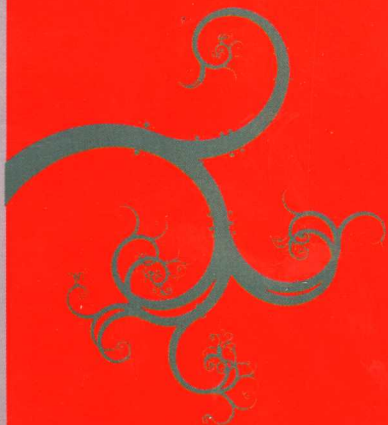


按新课标模块编写的最新数学竞赛教材

张利民 主编

高一分册

高中数学竞赛 标准教材



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛标准教材

(高一分册)

主 编 张利民 副 主 编 孙秀英

编 委 孙秀英 孙香荣 曲广鑫 张利民
李国辉 杨光慧 贾桂华 阚志学

- 赛点提炼
- 赛题探究
- 赛场训练



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛标准教材. 高一分册/张利民主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2007. 6

ISBN 978 - 7 - 308 - 05370 - 9

I. 高... II. 张... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082238 号

高中数学竞赛标准教材(高一分册)

主 编 张利民

责任编辑 杨晓鸣 夏晓冬

责任校对 夏晓冬

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 10

印 数 8001—14000

字 数 250 千

版 印 次 2007 年 7 月第 1 版 2007 年 9 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 308 - 05370 - 9

定 价 13.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前 言

关于高中数学怎样学,说法很多.有人说难题不用做,把基础搞好就可以;有人说买高考母题肯定能考好;有人说数学就是反复做题,做到考试前把能考的题都已经做到了,就学好了.我认为,数学水平能否体现在高考和竞赛的成绩上,终究还取决于解题能力的高低.光做容易题就像和臭棋篓子下棋,水平不可能提高;光做难题不善于提炼方法,水平也不会提高;而押题就像在赌博,听天由命.要学好数学,必须学习解题,首先要在解题中学解题,因此要做好题,精做题.做好题是本书写作的目标,精做题则要求解题后的反思和总结,多提一些诸如“解法是否有普遍意义?有无更好的解法?定理或方法还有哪些变形?这类问题还有哪些解法?这种方法还有哪些应用?”等问题.在解题中提炼方法,做到站在竞赛的水平看高考;同时立足基础,驾轻就熟,以不变应万变来应对比赛;培养不畏艰险,勇往直前的科学精神.这是我认为学好数学应具备的心态.

写本书之前,笔者在高中执教数学11年,起初按高考要求教了4年,接下来讲了4年奥林匹克数学,接着又按高考要求从高一到高三教了一轮,这些年一直在为高考、竞赛而解题,逐渐积累了一些方法和题目.2007年年初在杭州与老朋友包善贤老师、新朋友杨晓鸣副总编相遇,在两位的推动下有了写本书的想法,在此对两位的支持和帮助表示感谢.

张利民

2007年5月

目 录

第一章 集合

一、基础知识	1
二、方法与例题	2
三、基础训练题	5
四、高考水平训练题	5
五、联赛一试水平训练题	6
六、联赛二试水平训练题	7

第二章 二次函数与命题

一、基础知识	8
二、方法与例题	9
三、基础训练题	12
四、高考水平训练题	13
五、联赛一试水平训练题	13
六、联赛二试水平训练题	14

第三章 函数

一、基础知识	15
二、方法与例题	16
三、基础训练题	18
四、高考水平训练题	19
五、联赛一试水平训练题	20
六、联赛二试水平训练题	21

第四章 几个初等函数的性质

一、基础知识	22
二、方法与例题	22
三、基础训练题	25
四、高考水平训练题	25
五、联赛一试水平训练题	26
六、联赛二试水平训练题	27

第五章 数列

一、基础知识	28
--------------	----

二、方法与例题	29
三、基础训练题	32
四、高考水平训练题	33
五、联赛一试水平训练题	34
六、联赛二试水平训练题	35

第六章 三角函数

一、基础知识	36
二、方法与例题	38
三、基础训练题	43
四、高考水平训练题	44
五、联赛一试水平训练题(一)	44
联赛一试水平训练题(二)	45
六、联赛二试水平训练题	46

第七章 解三角形

一、基础知识	47
二、方法与例题	48
三、基础训练题	50
四、高考水平训练题	50
五、联赛一试水平训练题	51
六、联赛二试水平训练题	52

第八章 平面向量

一、基础知识	53
二、方法与例题	54
三、基础训练题	56
四、高考水平训练题	57
五、联赛一试水平训练题	58
六、联赛二试水平训练题	58

第九章 不等式

一、基础知识	60
二、方法与例题	60
三、基础训练题	66
四、高考水平训练题	67
五、联赛一试水平训练题	68
六、联赛二试水平训练题	68

参考答案	70
------------	----

第一章 集 合

一、基础知识

定义 1 一般地,一组确定的、互异的、无序的对象全体构成集合,简称集,用大写字母来表示;集合中的各个对象称为元素,用小写字母来表示.元素 x 在集合 A 中,称 x 属于 A ,记为 $x \in A$,否则称 x 不属于 A ,记作 $x \notin A$.例如,通常用 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}^+$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、正有理数集.不含任何元素的集合称为空集,用 \emptyset 来表示.集合分有限集和无限集两种.

