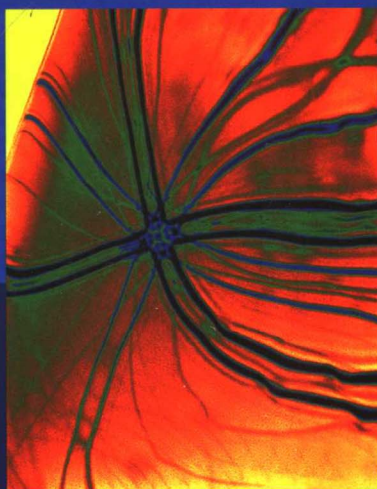


高等院校导学助考丛书

Guidance
to Quantum Mechanics



量子力学导读

◎ 俞 军 金烈侯 钱贤民 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

0413. 1/75

2008

高等院校导学助考丛书

量子力学导读

俞 军 金烈侯 钱贤民 编著

浙江大学出版社

内容提要

本书旨在为学习量子力学课程的学生提供实用性指导,使学生掌握学习方法,提高学习兴趣,能自如地通过相关考试。

本书每章分为问题、例题、习题三部分。问题部分以问答谈话形式,由浅入深,通俗地叙述量子力学的理论体系和研究方法。例题部分主要选择近年来部分高校研究生入学考试试题,同时有作者创新的综合性例题。通过这部分阅读可检测自身水平和大致了解考研要求。例题突出量子力学课程的重点,有较强的综合性和实用性。习题部分(附有提示和答案)可供练习。

与目前出版的一些量子力学专著和教学丛书相比,本书通俗易懂,有较强的导读性,因而对初学量子力学的物理专业和非物理专业学生,对有志于相关专业考研的青年朋友以及对量子力学有兴趣的所有读者,都有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学导读 / 俞军, 金烈侯, 钱贤民编著. — 杭州:
浙江大学出版社, 2008. 1
ISBN 978-7-308-05734-9

I. 量… II. ①俞…②金…③钱… III. 量子力学—高等
学校—教学参考资料 IV. 0413. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 198655 号

责任编辑	王 波(zjuwb@163.com)
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn) (网址: http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话: 0571-88925592, 88273066(传真)
排 版	浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷	杭州浙大同心教育彩印有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	11.75
字 数	237 千
版 次	2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0001—2500
书 号	ISBN 978-7-308-05734-9
定 价	20.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

序 言

量子力学是高等院校物理及有关专业的一门基础课程,难度较大,同时又是物理类专业考研、学历考试等的主要科目。本书旨在为学习这门课程的学生提供实用性指导,使学生掌握学习方法,提高学习兴趣,能自如地通过相关考试。

本书每章分为问题、例题、习题三部分。问题部分以问答谈话形式,由浅入深,通俗地叙述量子力学的理论体系和研究方法。读者通过这部分阅读,可大致了解量子力学的基本概念和基本内容。同时这一部分对量子力学课程中的重点、难点作了较为深入的分析,并对理论体系的建立思路作了探索。例题部分主要选择近年来部分高校研究生入学考试试题,同时有作者创新的综合性例题。读者通过对这部分阅读研究,可检测自身水平和大致了解考研要求。例题突出量子力学课程的重点,有较强的综合性和实用性。某些知识点在问题部分不便叙述就在例题部分给予补述,以拓宽量子力学的知识面,学生读后可以加深对量子力学概念的理解。习题部分(附有提示和答案)可供练习,所选习题与常用教科书所选习题很少重复。

与目前出版的一些量子力学专著和教学丛书相比,本书通俗易懂,有较强的导读性。因而本书对初学量子力学的物理专业和非物理专业学生,对有志于相关专业考研的青年朋友以及对量子力学有兴趣的所有读者,都有一定的参考价值。

限于作者水平,本书难免还存在缺点和错误,不足之处有待改正,企盼读者批评指正。

张家琨教授仔细审阅了全书,在本书写作的全过程中给予关心和鼓励,作者深表感谢。

金烈侯 俞 军 钱贤民
(量子力学课程建设组)

于绍兴文理学院
2007年10月

目 录

第一章 量子力学导言	1
一、问题	1
二、例题	8
三、习题	12
第二章 波函数和薛定谔方程	13
一、问题	13
二、例题	22
三、习题	34
第三章 算符和力学量	37
一、问题	37
二、例题	48
三、习题	59
第四章 表象理论	61
一、问题	61
二、例题	70
三、习题	86
第五章 微扰理论	88
一、问题	88
二、例题	93
三、习题	103

