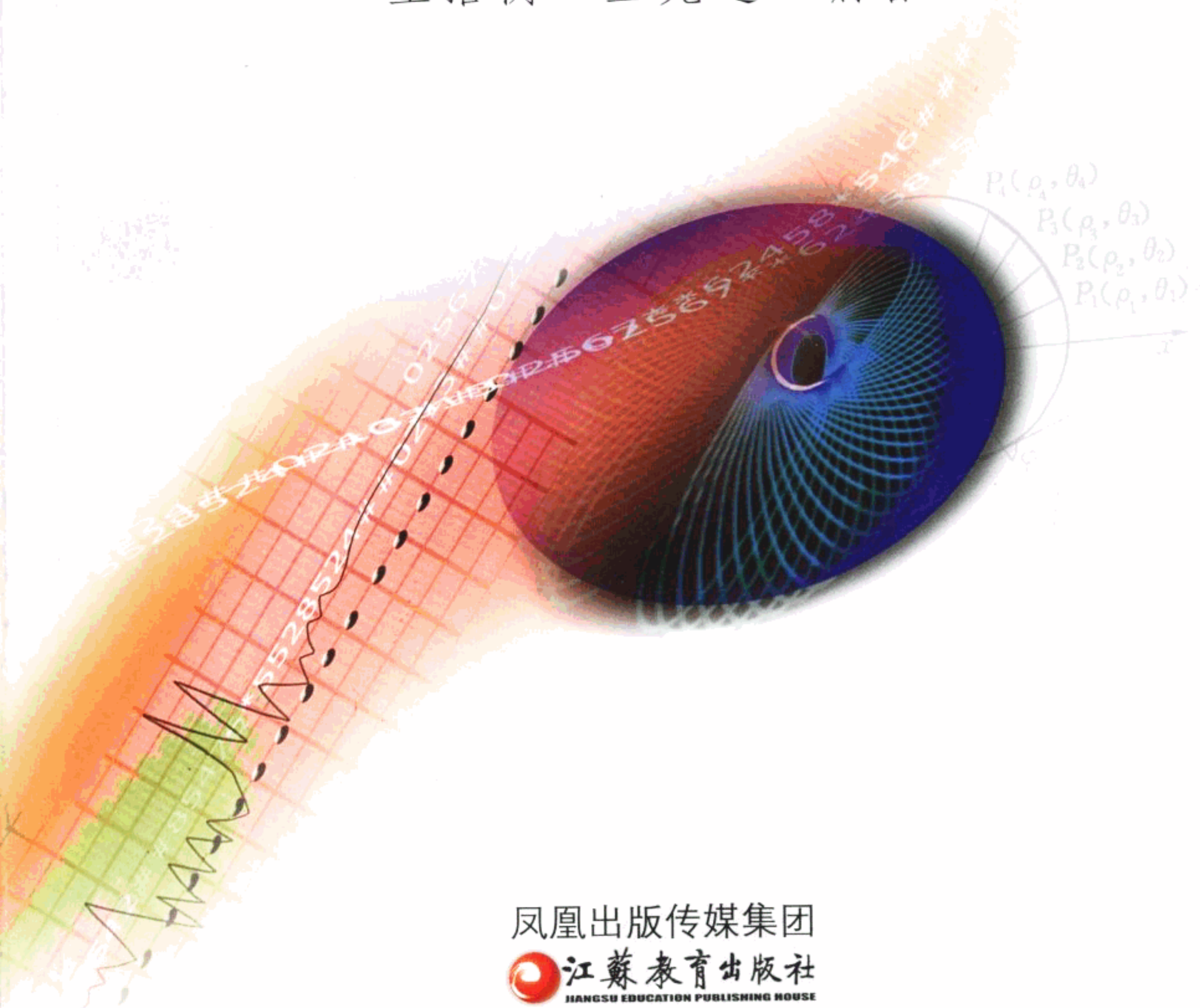
新课程高中数学专题

神奇的数学曲线

王治衡　王先进　编著



凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

目　录

Contents

第一章　古老的圆锥曲线

第一节　从圆锥面截得圆锥曲线

各类圆锥曲线均可以由圆锥面截得.

如图 1-1,有一个圆锥 S 和它的对顶圆锥,直线 l 平行于圆锥底面,过 l 分别作不过圆锥顶点的平面 α、β、γ、δ 与圆锥侧面相交,交线分别为 C_1、C_2、C_3、C_4,直观图如图 1-2 所示.

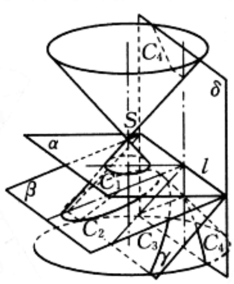


图 1-1

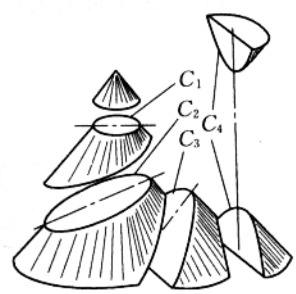


图 1-2

(1) 若平面 α 平行于圆锥底面,则 C_1 为圆;

(2) 若平面 β 与圆锥母线都相交,则 C_2 为椭圆;

(3) 若平面 γ 与一条圆锥母线平行,则 C_3 为抛物线;

(4) 若平面 δ 同时与圆锥母线及它的对顶圆锥母线相交,则 C_4 为双曲线.

这里我们先分三种情况分别加以说明,最后再将三种情况统一起来.

1. ***若一截面仅平行于圆锥的一条母线,则截面与圆锥面的截线为抛物线.***

如图 1-3,设有圆锥 S-AB,平面 γ // 母线 SA,交圆锥底面于 MN, $MN \perp AB$,由三垂线定理易知 $SA \perp MN$.