集合的表示方法有列举法:将集合中的元素一一列举出来写在大括号内并用逗号隔开表示集合的方法,如 $\{1, 2, 3\}$;描述法:将集合中的元素的属性写在大括号内表示集合的方法.例如 $\{\text{有理数}\}, \{x | x > 0\}$ 分别表示有理数集和正实数集.

定义 2 子集:对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,则 A 叫做 B 的子集,记为 $A \subseteq B$,例如 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.规定空集是任何集合的子集.如果 A 是 B 的子集, B 也是 A 的子集,则称 A 与 B 相等.如果 A 是 B 的子集,而且 B 中存在元素不属于 A ,则 A 叫 B 的真子集.

定义 3 交集, $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

定义 4 并集, $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

定义 5 补集,若 $A \subseteq I$,则 $\complement_I A = \{x | x \in I, \text{ 且 } x \notin A\}$ 称为 A 在 I 中的补集.

定义 6 差集, $A \setminus B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$.

定义 7 集合 $\{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}, a < b\}$ 记作开区间 (a, b) ,集合 $\{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}, a < b\}$ 记作闭区间 $[a, b]$, \mathbf{R} 记作 $(-\infty, +\infty)$.

定理 1 集合的性质:对任意集合 A, B, C ,有:

$$(1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); (2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$(3) \complement_I A \cup \complement_I B = \complement_I (A \cap B); (4) \complement_I A \cap \complement_I B = \complement_I (A \cup B).$$

【证明】 这里仅证(1)、(3),其余由读者自己完成.

(1) 若 $x \in A \cap (B \cup C)$,则 $x \in A$,且 $x \in B$ 或 $x \in C$,所以 $x \in (A \cap B)$ 或 $x \in (A \cap C)$,即 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$;反之, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in A$ 且 $x \in C$,即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$,即 $x \in A \cap (B \cup C)$.

(3) 若 $x \in \complement_I A \cup \complement_I B$,则 $x \in \complement_I A$ 或 $x \in \complement_I B$,所以 $x \notin A$ 或 $x \notin B$,所以 $x \notin (A \cap B)$,又 $x \in I$,所以 $x \in \complement_I (A \cap B)$,即 $\complement_I A \cup \complement_I B \subseteq \complement_I (A \cap B)$,反之也有 $\complement_I (A \cap B) \subseteq \complement_I A \cup \complement_I B$.

定理 2 加法原理:做一件事有 n 类办法,第一类办法中有 m_1 种不同的方法,第二类办法中有 m_2 种不同的方法, ..., 第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事一共有

$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

定理 3 乘法原理: 做一件事分 n 个步骤, 第一步有 m_1 种不同的方法, 第二步有 m_2 种不同的方法, \cdots , 第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事一共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法.

二、方法与例题

1. 利用集合中元素的属性, 检验元素是否属于集合.

例 1 设 $M = \{a \mid a = x^2 - y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 求证:

(1) $2k - 1 \in M, (k \in \mathbf{Z})$;

(2) $4k - 2 \notin M, (k \in \mathbf{Z})$;

(3) 若 $p \in M, q \in M$, 则 $pq \in M$.

【证明】 (1) 因为 $k, k - 1 \in \mathbf{Z}$, 且 $2k - 1 = k^2 - (k - 1)^2$, 所以 $2k - 1 \in M$.

(2) 假设 $4k - 2 \in M (k \in \mathbf{Z})$, 则存在 $x, y \in \mathbf{Z}$, 使 $4k - 2 = x^2 - y^2$, 由于 $x - y$ 和 $x + y$ 有相同的奇偶性, 所以 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ 是奇数或 4 的倍数, 不可能等于 $4k - 2$, 假设不成立, 所以 $4k - 2 \notin M$.

(3) 设 $p = x^2 - y^2, q = a^2 - b^2, x, y, a, b \in \mathbf{Z}$, 则

$$\begin{aligned} pq &= (x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = x^2 a^2 + y^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2 \\ &= (xa - yb)^2 - (xb - ya)^2 \in M \text{ (因为 } xa - yb \in \mathbf{Z}, xb - ya \in \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

2. 利用子集的定义证明集合相等. 先证 $A \subseteq B$, 再证 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

例 2 设 A, B 是两个集合, 又设集合 M 满足 $A \cap M = B \cap M = A \cap B, A \cup B \cup M = A \cup B$, 求集合 M (用 A, B 表示).

【解】 先证 $(A \cap B) \subseteq M$, 若 $x \in (A \cap B)$, 因为 $A \cap M = A \cap B$, 所以 $x \in A \cap M, x \in M$, 所以 $(A \cap B) \subseteq M$;

再证 $M \subseteq (A \cap B)$, 若 $x \in M$, 则 $x \in A \cup B \cup M = A \cup B$. 1) 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cap M = A \cap B$; 2) 若 $x \in B$, 则 $x \in B \cap M = A \cap B$. 所以 $M \subseteq (A \cap B)$.