第六章 散 射	104
一、问题	104
二、例题	107
三、习题	110
第七章 电子自旋	111
一、问题	111
二、例题	116
三、习题	121
第八章 多体问题	123
一、问题	123
二、例题	127
三、习题	131
第九章 自旋和轨道角动量的耦合	132
一、问题	132
二、例题	134
三、习题	142
习题求解提示和参考答案	143
一、量子力学导论	143
二、函数和薛定谔方程	144
三、算符和力学量	148
四、表象理论	153
五、微扰理论	156
六、散射	158
七、电子自旋	160
八、多体问题	161
九、轨道角动量和自旋角动量的耦合	163

附件:考研试题选例	166
卷 1	166
卷 2	167
卷 3	168
卷 4	169
卷 5	170
卷 6	172
卷 7	173
卷 8	173
考研试题选例选答	175

第一章 量子力学导言

量子力学是研究微观粒子运动规律的理论。

一、问题

1. 什么是量子力学？

答：量子力学是研究微观粒子（分子、原子、原子核、基本粒子）运动规律的理论。它是 20 世纪 20 年代在总结大量实验事实和旧量子论的基础上建立起来的近代物理学理论。

2. 量子力学为什么叫力学？

答：提到力学，人们就会想起物体的运动及其相互作用，就会想起伽利略和牛顿。力学是研究物体的机械运动及其规律的理论。从伽利略的实验力学，到牛顿运动定律的建立和应用，形成并发展的力学称为经典力学。它是以宏观物体为研究对象，研究机械运动规律的学科，而量子力学是以微观粒子为研究对象，同样也是研究其运动规律的，所以称之为力学。

3. 为什么叫量子力学，而不叫微观力学？

答：叫其微观力学也未尝不可，但叫其为量子力学更反映物理内涵。称为力学的还有热力学、电动力学和相对论力学等。热力学研究热运动，与热现象相联系。电动力学研究电磁运动，与电磁现象相联系。相对论力学与相对论现象相联系。微观粒子最突出的物理现象是什么呢？那就是量子化现象，因此把研究微观粒子运动规律的力学称为量子力学更反映物理内涵。

4. 什么叫量子化现象?

答:19 世纪末 20 世纪初,经典力学、热力学和经典统计物理学、经典电动力学已经发展得相当完善。比方,速度远小于光速的物体的机械运动遵循牛顿力学规律;电磁运动满足麦克斯韦方程;关于光的现象有光的波动理论;对于热现象有系统的热力学理论和统计物理学。经典物理学的大厦已经建立得相当完美了。但伴随着 20 世纪的到来,开耳芬^[1]却发出感叹:“动力学理论断言,热和光都是运动的方式,但现在这一理论的优美性和明晰性却被两朵乌云遮蔽,显得黯然失色了(The beauty and clearness of the dynamical theory, which heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds.)。”后来也被说成“在物理学的天边还有两朵小小的乌云”,“物理学充满灿烂阳光的天空笼罩着两朵乌云”。意思是当时被认为完美的物理学理论能解释实验中观察到的一切物理现象,却对两个物理现象无法解释。一是关于黑体辐射实验,二是关于迈克尔逊—莫雷实验。对于黑体辐射实验无论是用电磁学理论还是热力学理论都得出与实验事实完全不符合的结论。所谓“紫外光灾难”意即经典物理学理论在解释黑体辐射问题上遇到极大的困难。这说明物理现象中隐藏着尚未被人们认识的秘密,它是什么呢?普朗克^[2]于 1900 年为了解决黑体辐射的困难,提出了能量量子化的观念。他假定黑体相当于一组连续振动的谐振子,振子的能量只能取最小能量单位 ϵ 的整数倍的值。因此黑体和辐射场交换能量也只能以 ϵ 为单位吸收或发射。这就是说,黑体吸收或发射电磁辐射能量的方式是不连续的,只能以发射或吸收“量子”的方式进行。每个量子的能量是

$$\epsilon = h\nu$$

也即是说辐射场与物质交换能量时必以量子 $h\nu$ 形式出现, ν 为电磁波频率, h 是一个很小的常数($h = 6.62559 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒),称为普朗克常数。这就是著名的普朗克能量量子化假设。普朗克在这一假设的基础上,推导出著名的普朗克黑体辐射公式。这一公式与实验结论符合得很好,从而证明了普朗克关于能量量子化假设的正确性,也为物理学开拓了新天地。之后爱因斯坦^[3]为了解释光电效应,提出辐射场本身以光量子形式存在。康普顿^[4]效应表明光子不但有能量,而且有动量,因此辐射场也有粒子性。所谓量子化现象,通俗地说就是能量并不是连续的,而是分立的。这揭示出能量的物质性。

5. 什么叫黑体及黑体辐射?“紫外光灾难”是什么意思?