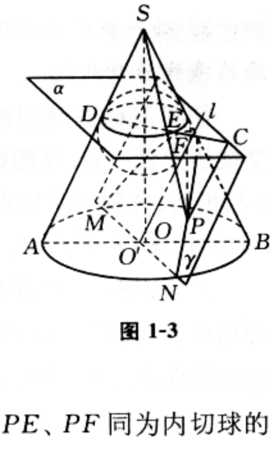


图 1-3

作圆锥 S-AB 的一个内切球,内切球与圆锥面的切点圆平面为 α,平面 α 与平面 γ 的交线为直线 l,内切球切平面 γ 于点 F,连结 PF.

因为平面 α // 圆锥底面,所以直线 l // 圆锥底面,MN // 直线 l. 又 $MN \perp$ 母线 SA,所以 $SA \perp$ 直线 l. 设 P 为平面 γ 与圆锥面截线上任一点,连结 PS 交截面圆于点 E,连结 DE 并延长交 l 于点 C,连结 PC. 因为 SA // 平面 γ,所以 SA // PC. 又 $SA \perp$ 直线 l,故 $PC \perp$ 直线 l.

由 PC // SD, $\triangle SDE \backsim \triangle PCE$, $SD = SE$,得 $PC = PE$. 又 PE、PF 同为内切球的

两切线，所以 $PF = PE$，$PC = PF$. 所以 P 点的轨迹是以 F 为焦点、以直线 l 为准线的抛物线.

2. 若一截面不过圆锥顶点而与圆锥面的所有母线都相交，则截面与圆锥面的截线为椭圆（当截面与圆锥的轴线垂直时，截线为圆）.

如图 1-4，设有圆锥 $S\text{-}AB$，平面 β 斜交圆锥所有母线，P 为平面 β 与圆锥面的截线上任一点. 在圆锥内部、平面 β 两侧各作一内切球 O_1 和内切球 O_2，使其与圆锥侧面及平面 β 均相切，得两切点圆及两切点 F_1、F_2. 设母线 SP 交内切球 O_1 的切点圆于点 C，交内切球 O_2 的切点圆于点 D，连结 PF_1、PF_2.

因为 PF_1、PC 同为过 P 点的内切球 O_1 的两条切线，PF_2、PD 同为过 P 点的内切球 O_2 的两条切线，所以 $PF_1 = PC$，$PF_2 = PD$，$PF_1 + PF_2 = PC + PD = CD =$ 定长，即 P 点的轨迹是以 F_1、F_2 为两焦点，以 CD 为长轴长的椭圆.

下面我们用相同的方法来证明为什么圆柱形玻璃杯中的水被倾斜后液面成椭圆.

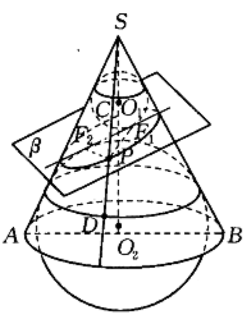


图 1-4

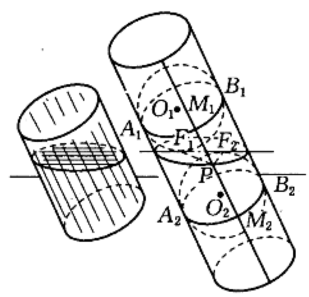


图 1-5

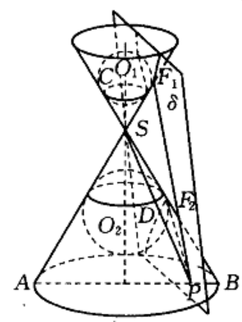


图 1-6

如图 1-5，在圆柱内放进内切球 O_1 和内切球 O_2，使与圆柱侧面及斜截面都相切，分别得切点圆 O_1、切点圆 O_2 及两切点 F_1、F_2. 设 P 为圆柱侧面与斜截面的交线上任一点，过 P 作圆柱的母线，分别交两切点圆于点 M_1、M_2.

因为 $PM_1 = PF_1$，$PM_2 = PF_2$，所以 $PF_1 + PF_2 = PM_1 + PM_2 = M_1M_2 =$ 定长，即 P 点的轨迹为以 F_1、F_2 为两焦点，以 M_1M_2 为长轴长的椭圆.

3. 若一截面不过圆锥顶点，且同时与圆锥面及其对顶圆锥面都相交，则截面与圆锥面的截线为双曲线.

如图 1-6，设有圆锥 $S\text{-}AB$，平面 δ 同时与圆锥 $S\text{-}AB$ 及其对顶圆锥面都相交，P 为相交截线上任一点. 在圆锥内及其对顶圆锥内分别作内切球 O_1、内切球 O_2 与圆锥面及平面 δ 都相切，分别得两切点圆及切点 F_1、F_2，连结 PF_1、PF_2. 又设母线 PS 分别交内切球 O_1、内切球 O_2 于点 C、D.

因为 PF_1、PC 同为过 P 点的内切球 O_1 的切线，PF_2、PD 同为过 P 点的内切球 O_2 的切线，所以 $PF_1 = PC$，$PF_2 = PD$，$PF_1 - PF_2 = PC - PD = CD =$ 定长，即 P 点的轨迹是以 F_1、F_2 为两焦点，以 CD 为实轴长的双曲线.

综上所述，我们发现当平面不过圆锥顶点时，平面截圆锥面所得截线也可这样区分：

(1) 圆锥的母线中与平面平行的条数为 0 时，曲线是椭圆；

(2) 圆锥的母线中与平面平行的条数为 1 时，曲线是抛物线；

(3) 圆锥的母线中与平面平行的条数为 2 时，曲线是双曲线.

抛物线、椭圆和双曲线虽然各有不同的轨迹定义、不同的图象形状和不同的本质特性，但由于它们都能从平面截圆锥面而获得，因而也一定具有某种内在联系，且这些联系应表现为它们之间的对立统一和相互转化. 下面我们以一种新的视角更深刻的统一认识这些圆锥曲线.

如图 1-7，设有圆锥 $S\text{-}AB$，母线与圆锥轴线的夹角为 θ ($0^\circ<\theta<90^\circ$)，一截面 β 与圆锥轴线成角 φ ($0^\circ\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ$) 截圆锥面，设 P 为截线上任一点，下面研究 P 点的轨迹.