综上, $M = A \cap B$.

3. 分类讨论思想的应用.

例 3 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}, C = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A, A \cap C = C$, 求 a, m .

【解】 依题设, $A = \{1, 2\}$, 再由 $x^2 - ax + a - 1 = 0$ 解得 $x = a - 1$ 或 $x = 1$,

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $a - 1 \in A$, 所以 $a - 1 = 1$ 或 2 , 所以 $a = 2$ 或 3 .

因为 $A \cap C = C$, 所以 $C \subseteq A$, 若 $C = \emptyset$, 则 $\Delta = m^2 - 8 < 0$, 即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$, 若 $C \neq \emptyset$, 则 $1 \in C$ 或 $2 \in C$, 解得 $m = 3$.

综上所述, $a = 2$ 或 $a = 3; m = 3$ 或 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

4. 计数原理的应用.

例 4 集合 A, B, C 是 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ 的子集, (1) 若 $A \cup B = I$, 求有序集对 (A, B) 的个数; (2) 求 I 的非空真子集的个数.

【解】 (1) 集合 I 可划分为三个不相交的子集: $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$, I 中的每个元素恰属

于其中一个子集,10个元素共有 3^{10} 种可能,每一种可能确定一个满足条件的集合对,所以集合对有 3^{10} 个.

(2) I 的子集分三类:空集,非空真子集,集合 I 本身,确定一个子集分十步,第一步,1或者属于该子集或者不属于,有两种;第二步,2也有两种,……,第10步,0也有两种,由乘法原理,子集共有 $2^{10}=1024$ 个,非空真子集有1022个.

5. 配对方法.

例5 给定集合 $I=\{1,2,3,\dots,n\}$ 的 k 个子集: A_1, A_2, \dots, A_k ,满足任何两个子集的交集非空,并且再添加 I 的任何一个其他子集后将不再具有该性质.求 k 的值.

【解】 将 I 的子集作如下配对:每个子集和它的补集为一对,共得 2^{n-1} 对,每一对不能同在这 k 个子集中,因此, $k \leq 2^{n-1}$;其次,每一对中必有一个在这 k 个子集中出现,否则,若有一对子集未出现,设为 $\complement_I A$ 与 A ,并设 $A \cap A_1 = \emptyset$,则 $A_1 \subseteq \complement_I A$,从而可以在 k 个子集中再添上 $\complement_I A$,与已知矛盾,所以 $k \geq 2^{n-1}$.综上, $k = 2^{n-1}$.

6. 竞赛常用方法与例题.

定理4 容斥原理:用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数,则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.此结论可以推广到 n 个集合的情况,即 $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^n A_i|$.

定义8 集合的划分:若 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = I$,且 $A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$,则这些子集的全体叫 I 的一个 n -划分.

定理5 最小数原理:自然数集的任何非空子集必有最小数.

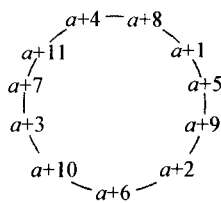
定理6 抽屉原理:将 $mn+1$ 个元素放入 $n(n>1)$ 个抽屉,必有一个抽屉放有不少于 $m+1$ 个元素,也必有一个抽屉放有不多于 m 个元素;将无穷多个元素放入 n 个抽屉必有一个抽屉放有无穷多个元素.

例6 求 $1,2,3,\dots,100$ 中不能被 $2,3,5$ 整除的数的个数.

【解】 记 $I=\{1,2,3,\dots,100\}$, $A=\{x|1 \leq x \leq 100, \text{且} x \text{能被} 2 \text{整除(记为} 2|x)\}$, $B=\{x|1 \leq x \leq 100, 3|x\}$, $C=\{x|1 \leq x \leq 100, 5|x\}$,由容斥原理, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| = \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] - \left[\frac{100}{10} \right] - \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{30} \right] = 74$,所以不能被 $2,3,5$ 整除的数有 $|I| - |A \cup B \cup C| = 26$ 个.

例7 S 是集合 $\{1,2,\dots,2004\}$ 的子集, S 中的任意两个数的差不等于4或7,问 S 中最多含有多少个元素?

【解】 将任意连续的11个整数排成一圈如右图所示.由题目条件可知每相邻两个数至多有一个属于 S ,将这11个数按连续两个为一组,分成6组,其中一组只有一个数.若 S 含有这11个数中至少6个数,则必有两个数在同一组,与已知矛盾,所以 S 至多含有其中5个数.又因为 $2004 = 182 \times 11 + 2$,所以 S 一共至多含有 $182 \times 5 + 2 = 912$ 个元素.另一方面,当 $S = \{r | r = 11k + t, t = 1, 2, 4, 7, 10, r \leq$



2004, $k \in \mathbf{N}$ 时, 恰有 $|S| = 912$, 且 S 满足题目条件, 所以最少含有 912 个元素.