答:任何物体总在吸收投射在它身上的辐射。物体吸收的辐射能量与投射到物体上的辐射能之比称为该物体的吸收系数。一般地,物体只吸收投射到它表面上的部分能量,吸收系数小于 1。假如一个物体完全吸收外来热辐射而不反射外来热辐

射,即吸收系数等于1,这样的物体叫黑体。例如一个密闭空腔上的小孔就是一个非常接近黑体的模型。因为一旦外来辐射通过小孔进入空腔后,就很难再通过小孔反射出来。另一方面,由于腔壁具有一定温度,它还会发出热辐射。当空腔腔壁的热辐射和内部的热辐射达到平衡后,实验发现频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 的辐射能量密度 $\rho_\nu d\nu$ 只与频率 ν 和绝对温度 T 有关。正是对黑体辐射能量密度和能流密度的研究,揭示经典物理理论与实验事实非常不符合,成为物理学天边的一朵乌云。又是这朵乌云酿成了物理学的一场变革,导致了量子论的诞生。上面提到的迈克尔逊—莫雷验证了光速的不变性,提出了光速不变原理,又是这朵“乌云”导致了相对论的诞生。

对黑体辐射能量密度的研究,利用经典热力学和电动力学,维恩给出的理论公式是

$$\rho_\nu d\nu = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \nu/T}$$

式中: C_1, C_2 是常数。该理论公式与实验结果比较发现,其只适用于高频区。

而利用热力学理论,得出的公式是

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k T \nu^2 d\nu$$

式中: c 是光速, k 是玻尔兹曼常数,这个公式叫瑞利—金斯公式,它只在低频区与实验相符。在高频区, $\nu \rightarrow \infty$ 时, $\rho_\nu \rightarrow \infty$,瑞利—金斯公式与实际非常不符合,而且总能量密度发散,即

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k T \int_0^\infty \nu^2 d\nu \rightarrow \infty$$

这显然是违背物理事实的,经典物理理论遇到了困难,这个结果称为紫外光灾难。

6. 经典物理理论遇到的困难还有哪些方面?

答:可以说一涉及微观领域,经典物理理论就遇到了困难。

原子的稳定性和原子光谱线状结构:原子结构的卢瑟福模型在经典理论中是无法理解的。因为电子既然绕原子核运动,则在这一加速过程中,由于辐射能量,必然使电子绕核运动的轨道变小,最后“落到”原子核中,也就是说,按照经典理论,卢瑟福的原子模型是不稳定的,这种原子必然坍缩成一团,但是实际上原子是稳定的。同时,按经典理论,电子一面绕核运动一面辐射能量,只能产生连续光谱,原子也就不可能产生线状光谱。但实际上原子光谱是不连续的,是线状光谱。

低温比热:经典统计物理的比热理论建立在能量均分定理的基础上,在和实验比较后,发现经典比热理论存在许多困难,如在极低温下比热 C_p 与温度 T^3 成正比,多原子分子的振动自由度对比热的贡献问题等,这些实验事实都是经典理论无法解释的。

还有如光电效应*、康普顿效应**、隧道效应***等都是经典物理理论无法解释的。

7. 牛顿创建了牛顿力学,能不能说普朗克创建了量子力学?

答:还不能这样说。从普朗克提出能量量子化假设后,物理学家还总是试图用经典力学描述物体运动状态的思维方式来研究微观粒子的运动规律。代表人物是玻尔^[5],他结合普朗克能量量子化假设提出量子化通则,从而解决了原子的稳定性问题以及原子光谱问题。他认为原子内部存在定态轨道,定态轨道的角动量遵循量子化通则:

$$\oint p(q) dq = nh \quad (n=1,2,3,\dots)$$

上式中, $p(q)$ 为广义动量, q 为广义坐标。原子光谱的线状结构是由于电子在定态轨道之间的跃迁而形成的,他提出当电子从能量由 E_n 的定态轨道跃迁到 E_m 的定态轨道时,所吸收或发射的辐射频率满足

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h}$$

利用玻尔的量子论可求得氢原子的能级并解释线状光谱。但玻尔的量子论毕竟是半经典理论,它不能解释氦原子和其他原子的光谱问题,这还不是量子力学。但玻尔的半经典的量子论对量子力学理论的建立起了重要作用。

8. 为什么微观粒子不能用经典力学来描述其运动规律呢?