作一内切球切圆锥面与截面，设内切球切圆锥面所得切点圆所在平面为 α，平面 α 与截面 β 的交线为直线 l，设内切球切截面 β 于点 F.

在平面 β 内引 $PC\perp l$ 于点 C，引 $PD\perp\alpha$ 于点 D，又设母线 PS 交切点圆于点 E，连结 CD、DE，易知△PDC 和△PDE 都为直角三角形，$\angle DPE=\theta$，$\angle DPC=\varphi$，$PF=PE$.

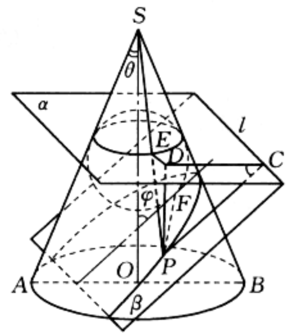


图 1-7

设 P 点到定点 F 和到定直线 l 的距离比为 e，则

$$e=\frac{PF}{PC}=\frac{PE}{PC}=\frac{\dfrac{PD}{\cos\theta}}{\dfrac{PD}{\cos\varphi}}=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

讨论：

当 $\varphi=\theta$ 时，$e=1$，P 点轨迹为抛物线，此时截面平行于一条母线；

当 $\varphi>\theta$ 时，$e<1$，P 点轨迹为椭圆($\varphi=90^\circ$时为圆)，此时截面和圆锥母线都相交；

当 $\varphi<\theta$ 时，$e>1$，P 点轨迹为双曲线，此时截面同时和圆锥面及它的对顶圆锥面都相交.

这些抛物线、椭圆、双曲线都以 F 为一个焦点，以 l 为一条准线.

由于抛物线、椭圆和双曲线都可由一个截面截圆锥面而得，因此我们将它们统称为圆锥曲线(或圆锥截线). 当然，若截面通过圆锥顶点，截面截圆锥面所得的截线可能是一个点或是过顶点的一条母线或两条相交母线，这时的截线是圆锥曲线的退化情形.

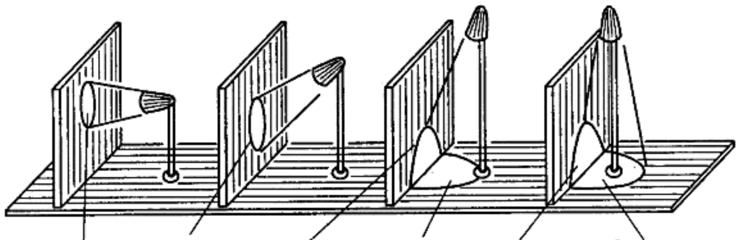
思考题

1. 试证明：将一个半径为 R 的球放在地面上，被阳光斜射下的影子是椭圆.

2. 如果将第 1 题中的光源换成点光源，那么所得的影子可能是抛物线吗？为什么？

3. 已知圆柱的底面半径为 4，用与圆柱底面成 30°角的平面去截这个圆柱得到一个椭圆. 试建立一个适当的坐标系，写出这个椭圆的方程.

4. 如图所示，灯光从圆锥形灯罩中发出，当灯光以不同角度照射互相垂直的两块板时，分别可能得到圆、椭圆、抛物线、双曲线的光影轮廓线，试指出下列图中的光影轮廓线分别是哪种圆锥曲线.



① ______ ② ______ ③ ______ ④ ______ ⑤ ______ ⑥ ______

第二节　圆锥曲线的画法

圆锥曲线的画法主要有两类.一类是基本画法,其基本步骤是:取点,连点成线.根据取点方法的不同,这种画法又可以分为代数画法和几何画法.另一类是工具画法,就像用直尺画直线、用圆规画圆一样,我们同样可以借用一定的工具来画圆锥曲线.

一、基本画法

这类画法的本质是找出满足一定条件的动点轨迹.通过下列基本圆锥曲线画法的步骤与程序,我们可以发现其中蕴涵着很多求轨迹的基本思想和方法.

1. 代数画法.

如果已知抛物线、椭圆或双曲线的方程,我们可先从方程中解出 y 关于 x 的函数式,再分别给出 x 的一组可取值,算出对应的 y 值,在直角坐标系中画出每一对 (x, y) 值对应的点,用光滑曲线顺次连接各点,再依据图象的对称性等性质,画出已知方程对应的图象,这就是代数法画圆锥曲线.

例如,作 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的图象.

① 列表取点.

将方程变形为 $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$,根据 $y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ 在第一象限列表(如下表).

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2.94	2.75	2.4	1.8	0

② 连点成线,画出第一象限的图象.

③ 根据对称性,画出整个椭圆.

当然,取点越多,画出的图象就越准确.我们有时可以利用计算器快速计算出多点的坐标.

2. 几何画法.

几何画法就是用几何的方法取点,并连点成线的方法.其实质是用几何的方法寻找满足某条件的动点轨迹.

A. 画抛物线.

作 $y^2=2px$ 的图象.

方法一:

如图1-8,设 F 为焦点,l 为准线,F 到 l 的距离为 $|FK|=p$.

① 在 x 轴的正半轴上取点 A_1, A_2, …, A_i, …,过 A_1, A_2, …, A_i, …分别引 x 轴的垂线.

② 以 F 为圆心,以 A_1K, A_2K, …, A_iK, …长为半径分别画弧,交过 A_1, A_2, …, A_i, …所引 x 轴的垂线于点 P_1、

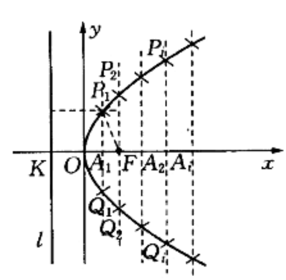


图 1-8

Q_1, P_2、Q_2, …, P_i、Q_i, ….

③ 用光滑曲线顺次连接点 O, P_1, P_2, …, P_i, …及 O, Q_1, Q_2, …, Q_i, …,则得所求作抛物线.