例 8 求所有自然数 $n(n \geq 2)$, 使得存在实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足:

$$\{|a_i - a_j| \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}.$$

【解】 当 $n=2$ 时, $a_1=0, a_2=1$; 当 $n=3$ 时, $a_1=0, a_2=1, a_3=3$; 当 $n=4$ 时, $a_1=0, a_2=2, a_3=5, a_4=1$. 下证当 $n \geq 5$ 时, 不存在 a_1, a_2, \dots, a_n 满足条件.

$$\text{令 } 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_n, \text{ 则 } a_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

所以必存在某两个下标 $i < j$, 使得 $|a_i - a_j| = a_n - 1$, 所以 $a_n - 1 = a_{n-1} - a_1 = a_{n-1}$ 或 $a_n - 1 = a_n - a_2$, 即 $a_2 = 1$, 所以 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}, a_{n-1} = a_n - 1$ 或 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}, a_2 = 1$.

(i) 若 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}, a_{n-1} = a_n - 1$, 考虑 $a_n - 2$, 有 $a_n - 2 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 2 = a_n - a_2$, 即 $a_2 = 2$, 设 $a_{n-2} = a_n - 2$, 则 $a_{n-1} - a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$, 导致矛盾, 故只有 $a_2 = 2$.

考虑 $a_n - 3$, 有 $a_n - 3 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 3 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 3$, 设 $a_{n-2} = a_n - 3$, 则 $a_{n-1} - a_{n-2} = 2 = a_2 - a_1$, 推出矛盾. 设 $a_3 = 3$, 则 $a_n - a_{n-1} = 1 = a_3 - a_2$, 又推出矛盾, 所以 $a_{n-2} = a_2, n=4$, 故当 $n \geq 5$ 时, 不存在满足条件的实数.

(ii) 若 $a_n = \frac{n(n-1)}{2}, a_2 = 1$, 考虑 $a_n - 2$, 有 $a_n - 2 = a_{n-1}$ 或 $a_n - 2 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 2$, 这时 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$, 推出矛盾, 故 $a_{n-1} = a_n - 2$. 考虑 $a_n - 3$, 有 $a_n - 3 = a_{n-2}$ 或 $a_n - 3 = a_n - a_3$, 即 $a_3 = 3$, 于是 $a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1}$, 矛盾. 因此 $a_{n-2} = a_n - 3$, 所以 $a_{n-1} - a_{n-2} = 1 = a_2 - a_1$, 这又矛盾, 所以只有 $a_{n-2} = a_2$, 所以 $n=4$. 故当 $n \geq 5$ 时, 不存在满足条件的实数.

例 9 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{7, 8, 9, \dots, n\}$, 在 A 中取三个数, B 中取两个数组成五个元素的集合 $A_i, i=1, 2, \dots, 20, |A_i \cap A_j| \leq 2, 1 \leq i < j \leq 20$. 求 n 的最小值.

【解】 $n_{\min} = 16$.

设 B 中每个数在所有 A_i 中最多重复出现 k 次, 则必有 $k \leq 4$. 若不然, 数 m 出现 k 次 ($k > 4$), 则 $3k > 12$. 在 m 出现的所有 A_i 中, 至少有一个 A 中的数出现 3 次, 不妨设它是 1, 就有集合 $\{1, a_1, a_2, m, b_1\}, \{1, a_3, a_4, m, b_2\}, \{1, a_5, a_6, m, b_3\}$, 其中 $a_i \in A, 1 \leq i \leq 6$, 为满足题意的集合. a_i 必各不相同, 但只能是 2, 3, 4, 5, 6 这 5 个数, 这不可能, 所以 $k \leq 4$.

20 个 A_i 中, B 中的数有 40 个, 因此至少是 10 个不同的, 所以 $n \geq 16$. 当 $n=16$ 时, 如下 20 个集合满足要求:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 7, 8\}, & \{1, 2, 4, 12, 14\}, & \{1, 2, 5, 15, 16\}, & \{1, 2, 6, 9, 10\}, \\ & \{1, 3, 4, 10, 11\}, & \{1, 3, 5, 13, 14\}, & \{1, 3, 6, 12, 15\}, & \{1, 4, 5, 7, 9\}, \\ & \{1, 4, 6, 13, 16\}, & \{1, 5, 6, 8, 11\}, & \{2, 3, 4, 13, 15\}, & \{2, 3, 5, 9, 11\}, \\ & \{2, 3, 6, 14, 16\}, & \{2, 4, 5, 8, 10\}, & \{2, 4, 6, 7, 11\}, & \{2, 5, 6, 12, 13\}, \\ & \{3, 4, 5, 12, 16\}, & \{3, 4, 6, 8, 9\}, & \{3, 5, 6, 7, 10\}, & \{4, 5, 6, 14, 15\}. \end{aligned}$$

例 10 集合 $\{1, 2, \dots, 3n\}$ 可以划分成 n 个互不相交的三元集合 $\{x, y, z\}$, 其中 $x+y=3z$, 求满足条件的最小正整数 n .