答:这就要说一说物质波的概念了。“物质波”这个物理名词太奇妙了,最初提出这一概念的是德布罗意^[6]。让我们来看德布罗意 1923 年发表的论文中的一段叙述:“整个世纪以来,在光学上,比起波动的研究方法,是过于忽略粒子的研究方法;在物质理论上,是否发生了相反的错误呢?是不是我们把关于粒子的图像想得太多,而忽略了波的图像?”这就是说,对于粒子难道不可能也有波动的特性?德布罗意认为物质粒子也类似于光粒子同样具有波动的特性。他提出,能量为 E 和动量为 p 的粒子与波的频率 ν 和波长 λ 之间的关系是

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad p = \frac{h}{\lambda}n = \hbar k$$

式中: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}n$, k 称为波矢。

这个公式叫德布罗意关系式。令人惊奇的是,这个关于粒子的奇妙的关系式居然被实验所证实。戴维逊—革末(美国物理学家)首先用电子衍射实验完全证实了德布罗意假设的正确性。

然而要观察到物质粒子的波动性,只有微观粒子才有可能。对于宏观粒子,根据德布罗意关系式计算,其波长 λ 实在太短了,因而根本不可能用实验来证明实物粒子的波动性,以至于无法观察到它的波动性。所以对于宏观粒子,没有必要考虑其波动性,但对于微观粒子则必须同时考虑它的波动性,试图用描述宏观粒子的经典力学来描述微观粒子的状态势必失效。正是基于这一点,理论上必须突破经典理论框框而另辟蹊径,建立新的物理理论,这就是量子力学。所以说量子力学是20世纪20年代开始建立的物理理论。

量子力学正是在经典物理遇到困难,经受了曲折和阵痛,在总结实验事实的基础上诞生的一门新的物理学科。它是实实在在的科学创新理论。

量子力学的建立给人们有很多启示。科学素质包括科学精神、科学态度、科学方法和科学觉悟。其核心是科学创新。勇于探索的科学精神,实事求是的科学态度,遵循规律、发现规律并善于总结规律的科学方法和热爱科学、崇尚科学的科学觉悟是科学创新的基础。物理学的基础是实验,检验真理的唯一标准是实践。量子力学和相对论是20世纪伟大的自然科学创新理论,是近代物理的基石。

9. 量子力学课程的性质怎样?

答:量子力学是物理系学生的一门重要的基础理论课程。本课程同时也是物理工作者从事现代物理研究不可缺少的基本知识。本课程的学习过程是提高科学素质的基本训练过程。因此,量子力学也是理科学生和所有科技工作者应该了解的科学知识。

10. 量子力学的应用范围和发展领域有哪些?

答:量子力学的理论体系和研究方法应用范围非常广泛,它已超出了微观领域范围,在固体物理、原子物理、分子物理、介观物理、表面物理、原子核物理、天体物理、化学、生物学等各个领域中都有许多应用。

在量子力学基础上建立了原子物理学理论、原子核理论和凝聚态物理理论,统一解释了原子和分子光谱、元素周期表、各种分子键以及物性现象。它推动了物理、化学甚至生物学的统一进程。但是它不能处理粒子的产生、湮灭等现象。

在量子力学原理基础上,建立起描述电子和电磁场相互作用的理论,又形成量子电动力学,它对粒子和电磁场的处理都是波粒二象性的,统一了量子理论与狭义相对论。从量子力学原理出发,还建立了各种量子场论,如描述核力的介子场理论、粒子之间强相互作用的量子色动力学等。量子场论是量子力学基础上发展的研究微观现象的理论。

1927年,海特勒和伦敦用量子力学理论计算了氢分子中的键能,表明氢键由两

个电子在同一分子轨道中自旋配对(自旋取相反方向)使能量降低而成。这是用量子力学处理分子结构的开始,开创了量子化学。20世纪30年代,鲍林等人用量子力学原理提出了完整的化学键理论,阐明了化学键的本质。在量子化学中,化学现象和分子、原子的行为得到了统一。

11. 怎样学习量子力学?