将上面作 $y^2=2px$ 的图象的方法还原为一个轨迹问题就是:已知定直线 l:$x=-\dfrac{p}{2}$ 和定点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,设 A 是 x 轴的正半轴上的任一点,K 是直线 l 与 x 轴的交点,以 F 为圆心、AK 为半径画圆,交过 A 点且垂直于 x 轴的直线于 Q 点,求 Q 点的轨迹.

过 Q 点引直线 l 的垂线,垂足为点 P. 显然,$QF=AK=QP$,即 Q 点的轨迹是以 F 为焦点、直线 l 为准线的抛物线(去掉原点). 这就是求轨迹方法里的定义法.

方法二:

如图 1-9,设 F 为焦点,l 为准线,F 到 l 的距离 $|FK|=p$.

① 在 l 上取点 A_1, A_2, …, A_i, …,过 A_1, A_2, …, A_i, …分别作 x 轴的平行线.

② 作 FA_1, FA_2, …, FA_i, …的垂直平分线,分别交相应 x 轴的平行线于点 P_1, P_2, …, P_i, ….

③ 用光滑曲线顺次连接点 O, P_1, P_2, …, P_i, …. 据抛物线的定义,此曲线为抛物线.

(你能仿照上面的方法将这种画法还原为一个轨迹问题吗?)

顶点在上、开口向下的抛物线在建筑工程上通常称为拱形. 设有一抛物线拱形的底跨长度为 $2L$,拱高(又称矢高,即拱顶到拱底的距离)为 h,试作出抛物线.

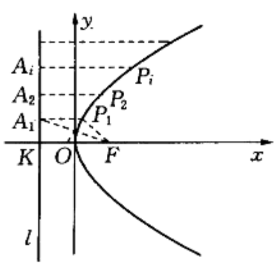


图 1-9

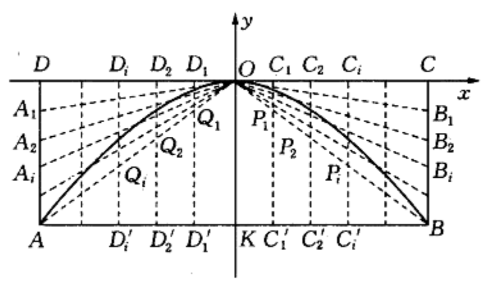


图 1-10

① 如图 1-10,作矩形 $ABCD$,使底 $AB=2L$,高 $BC=h$,以 AB 的垂直平分线 OK 为 y 轴,以 DC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系.

② 分别把 OC, OD, DA, CB 分成 n 等份(图中为 5 等份),得分点 C_1, C_2, …, C_i, …, C_{n-1}, D_1, D_2, …, D_i, …, D_{n-1}, A_1, A_2, …, A_i, …, A_{n-1}, B_1, B_2, …, B_i, …, B_{n-1}.

③ 过点 C_1, C_2, …, C_i, …及 D_1, D_2, …, D_i, …分别引 y 轴的平行线 C_1C_1', C_2C_2', …, C_iC_i', …, D_1D_1', D_2D_2', …, D_iD_i', …. 设 OB_1 交 C_1C_1' 于点 P_1, OB_2 交 C_2C_2' 于点 P_2, …, OB_i 交 C_iC_i' 于点 P_i, ….

④ 同理可得点 Q_1, Q_2, …, Q_i, ….

⑤ 用光滑曲线顺次连接点 O, P_1, P_2, …, P_i, …, B 及 O, Q_1, Q_2, …, Q_i, …, A, 即得所求作的抛物线.

这种画法的理论根据是什么呢？下面我们来证明.

由作图知，$OC_i=\frac{i}{n}L$，B_i 的坐标为$\left(L,\ -\frac{i}{n}h\right)$，直线 C_iC_i' 的方程为 $x=\frac{i}{n}L$，直线 OB_i 的方程为 $y=\dfrac{-\frac{i}{n}h}{L}x$.

若设 $P_i(x,\ y)$为直线 C_iC_i' 与直线 OB_i 的交点，那么 $P_i(x,\ y)$的坐标必满足这两个直线方程，也必满足这两个方程的两边相乘所得的新方程，即 $P_i(x,\ y)$满足新方程：$\frac{i}{n}Ly=x\cdot\dfrac{-\frac{i}{n}h}{L}x$，得 $y=-\frac{h}{L^2}x^2$，即 $x^2=-\frac{L^2}{h}y\ (0\leqslant x\leqslant L)$.

这是以 y 轴为对称轴、开口向下，且过点$(L,\ -h)$的抛物线.

同理，Q_i 点的轨迹方程是抛物线 $x^2=-\frac{L^2}{h}y\ (-L\leqslant x\leqslant 0)$.

上述过程实际上是求轨迹方程的过程，其方法是“交轨法”，其特征是要求轨迹的那个动点是某两条动直线的交点，其做法是用某个参数将两直线的方程表示出来，然后将两方程中的参数消掉.

B. 画椭圆.

已知椭圆长轴长为 $2a$，焦距为 $2c$，画椭圆.

如图 1-11，先画椭圆长轴 $AA'=2a$，在其上定中点为 O，两焦点为 F_1 和 F_2，且 $|F_1F_2|=2c$. 在 AA' 上定出点 A_1，A_2，…，A_i，…，使 $A'A_i=t_i\geqslant a-c$，分别以 F_1 和 F_2 为圆心，以 t_i 和 $2a-t_i$ 为半径画弧，得交点 P_1、P_1'，P_2、P_2'，…，P_i、P_i'，…，用光滑曲线连接这些交点，即得所求作椭圆.

由作图可知，$|F_1P_i|+|F_2P_i|=t_i+(2a-t_i)=2a$，所以 P_1、P_1'，P_2、P_2'，…，P_i、P_i'，…都在椭圆上.

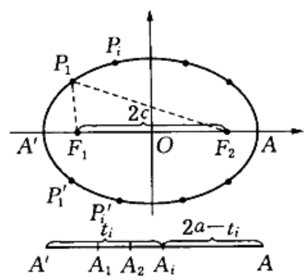


图 1-11

已知椭圆长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$，画椭圆.