【解】 设其中第 i 个三元集为 $\{x_i, y_i, z_i\}, i=1, 2, \dots, n$, 则 $1+2+\dots+3n = \sum_{i=1}^n 4z_i$,

所以 $\frac{3n(3n+1)}{2} = 4 \sum_{i=1}^n z_i$. 当 n 为偶数时, 有 $8 \mid 3n$, 所以 $n \geq 8$, 当 n 为奇数时, 有 $8 \mid 3n+1$, 所以 $n \geq 5$, 当 $n=5$ 时, 集合 $\{1, 11, 4\}, \{2, 13, 5\}, \{3, 15, 6\}, \{9, 12, 7\}, \{10, 14, 8\}$ 满足条件, 所以 n 的最小值为 5.

三、基础训练题

1. 给定三元集合 $\{1, x, x^2-x\}$, 则实数 x 的取值范围是_____.
2. 若集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ _____.
3. 集合 $B = \{1, 2, 3\}$ 的非空真子集有_____个.
4. 已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}, N = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则由满足条件的实数 a 组成的集合 $P =$ _____.
5. 已知 $A = \{x \mid x < 2\}, B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则常数 a 的取值范围是_____.
6. 若非空集合 S 满足 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且若 $a \in S$, 则 $6-a \in S$, 那么符合要求的集合 S 有_____个.
7. 集合 $X = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ 与 $Y = \{4k \pm 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是_____.
8. 若集合 $A = \{x, xy, xy-1\}$, 其中 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$ 且 $y \neq 0$, 若 $0 \in A$, 则 A 中元素之和是_____.
9. 集合 $P = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}, M = \{x \mid mx - 1 = 0\}$, 且 $M \subseteq P$, 则满足条件的 m 的值构成的集合为_____.
10. 集合 $A = \{y \mid y = 2x + 1, x \in \mathbf{R}^+\}, B = \{y \mid y = -x^2 + 9, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
11. 已知 S 是由实数构成的集合, 且满足 1) $1 \notin S$; 2) 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$. 如果 $S \neq \emptyset$, S 中至少含有多少个元素? 说明理由.
12. 已知 $A = \{(x, y) \mid y = a|x|\}, B = \{(x, y) \mid y = x + a\}, C = A \cap B$, 又 C 为单元素集合, 求实数 a 的取值范围.

四、高考水平训练题

1. 已知集合 $A = \{x, xy, x+y\}, B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 则 $x =$ _____ $y =$ _____.
2. $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A \subseteq I, B \subseteq I, A \cap B = \{2\}, (\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \{1, 9\}, (\complement_I A) \cap B = \{4, 6, 8\}$, 则 $A \cap (\complement_I B) =$ _____.
3. 已知集合 $A = \{x \mid 10 + 3x - x^2 \geq 0\}, B = \{x \mid m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, 实数 m 的取值范围是_____.
4. 若实数 a 为常数, 且 $a \in A = \left\{x \mid \frac{1}{\sqrt{ax^2 - x + 1}} = 1\right\}$, 则 $a =$ _____.
5. 集合 $M = \{m^2, m+1, -3\}, N = \{m-3, 2m-1, m^2+1\}$, 若 $M \cap N = \{-3\}$, 则 $m =$ _____.
6. 集合 $A = \{a \mid a = 5x + 3, x \in \mathbf{N}_+\}, B = \{b \mid b = 7y + 2, y \in \mathbf{N}_+\}$, 则 $A \cap B$ 中的最小元素

是_____.

7. 集合 $A = \{x-y, x+y, xy\}$, $B = \{x^2+y^2, x^2-y^2, 0\}$, 且 $A=B$, 则 $x+y =$ _____.

8. 已知集合 $A = \{x | \frac{x+1}{2-x} < 0\}$, $B = \{x | px+4 < 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 则 p 的取值范围是 _____.

9. 设集合 $A = \{(x, y) | y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) | 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) | y = kx + b\}$, 问: 是否存在 $k, b \in \mathbf{N}$, 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 并证明你的结论.

10. 集合 A 和 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下列条件的集合 C 的个数: 1) $C \subseteq A \cup B$ 且 C 中含有 3 个元素; 2) $C \cap A \neq \emptyset$.

11. 判断以下命题是否正确: 设 A, B 是平面上两个点集, $C_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, 若对任何 $r \geq 0$, 都有 $C_r \cup A \subseteq C_r \cup B$, 则必有 $A \subseteq B$. 证明你的结论.

五、联赛一试水平训练题

1. 已知集合 $A = \{x | x < 0\}$, $B = \{x | z = \frac{m^2 x - 1}{mx + 1}, x > 2\}$, $B \neq \emptyset$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值范围是_____.

2. 集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n, 2n+1\}$ 的子集 B 满足: 对任意的 $x, y \in B$, $x+y \in B$, 则集合 B 中元素个数的最大值是_____.

3. 已知集合 $P = \{a, aq, aq^2\}$, $Q = \{a, a+d, a+2d\}$, 其中 $a \neq 0$, 且 $a \in \mathbf{R}$, 若 $P=Q$, 则实数 $q =$ _____.

4. 已知集合 $A = \{(x, y) | |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) | |xy| + 1 = |x| + |y|\}$, 若 $A \cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则 $a =$ _____.