答:学习量子力学如同学习经典物理。同样应勤于思考,悟物穷理,同样应通过归纳总结,推理演绎,精解习题等,达到对物理定律、定理的深刻理解,并在此基础上全面了解物理学内容和方法、物理语言、概念和物理图像以及物理学的历史、现状和前沿,掌握物理知识,建立物理思维,了解物理技术,这就为培养科学素质打下坚实基础。

另一方面,量子力学有其区别于经典物理的特点。量子力学的概念、表述形式、理论体系与经典物理有迥然差异,这就要求学习量子力学需要更新观念。不能用由于长期学习经典物理而形成的思维定势来质疑量子力学的基本概念,如物质波、几率波、轨道概念、不确定概念等,应该遵循“检验真理的唯一标准是实践”的原则,承认实验事实,这是观念更新的基础。反之,被思维定势的框框所束缚,反而学不好量子力学。近一个世纪以来,解决微观领域的物理问题,量子力学理论被证明是最成功的理论。理论本身的正确性也已被实践证明。量子力学理论将有新的观点、新的方法不断地充实,量子力学理论的思想光辉也将越来越璀璨夺目。

学习量子力学应重视掌握量子力学的理论体系和思想体系,同时也要重视量子力学的习题求解。应用量子力学概念和原理来求解习题,在求解习题的过程中巩固和深化对量子力学的理解,两者相辅相成,相得益彰。并且,在求解量子力学习题的过程中还可以培养科研能力。因此对求解量子力学习题应该引起足够的重视。

学习量子力学应具备高等数学基础。量子力学中态的表述、方程求解、表象形式都以微分方程、矩阵、几何学等数学形式表达和推导,读者在学习量子力学时应结合复习高等数学,应用高等数学知识,把学习量子力学和学习高等数学结合起来,这是一种行之有效的学习方法。不少同学在学习量子力学过程中既有攻关的艰辛,也有丰收的喜悦,通过学习量子力学提高了自身的综合素质。

正是“世上无难事,只怕有心人”,“书山有路勤为径,学海无涯悟作舟”。

★物理学家简介:

[1] 开耳芬(William Thomson, 1824—1907), 英国物理学家。1892年被封为“开耳芬勋爵”(Lord Kelvin), 以研究热学和电学及它们的应用方面最有成就。1848年创立绝对温标(又称开氏温标); 后把热力学第一定律和第二定律具体应用到热学、电学、弹性现象等方面, 对热力学的发展

起了一定作用。此外,还制成静电计、镜式电流计、双臂电桥电缆等很多电学仪器。1866年起,领导完成了横越大西洋海底电缆的安装工作。

[2] 普朗克(Max Planck, 1858—1947),德国物理学家。1900年为了克服经典物理学对黑体辐射现象解释上的困难,提出了物质辐射或吸收的能量只能是某一最小能量单位的整数倍的假说,对量子论的发展有重大影响。在热力学和统计物理学方面,如关于热力学定律的表述、非平衡态理论等,都有重要贡献。因提出量子假说,于1918年获得诺贝尔物理学奖。

[3] 爱因斯坦(Albert Einstein, 1879—1955),物理学家。生于德国,1933年因受纳粹政权迫害,迁居美国。在物理学的许多方面都有重大贡献,其中最重要的是在20世纪初的一些新发现的推动下,建立了狭义相对论(1905年);并在此基础上推广为广义相对论(1916年)。还提出光的量子概念,并用量子理论解释了光电效应、辐射过程和固体的比热。在阐明布朗运动、发展量子统计方面都有成就。后期致力于相对论“统一场论”的建立,企图把电磁场和引力场统一起来,惜无成效。爱因斯坦的理论,特别是相对论,揭示了空间和时间的辩证关系,加深了人们对物质和运动的认识,无论是在科学上,还是哲学上,都具有重要的历史意义。相对论的观念和方法对20世纪理论物理学的发展有极为深刻的影响。因理论物理学方面的贡献,特别是发现光电效应定律,他于1921年获得诺贝尔物理学奖。

[4] 康普顿(Arthur Holly Compton, 1892—1962),美国物理学家。研究X射线的散射有一定成就。1922—1923年,发现康普顿效应。为此,于1927年与发明威尔逊云室的威尔逊(Charles Thomson Rees Wilson, 1869—1959)共获诺贝尔物理学奖。此外,他对光子、 γ 射线和宇宙射线等方面,都有相当贡献。