如图 1-12，由 $c^2=a^2-b^2$，可先定出焦点，将问题转化为前一作图问题. 作出长轴 $AA'=2a$，短轴 $BB'=2b$，中心为 O，以 B 为圆心、以 a 为半径画弧交长轴于点 F_1 和 F_2，以下作法同前.

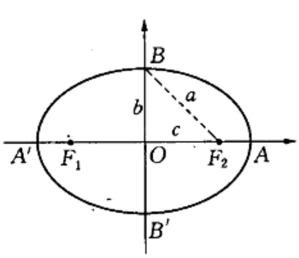


图 1-12

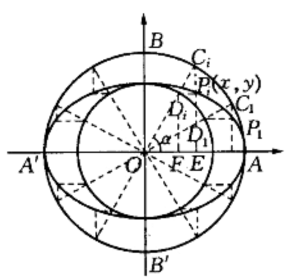


图 1-13

下面介绍用同心辅助圆画椭圆法. 如图 1-13，分别以 a 和 b 为半径画一大一小两个

同心辅助圆，从圆心 O 引多条大圆半径 OC_1，OC_2，…，OC_i，…，分别交小圆于点 D_1，D_2，…，D_i，…，过 C_1，C_2，…，C_i，…分别引长轴的垂线，过 D_1，D_2，…，D_i，…分别引长轴的平行线，两相应的垂线和平行线分别交于点 P_1，P_2，…，P_i，…，用光滑曲线连接 P_1，P_2，…，P_i，…，即得所求作椭圆.

这是为什么呢？

设 $P_i(x, y)$，$\angle C_iOA=\alpha$，由作图知：

$x=OE=a\cos\alpha$，　(1)

$y=EP_i=FD_i=b\sin\alpha$.　(2)

由(1)得 $\cos\alpha=\dfrac{x}{a}$，由(2)得 $\sin\alpha=\dfrac{y}{b}$.

所以 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$.

即 $P_i(x, y)$ 适合方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，此方程对应的图象为以 $2a$、$2b$ 为长轴长和短轴长的椭圆.

上述求轨迹的方法是参数法，要建立 x，y 之间的关系可以先引入第三者(即参数)，找出 x，y 与参数之间的关系，然后消掉参数，使得 x，y 之间直接联系，即"架桥过河，过河拆桥".

上面的(1)(2)联立起来实际上就是椭圆的参数方程，由作图过程可以知道，α 有明显的几何意义，我们称它为离心角. 这个参数方程有很大的用途，如我们可以对具有椭圆方程结构的代数式进行三角代换，将代数问题转化为三角问题来解决，我们还可以用它来假设椭圆上任意一点的坐标.

试画出拱底为 $2a$、拱高为 h 的椭圆拱.

如图 1-14，先作矩形 $ABCD$，使底 $AB=2a$，高 $BC=h$，再作矩形的一条对称轴 ON，在 ON 上取 $n-1$ 个等分点 N_1，N_2，…，N_i，…，N_{n-1}，在 CN 及 DN 上也同样取 n 个等分点 C_1，C_2，…，C_i，…，C_{n-1} 和 D_1，D_2，…，D_i，…，D_{n-1}.

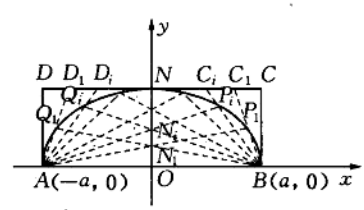


图 1-14

设 AN_1、BC_1 交于点 P_1，…，AN_i、BC_i 交于点 P_i；设 BN_1、AD_1 交于点 Q_1，…，BN_i、AD_i 交于点 Q_i，则连接 P_1，P_2，…，P_i，…，Q_1，Q_2，…，Q_i，…及 N，A，B 各点所得图形就是所求作的椭圆拱.

这又是为什么呢？我们同样可以用上述"交轨法"来说明.

如图 1-14 建立直角坐标系，O 为原点，AB 为 x 轴，ON 为 y 轴，则得

$A(-a, 0)$，$B(a, 0)$，$N(0, h)$，$N_i\left(0, \dfrac{i}{n}h\right)$，$C_i\left(\left(1-\dfrac{i}{n}\right)a, h\right)$，$D_i\left(-\left(1-\dfrac{i}{n}\right)a, h\right)$.

设 $P_i(x, y)$ 为直线 BC_i 与直线 AN_i 的交点 $(0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant h)$，则

斜率 $k_{BC_i}=\dfrac{h-0}{\left(1-\dfrac{i}{n}\right)a-a}=\dfrac{h}{-\dfrac{i}{n}a}=-\dfrac{nh}{ia}$,

斜率 $k_{AN_i}=\dfrac{\dfrac{i}{n}h-0}{0-(-a)}=\dfrac{ih}{na}$,

直线 BC_i 方程为 $y=-\dfrac{nh}{ia}(x-a)$, (3)

直线 AN_i 方程为 $y=\dfrac{ih}{na}(x+a)$. (4)

$P_i(x,\ y)$适合方程(3)和(4),也必适合方程(3)乘(4),

即有 $y^2=-\dfrac{h^2}{a^2}(x^2-a^2)$,

去分母、化简得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{h^2}=1\ (0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant h)$,

此为长半轴为 a、短半轴为 h 的第一象限椭圆. 同理可证 Q_i 点的轨迹为长半轴为 a、短半轴为 h 的第二象限椭圆,故上述所作半椭圆为所求作的椭圆拱.

C. 画双曲线.

已知双曲线实轴长为 $2a$,焦距为 $2c$,画双曲线.