5. 集合 $M = \{u | u = 12m + 8n + 4l, m, l, n \in \mathbf{Z}\}$, 集合 $N = \{u | u = 20p + 16q + 12r, p, q, r \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 M 与 N 的关系是_____.

6. 设集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 1995\}$, 集合 A 满足: $A \subseteq M$, 且当 $x \in A$ 时, $15x \in A$, 则 A 中元素最多有_____个.

7. 非空集合 $A = \{x | 2a+1 \leq x \leq 3a-5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是_____.

8. 已知集合 A, B, C (不必相异) 的并集 $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, n\}$, 则满足条件的有序三元组 (A, B, C) 个数是_____.

9. 已知集合 $A = \{(x, y) | ax + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + ay = 1\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, 问: 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 为恰有 2 个元素的集合? 说明理由. 若改为 3 个元素集合, 结论如何?

10. 求集合 B 和 C , 使得 $B \cup C = \{1, 2, \dots, 10\}$, 并且 C 的元素乘积等于 B 的元素和.

11. S 是 Q 的子集且满足: 若 $r \in Q$, 则 $r \in S, -r \in S, r=0$ 恰有一个成立, 并且若 $a \in S, b \in S$, 则 $ab \in S, a+b \in S$, 试确定集合 S .

12. 集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ 的若干个五元子集满足: S 中的任何两个元素至多出现在两个不同的五元子集中, 问: 至多有多少个五元子集?

六、联赛二试水平训练题

1. S_1, S_2, S_3 是三个非空整数集, 已知对于 $1, 2, 3$ 的任意一个排列 i, j, k , 如果 $x \in S_i$, $y \in S_j$, 则 $x - y \in S_k$. 求证: S_1, S_2, S_3 中必有两个相等.

2. 求证: 集合 $\{1, 2, \dots, 1989\}$ 可以划分为 117 个互不相交的子集 $A_i (i=1, 2, \dots, 117)$, 使得 (1) 每个 A_i 恰有 17 个元素; (2) 每个 A_i 中各元素之和相同.

3. 某人写了 n 封信, 同时写了 n 个信封, 然后将信任意装入信封, 问: 每封信都装错的情况有多少种?

4. 设 a_1, a_2, \dots, a_{20} 是 20 个两两不同的整数, 且集合 $\{a_i + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 20\}$ 中有 201 个不同的元素, 求集合 $\{|a_i - a_j| \mid 1 \leq i < j \leq 20\}$ 中不同元素个数的最小可能值.

5. 设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合. 求证: 其中必定有两个人, 他们的公共朋友的个数为偶数.

6. 对于整数 $n \geq 4$, 求出最小的整数 $f(n)$, 使得对于任何正整数 m , 集合 $\{m, m+1, \dots, m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中, 均有至少 3 个两两互质的元素.

7. 设集合 $S = \{1, 2, \dots, 50\}$, 求最小自然数 k , 使 S 的任意一个 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b , 满足 $(a+b) \mid ab$.

8. 集合 $X = \{1, 2, \dots, 6k\}, k \in \mathbf{N}_+$, 试作出 X 的三元子集族 \mathcal{E} , 满足:

(1) X 的任意一个二元子集至少被族 \mathcal{E} 中的一个三元子集包含;

(2) $|\mathcal{E}| = 6k^2$ ($|\mathcal{E}|$ 表示 \mathcal{E} 的元素个数).

9. 设集合 $A = \{1, 2, \dots, m\}$, 求最小的正整数 m , 使得对 A 的任意一个 14-分划 A_1, A_2, \dots, A_{14} , 一定存在某个集合 $A_i (1 \leq i \leq 14)$, 在 A_i 中有两个元素 a 和 b 满足 $b < a \leq \frac{4}{3}b$.

第二章 二次函数与命题

一、基础知识

1. 二次函数: 当 $a \neq 0$ 时, $y = ax^2 + bx + c$ 或 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 称为关于 x 的二次函数, 其对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 另外配方可得 $f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0)$, 其中 $x_0 = -\frac{b}{2a}$, 下同.

2. 二次函数的性质: 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的图象开口向上, 在区间 $(-\infty, x_0]$ 上随自变量 x 增大函数值减小(简称递减), 在 $[x_0, +\infty)$ 上随自变量增大函数值增大(简称递增). 当 $a < 0$ 时, 情况相反.

3. 当 $a > 0$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 即 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \textcircled{1}$ 和不等式 $ax^2 + bx + c > 0 \cdots \textcircled{2}$ 及 $ax^2 + bx + c < 0 \cdots \textcircled{3}$ 与函数 $f(x)$ 的关系如下(记 $\Delta = b^2 - 4ac$).

1) 当 $\Delta > 0$ 时, 方程 $\textcircled{1}$ 有两个不等实根, 设为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 不等式 $\textcircled{2}$ 和不等式 $\textcircled{3}$ 的解集分别是 $\{x | x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$ 和 $\{x | x_1 < x < x_2\}$, 二次函数 $f(x)$ 图象与 x 轴有两个不同的交点, $f(x)$ 还可写成 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程 $\textcircled{1}$ 有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$, 不等式 $\textcircled{2}$ 和不等式 $\textcircled{3}$ 的解集分别是 $\{x | x \neq -\frac{b}{2a}\}$ 和空集 \emptyset . $f(x)$ 的图象与 x 轴有唯一公共点.

3) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $\textcircled{1}$ 无解, 不等式 $\textcircled{2}$ 和不等式 $\textcircled{3}$ 的解集分别是 \mathbf{R} 和 \emptyset . $f(x)$ 图象与 x 轴无公共点.

当 $a < 0$ 时, 请读者自己分析.

4. 二次函数的最值: 若 $a > 0$, 当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取最小值 $f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$, 若 $a < 0$, 则当 $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $f(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$. 对于给定区间 $[m, n]$ 上的二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 当 $x_0 \in [m, n]$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(x_0)$; 当 $x_0 < m$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(m)$; 当 $x_0 > n$ 时, $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上的最小值为 $f(n)$ (以上结论由二次函数图象即可得出).

定义 1 能判断真假的语句叫命题, 如“ $3 > 5$ ”是命题, “萝卜好大”不是命题. 不含逻辑联结词“或”、“且”、“非”的命题叫做简单命题, 由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题.

注 1 “ p 或 q ”复合命题只有当 p, q 同为假命题时为假, 否则为真命题; “ p 且 q ”复合命题只有当 p, q 同时为真命题时为真, 否则为假命题; p 与“非 p ”即“ $\neg p$ ”恰好一真一假.

定义 2 原命题: 若 p 则 q (p 为条件, q 为结论); 逆命题: 若 q 则 p ; 否命题: 若非 p 则非 q ; 逆否命题: 若非 q 则非 p .

注 2 原命题与其逆否命题同真假. 一个命题的逆命题和否命题同真假.

注 3 反证法的理论依据是矛盾的排中律, 而未必是证明原命题的逆否命题.

定义 3 如果命题“若 p 则 q ”为真, 则记为 $p \Rightarrow q$ 否则记作 $p \not\Rightarrow q$. 在命题“若 p 则 q ”中, 如果已知 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件; 如果 $q \Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的必要条件; 如果 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 则称 p 是 q 的充分非必要条件; 如果 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 称为 q 的必要非充分条件; 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.

二、方法与例题

1. 待定系数法.

例 1 设方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的两根是 α, β , 求满足 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha, f(1) = 1$ 的二次函数 $f(x)$.

【解】 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

则由已知 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 相减并整理得 $(\alpha - \beta)[(\alpha + \beta)a + b + 1] = 0$,

因为方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 中 $\Delta \neq 0$,

所以 $\alpha \neq \beta$, 所以 $(\alpha + \beta)a + b + 1 = 0$.

又 $\alpha + \beta = 1$, 所以 $a + b + 1 = 0$.

又因为 $f(1) = a + b + c = 1$,

所以 $c - 1 = 1$, 所以 $c = 2$.

又 $b = -(a + 1)$, 所以 $f(x) = ax^2 - (a + 1)x + 2$.

再由 $f(\alpha) = \beta$ 得 $a\alpha^2 - (a + 1)\alpha + 2 = \beta$,

所以 $a\alpha^2 - a\alpha + 2 = \alpha + \beta = 1$, 所以 $a\alpha^2 - a\alpha + 1 = 0$.

即 $a(\alpha^2 - \alpha + 1) + 1 - a = 0$, 即 $1 - a = 0$,

所以 $a = 1$,

所以 $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. 方程的思想.

例 2 已知 $f(x) = ax^2 - c$ 满足 $-4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

【解】 因为 $-4 \leq f(1) = a - c \leq -1$,

所以 $1 \leq -f(1) = c - a \leq 4$.

又 $-1 \leq f(2) = 4a - c \leq 5, f(3) = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$,

所以 $\frac{8}{3} \times (-1) + \frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{8}{3} \times 5 + \frac{5}{3} \times 4$,

所以 $-1 \leq f(3) \leq 20$.

3. 利用二次函数的性质.

例 3 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$, 若方程 $f(x) = x$ 无实根, 求证: 方程 $f(f(x)) = x$ 也无实根.

【证明】 若 $a > 0$, 因为 $f(x) = x$ 无实根, 所以二次函数 $g(x) = f(x) - x$ 图象与 x 轴无公共点且开口向上, 所以对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - x > 0$ 即 $f(x) > x$, 从而 $f(f(x)) > f(x)$.

所以 $f(f(x)) > x$, 所以方程 $f(f(x)) = x$ 无实根.

注: 请读者思考例 3 的逆命题是否正确.

4. 利用二次函数表达式解题.

例 4 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) = x$ 的两根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$,

(I) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 求证: $x < f(x) < x_1$;

(II) 设函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = x_0$ 对称, 求证: $x_0 < \frac{x_1}{2}$.

【证明】 因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) - x = 0$ 的两根, 所以 $f(x) - x = a(x - x_1)(x - x_2)$. 即 $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + x$.

(I) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $x - x_1 < 0, x - x_2 < 0, a > 0$, 所以 $f(x) > x$.