如图 1-15,先作出实轴 $|AA'|=2a$,中心 O 及两焦点 F_1, F_2,使 $|F_1F_2|=2c$,在 $A'A$ 的延长线上取 A_1, A_2, …, A_i, …,使 $|AA_1|=t_1$, …, $|AA_i|=t_i$, …,分别以 F_1, F_2 为圆心,以 $2a+t_i$ 和 t_i 为半径画弧,两弧交于点 P_i, P'_i,用光滑曲线连接 P_1、P'_1, P_2、P'_2, …, P_i、P'_i, …及 A 点,可得所求作双曲线的右支;再分别以 F_2、F_1 为圆心,仍以 $2a+t_i$ 和 t_i 为半径画弧,两弧交于点 Q_i、Q'_i,连接 Q_1、Q'_1, Q_2、Q'_2, …, Q_i、Q'_i, …及 A'点,可得双曲线的左支.

这是为什么呢?

由于 $|P_iF_1|-|P_iF_2|=(2a+t_i)-t_i=2a$,所以 P_i 点的轨迹是符合条件的双曲线,Q_i 点的轨迹亦是.

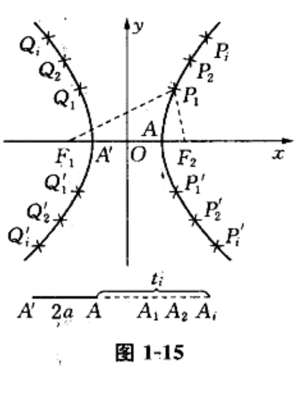


图 1-15

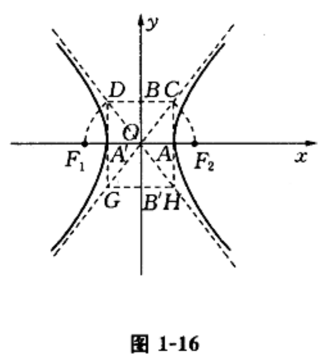


图 1-16

已知双曲线实轴长为 $2a$,虚轴长为 $2b$,画双曲线.

如图 1-16,在直角坐标系的 x 轴上取实轴 $AA'=2a$,在 y 轴上取虚轴 $BB'=2b$,过

点 A，A'分别作 y 轴的平行线，过点 B，B'分别作 x 轴的平行线，相交得一矩形 $CDGH$，则矩形两对角线为双曲线的渐近线，以 O 为圆心、以 OC 长（$OC=\sqrt{a^2+b^2}$）为半径画弧，交 x 轴得两焦点 F_1，F_2，然后在渐近线控制下，可画出所求作的双曲线.

二、工具画法

下面以椭圆的画法为例来说明.

1. *用定长绳套画椭圆.*

教材中曾介绍过一个实验，如图 1-17，在一个平板上钉两个小钉子，取一长度一定的细绳，将两端固定在两个钉子上，然后用一支笔把绳拉紧，使笔尖在平板上移动一周，笔尖在平板上画出的图形就是一个椭圆. 这是一种借助工具画椭圆的简易方法.

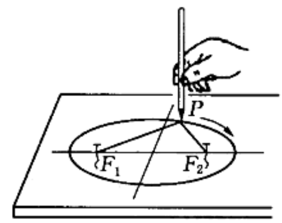


图 1-17

2. *用"达 · 芬奇椭圆仪"画椭圆，见后面的思考题.*

3. *用几何画板等工具画椭圆.*

几何画板是由人民教育出版社出版发行的一套动态画图教学软件，它以简单易学、直观生动的特点而深受广大中小学师生的喜爱. 利用几何画板来画圆锥曲线直观简捷、易学易懂.

A. 利用椭圆的第一定义(一).

(1) 打开几何画板，创建新绘图，存盘取名为"第一定义 1. gsp"，放在一个适当的目录中(如 C:\my document\神奇的数学曲线).

(2) 如图 1-18，选定画线工具，在画板上画线段 AB.

(3) 选定画点工具，在线段 AB 上任取一点 C.

(4) 选定选取工具，同时选取 A，C 两点(先选定一点，按住 Shift 键后再选定另一点)，然后单击作图菜单中的"线段"命令，作线段 AC(事实上，选定 A，C 后直接右击画板，弹出活动菜单，再单击作图中的"线段"命令将更快些).

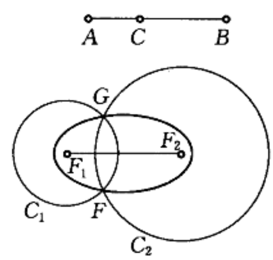


图 1-18

(5) 同(4)，作出线段 BC.

(6) 在画板上另取两点 D，E，注意使 D，E 两点的距离比 AB 的长度短，并将其分别更名为 F_1，F_2(选定选取工具或手形工具，移至字母 D 后双击，弹出"重设标签"对话框，将标签 D 更名为 F_1，按"确定"便可得 F_1，同样可改 E 为 F_2)，作出线段 F_1F_2.

(7) 同时选定 F_1 和线段 AC 后，右击画板弹出活动菜单，单击作图/以圆心和半径画圆 C_1.

(8) 同(7)，以 F_2 和线段 BC 长为半径作圆 C_2.

(9) 同时选中圆 C_1 和圆 C_2，右击画板，单击作图/交点，得两圆交点 G 和 F.

(在线段 AB 上移动 C 点，可以看到两圆大小在发生动态改变，其交点 G 和 F 也在变化，其实 G 和 F 两点的轨迹就是椭圆)

(10) 同时选定 C 和 G 两点，右击画板，单击作图/轨迹，可得过点 G 的半个椭圆，再

选定 C 和 F，同样可得过点 F 的半个椭圆，合起来恰好是整个椭圆.

(为了使轨迹的形成更生动，这里可以用动画来演示其效果)

(11) 同时选定 G 和 F 两点，右击画板，单击颜色中的红色色块，再右击画板，单击显示/追踪点.

(12) 同时选定点 C 和线段 AB，单击编辑菜单/操作类按钮/动画，弹出"匹配路径"，改变设置为点 C 沿着线段 j 双向慢慢地移动，然后单击"动画"按钮，这时在画板上出现标志 $\boxed{\rightleftharpoons\text{动画}}$，双击这个标志，便可动态地看到椭圆轨迹的产生过程(退出动画过程只要单击一下鼠标即可).

下面说明这里的轨迹就是以 F_1, F_2 为焦点，AB 长为长轴长的椭圆.

因为 $|F_1G|=|AC|$, $|F_2G|=|CB|$，所以 $|F_1G|+|F_2G|=|AC|+|CB|=|AB|>|F_1F_2|$（前面有约定，否则就得不到椭圆了).

由椭圆的定义知这里的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点，AB 长为长轴长的椭圆.

为了更准确、具体地了解这里的变化，我们还可以将一些数据展示出来：

$\overline{CB}=2.15\text{ cm}$, $\overline{CA}=1.28\text{ cm}$, $\overline{AB}=3.43\text{ cm}$, $\overline{F_1F_2}=2.80\text{ cm}$.

(13) 同时选定线段 AC, BC, AB, F_1F_2，右击画板，单击度量/长度，这时出现线段 AC, BC, AB, F_1F_2 的长度表达式，此时双击标志 $\boxed{\rightleftharpoons\text{动画}}$ 可以看到随着图形的动态变化，线段 BC 和 AC 的长度也在表达式中发生着动态改变.

拖动点 B，改变线段 AB 的长度，这时可以看到椭圆的圆扁程度也在发生改变(拖动点 F_2 也有同样效果)，为了准确了解这种改变，可以用式子将椭圆的离心率计算出来.

(14) 同时选定线段 AB 和 F_1F_2 的长度表达式，右击画板，单击度量/计算，弹出"计算器"对话框，单击数值/长度(线段 F_1F_2)，单击除法符号"/"，单击数值/长度(线段 AB)，单击"OK"，这时在画板上出现表达式 $\dfrac{\overline{F_1F_2}}{\overline{AB}}=0.82$.

事实上，这里 $\overline{F_1F_2}=2c$, $\overline{AB}=2a$，故 $\dfrac{\overline{F_1F_2}}{\overline{AB}}=\dfrac{2c}{2a}=e$(离心率).

此时再次拖动点 B，改变线段 AB 的长度，随着椭圆圆扁程度的改变，表达式 $\dfrac{\overline{F_1F_2}}{\overline{AB}}$ 的结果也在发生着动态变化. 可以看到当离心率 e 在 0～1 中由小变大时，椭圆越来越扁，反之，则越来越圆.

通过几何画板，我们不仅可以看到椭圆轨迹的动态形成过程，理解椭圆定义的真正含义，而且可以用动态手段定量地研究其几何性质，使我们对椭圆的学习真正做到直观、生动、准确、简单. 利用类似方法，我们可以考察其他圆锥曲线的概念和性质.

这里我们作椭圆的思路是利用椭圆的第一定义. 事实上，用几何画板作椭圆还有其他许多方法. 下面再介绍几种其他作椭圆的方法.

B. 利用椭圆的第一定义(二).

(1) 打开几何画板，创建新绘图，存盘取名为"第一定义 2.gsp".

(2) 如图 1-19，在画板上作两点 A，B，并改名为 F_1，F_2.

(3) 以 F_1 为圆心，作圆 C_1 过点 C，使点 F_2 在圆 C_1 内.

(4) 在圆 C_1 上任取一点 D，作出线段 F_1D，F_2D，F_1F_2.

(5) 选定线段 F_2D，右击画板，单击作图/中点，得 F_2D 的中点 E.

(6) 同时选定点 E 和线段 F_2D，右击画板，单击作图/垂线，作出线段 F_2D 的中垂线.

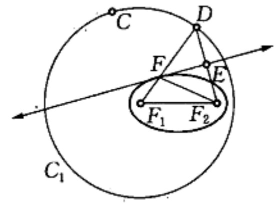


图 1-19

(7) 同时选定 F_2D 的中垂线和线段 F_1D，右击画板，单击作图/交点，得两线交点 F，作出线段 FF_2. 移动点 D，可以看到点 F 也在移动.

(8) 同时选定点 F 和 D，右击画板，单击作图/轨迹.

为了动态地观察椭圆轨迹的形成，下面可这样处理：

(9) 选定点 F，右击画板，单击颜色中的红色色块，并追踪点 F.

(10) 同时选定点 D 和圆 C_1，单击编辑菜单/操作类按钮/动画，让点 D 绕着圆 C_1 单向正常地移动，单击动画，这时在画板上产生标志 $\boxed{\rightleftharpoons\text{动画}}$，双击这个标志，可以看到当 D 点沿圆 C_1 移动时，点 F 产生椭圆轨迹.

由作图步骤和几何性质知 $|FF_1|+|FF_2|=|FF_1|+|FD|=|F_1D|>|F_1F_2|$，故点 F 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆.

拖动点 C 或点 F_2，可以看到椭圆的圆扁程度在发生动态变化.

这里的画法原理实质仍是椭圆的第一定义.

C. 利用椭圆的参数方程.

(1) 打开几何画板，创建新绘图，存盘取名为“参数方程.gsp”.

(2) 如图 1-20，作线段 AB，并在其上取一点 C.

(3) 以 A 为圆心，分别作圆 C_1 过点 C，作圆 C_2 过点 B.

(4) 在圆 C_2 上任取一点 D，作线段 AD，并作出 AD 与圆 C_1 的交点 E.

(5) 同时选定点 D 和线段 AB，右击画板，单击作图/垂线.

(6) 同时选定此垂线和点 E，右击画板，单击作图/垂线，再作出这两条垂线的交点 F.

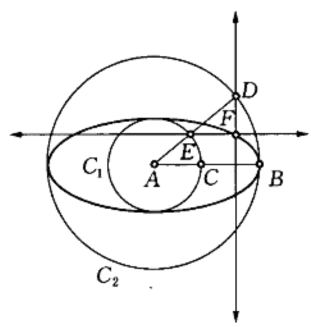


图 1-20

(7) 同时选定点 F 和点 D，右击画板，单击作图/轨迹，即得点 F 的轨迹——一个椭圆.

(8) 选定点 F，改变其颜色为红色，并追踪点 F.