其次 $f(x) - x_1 = (x - x_1)[a(x - x_2) + 1] = a(x - x_1)\left[x - x_2 + \frac{1}{a}\right] < 0$, 所以 $f(x) < x_1$.

综上, $x < f(x) < x_1$.

(II) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + x = ax^2 + [1 - a(x_1 + x_2)]x + ax_1x_2$,

所以 $x_0 = \frac{a(x_1 + x_2) - 1}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{2a}$,

所以 $x_0 - \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{a}\right) < 0$,

所以 $x_0 < \frac{x_1}{2}$.

5. 构造二次函数解题.

例 5 已知关于 x 的方程 $(ax + 1)^2 = a^2(1 - x^2), a > 1$, 求证: 方程的正根比 1 小, 负根比 -1 大.

【证明】 方程化为 $2a^2x^2 + 2ax + 1 - a^2 = 0$.

构造 $f(x) = 2a^2x^2 + 2ax + 1 - a^2$,

$f(1) = (a + 1)^2 > 0, f(-1) = (a - 1)^2 > 0, f(0) = 1 - a^2 < 0$, 即 $\Delta > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上各有一根.

即方程的正根比 1 小, 负根比 -1 大.

6. 定义在区间上的二次函数的最值.

例 6 当 x 取何值时, 函数 $y = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}$ 取最小值? 求出这个最小值.

【解】 $y = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{5}{(x^2 + 1)^2}$, 令 $\frac{1}{x^2 + 1} = u$, 则 $0 < u \leq 1$.

$y = 5u^2 - u + 1 = 5\left(u - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{19}{20} \geq \frac{19}{20}$,

且当 $u = \frac{1}{10}$ 即 $x = \pm 3$ 时, $y_{\min} = \frac{19}{20}$.

例 7 设变量 x 满足 $x^2 + bx \leq -x (b < -1)$, 并且 $x^2 + bx$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$, 求 b 的值.

【解】 由 $x^2 + bx \leq -x (b < -1)$, 得 $0 \leq x \leq -(b+1)$.

i) $-\frac{b}{2} \leq -(b+1)$, 即 $b \leq -2$ 时, $x^2 + bx$ 的最小值为 $-\frac{b^2}{4}$, $-\frac{b^2}{4} = -\frac{1}{2}$,

所以 $b^2 = 2$, 所以 $b = \pm\sqrt{2}$ (舍去).

ii) $-\frac{b}{2} > -(b+1)$, 即 $b > -2$ 时, $x^2 + bx$ 在 $[0, -(b+1)]$ 上是减函数,

所以 $x^2 + bx$ 的最小值为 $b+1$, $b+1 = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$.

综上, $b = -\frac{3}{2}$.

7. 一元二次不等式问题的解法.

例 8 已知不等式组 $\begin{cases} x^2 - x + a - a^2 < 0 & \text{①} \\ x + 2a > 1 & \text{②} \end{cases}$ 的整数解恰好有两个, 求 a 的取值

范围.

【解】 因为方程 $x^2 - x + a - a^2 = 0$ 的两根为 $x_1 = a, x_2 = 1 - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $x_1 < x_2$. ①的解集为 $a < x < 1 - a$, 由②得 $x > 1 - 2a$.

因为 $1 - 2a \geq 1 - a$, 所以 $a \leq 0$, 所以不等式组无解.

若 $a > 0$, i) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $x_1 < x_2$, ①的解集为 $a < x < 1 - a$.

因为 $0 < a < x < 1 - a < 1$, 所以不等式组无整数解.

ii) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $a = 1 - a$, ①无解.

iii) 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $a > 1 - a$, 由②得 $x > 1 - 2a$,

所以不等式组的解集为 $1 - a < x < a$.

又不等式组的整数解恰有 2 个,

所以 $a - (1 - a) > 1$ 且 $a - (1 - a) \leq 3$,

所以 $1 < a \leq 2$, 并且当 $1 < a \leq 2$ 时, 不等式组恰有两个整数解 0, 1.

综上, a 的取值范围是 $1 < a \leq 2$.

8. 充分性与必要性.

例 9 设实数 A, B, C 使得不等式

$$A(x-y)(x-z) + B(y-z)(y-x) + C(z-x)(z-y) \geq 0 \quad \text{①}$$

对一切实数 x, y, z 都成立, 问 A, B, C 应满足怎样的条件? (要求写出充分必要条件, 而且限定用只涉及 A, B, C 的等式或不等式表示条件)

【解】 充要条件为 $A, B, C \geq 0$ 且 $A^2 + B^2 + C^2 \leq 2(AB + BC + CA)$.

先证必要性, ①可改写为 $A(x-y)^2 - (B-A-C)(y-z)(x-y) + C(y-z)^2 \geq 0 \quad \text{②}$

若 $A=0$, 则由②对一切 $x, y, z \in \mathbf{R}$ 成立, 则只有 $B=C$, 再由①知 $B=C=0$, 若 $A \neq 0$, 则因为②恒成立, 所以 $A > 0, \Delta = (B-A-C)^2(y-z)^2 - 4AC(y-z)^2 \leq 0$ 恒成立, 所以 $(B-$