(9) 同时选定点 D 和圆 C_2，创建点 D 绕着圆 C_2 单向正常移动的动画，双击标志 $\boxed{\rightleftharpoons\text{动画}}$，试试看.

这里的画法利用了椭圆的参数方程(见《平面解析几何》第 117 页例题)，其中线段 AC 长为椭圆短半轴长，线段 AB 长为椭圆长半轴长.

D. 利用椭圆的第二定义(统一定义).

(1) 打开几何画板,创建新绘图,存盘取名为“统一定义.gsp”.

(2) 如图 1-21,作线段 AC,在其上任取一点 B,分别量出 A 和 B 及 B 和 C 之间的距离,并计算出$\frac{AB}{BC}$的大小$\left(满足\frac{AB}{BC}<1\right)$,也即离心率 e 的大小.

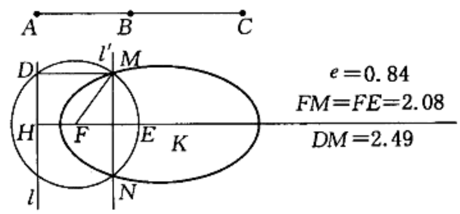


图 1-21

(3) 作水平方向的射线 HK,在其上取点 F 和 E,量出 F 和 E 两点之间的距离,计算出$\frac{FE}{e}$的大小.

(4) 过 H 作 HK 的垂线 l,标记距离$\frac{FE}{e}$,将直线 l 按标记距离$\frac{FE}{e}$平移得直线 l'.

(5) 以点 F 为圆心,以 FE 为半径作圆,交直线 l' 于 M 和 N 两点.

(6) 同时选定点 M 和 E,由作图/轨迹可得点 M 的轨迹.同样方法可得点 N 的轨迹.

因为直线 l 与 l' 间的距离$=DM=\frac{FE}{e}$,所以点 M 到直线 l 的距离为$\frac{FE}{e}$.

所以 MF 长与 M 到直线 l 的距离之比为 $\dfrac{FE}{\frac{FE}{e}}=e$(定值),适合椭圆的第二定义,这里 e 就是椭圆的离心率.

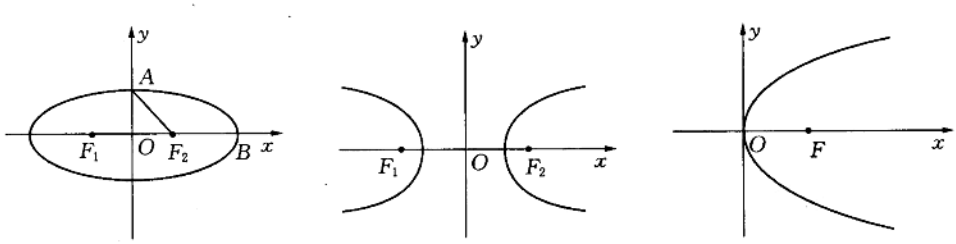
拖动点 B 在线段 AC 上的位置,可以看到椭圆的离心率和圆扁程度都在发生着相应的变化.当将点 B 移至 AC 的中点与点 C 之间时,轨迹变成双曲线,离心率 $e>1$;当点 B 位于 AC 的中点时,轨迹为抛物线,离心率 $e=1$.

思考题

1. 将圆 $x^2+y^2=4$ 上的点的横坐标保持不变,纵坐标变为原来的一半,求所得曲线的方程,并说明它是什么曲线.

2. 椭圆可以视为对圆上的点向同一条直径作伸缩变换而成.运用椭圆与圆的这种关系,你能根据圆的面积公式来猜想椭圆的面积公式吗?

3. 指出图 1-22 所示图形中的错误.



甲　　乙　　丙

图 1-22

4. 猫的运动轨迹问题：架立在光滑地板上的梯子顺着墙下滑，一只猫坐在梯子的正中间不动，试求在梯子下滑的过程中猫的运动轨迹.

这一生动有趣的叙述，实际上是一个数学问题：已知一个直角，一条长度为 d 的线段的两个端点分别在这个直角的两条边上运动，求线段中点的轨迹.

这个问题比较简单，建立坐标系后，可用直接法很快求出其轨迹为一个圆.

假如这只猫没有坐在梯子的正中间，那么梯子在下滑的过程中，它沿怎样的一条线路运动？我们用解析法来解决这个问题.

以直角的两边所在的直线为坐标轴建立如图 1-23 所示坐标系，作 $MC\perp AO$ 于点 C，$MD\perp BO$ 于点 D. 设 $BM=a$，$AM=b$，$M(x,\ y)$，$A(m,\ 0)$，$B(0,\ n)$.

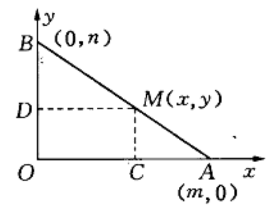


图 1-23

根据$\triangle BMD\backsim\triangle BAO$ 得 $\dfrac{x}{m}=\dfrac{a}{a+b}$，$m=\dfrac{(a+b)x}{a}$.

同理可得 $n=\dfrac{(a+b)y}{b}$.

因为 $m^2+n^2=(a+b)^2$，

所以$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (x>0,\ y>0)$.

即这只猫沿一段椭圆弧运动.

根据上述材料，试解释“达 · 芬奇椭圆仪”的工作原理.

“达 · 芬奇椭圆仪”的制作方法如下：如图 1-24 所示，用两根木条钉成十字架，木条中间挖一条槽，在另一活动木条 PBA 的 P 处钻一小孔，可以容纳笔尖，A，B 是两个螺钉，可以放松移动以配合 $PA=a$，$PB=b$ 的长度. 当 A，B 在一条槽内移动时，笔尖 P 就画出了一个椭圆.

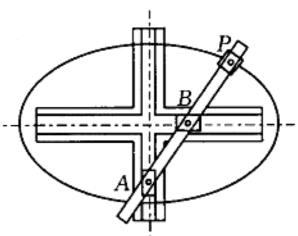


图 1-24