[5] 玻尔(Niels Henrik David Bohr, 1885—1962),丹麦物理学家。他在普朗克量子假说和卢瑟福原子行星模型的基础上,于1913年提出氢原子结构和氢光谱的初步理论。稍后又提出了“对应原理”。对量子论和量子力学的建立起了重要作用。在原子核反应理论和解释重核裂变现象等方面,也有重要的贡献。为此,于1922年获诺贝尔物理学奖。以他为首的哥本哈根学派,对量子力学作出了与爱因斯坦和薛定谔学派不同观点的解释。

[6] 德布罗意(Louis Victor de Broglie, 1892—1987),法国物理学家。1924年首先提出物质波概念。这个论点为实验所证实,并成为建立量子力学的重要理论基础。

▲物理名词解释:

* 光电效应:在光的照射下,电路中产生电流或电流变化的现象。光电效应可分为三类:光的照射能使电子从金属表面逸出的现象称为外光电效应或光电发射;能使物体电阻值改变的现象叫内光电效应或光导效应;而能够产生一定方向电动势的现象称为阻挡层光电效应或光伏效应。光电效应的爱因斯坦公式是 $\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_0$, W_0 是逸出功。

* * 康普顿效应:短波长电磁辐射(如X射线、 γ 射线)射入物质而被散射后,在散射波中,除了原波长的波之外,还出现了波长增大的波,散射物的原子序数愈大,散射波中波长增大部分的强度和原波长的强度之比就愈小,并且发现随着散射角的增大,波长的改变量也增大。这现象在1922—1923年为美国物理学家康普顿所发现,故称康普顿效应(我国物理学家吴有训参与了该项

科研),有时又称康普顿散射以区别于其他一般的散射。

*** 隧道效应:按经典物理,当粒子的动能低于势垒高度时,粒子是不可能越过势垒的。但 α 粒子能谱和金属电子冷发射等实验事实证明当粒子动能低于势垒高度时,粒子照样能穿透势垒,这是微观粒子的波粒二象性具有的量子效应,称为隧道效应。

二、例题

1. 推导普朗克黑体辐射公式。

解:假设黑体腔壁上的荷电谐振子能量为 $\epsilon_0, 2\epsilon_0, 3\epsilon_0, \dots, n\epsilon_0$ 。

按照经典理论,能量为 $n\epsilon_0$ 的几率 $p_{n\epsilon_0} \propto e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}$

设 $p_{n\epsilon_0} = \alpha e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}$

则谐振子平均能量为

$$\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n\epsilon_0} \cdot n\epsilon_0 = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n\epsilon_0 e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}$$

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{\infty} p_{n\epsilon_0} = 1$$

$$\text{故 } \bar{E} = \frac{\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n\epsilon_0 \cdot e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}}{\sum_{n=1}^{\infty} p_{n\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}}$$

$$\text{利用级数展开公式 } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 和 } \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-ny} = -\frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ny}$$

$$\text{可得 } \bar{E} = \frac{\epsilon_0 e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}}} = \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} - 1}$$

空腔内单位体积内频率在 $\nu \sim \nu + d\nu$ 的振动数目为 $\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$, 所以能量密度为

$$\rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} - 1} d\nu$$

代入普朗克量子假设 $\epsilon_0 = h\nu$ 得

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

这就是普朗克黑体辐射公式。

2. 试利用普朗克公式证明维恩位移定律和斯忒藩—玻耳兹曼定律。

解:由普朗克黑体辐射公式

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

由 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$, 代入上式得

$$\rho_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

维恩公式适用于高频短波段, 上式可近似为

$$\rho_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} d\lambda$$

对应于 ρ_λ 取极大值, 有

$$\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = \left(-\frac{40\pi hc}{\lambda^6} + \frac{hc}{k\lambda^2 T} \cdot \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = 0$$

$$\lambda_m = \frac{hc}{5kT}$$

$$\text{故 } \lambda_m T = \frac{hc}{5k} = b \approx 2.89 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

上式即为维恩位移定律: 能量密度极大值所对应的波长 λ_m 与温度 T 成反比。

由普朗克公式给出总能量密度为

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

令 $y = \frac{h\nu}{kT}$, 再注意到 $\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, 可得

$$E = \alpha T^4 \quad \alpha = \frac{8\pi^2 k^4}{15c^3 h^3} \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

上式为斯忒藩—玻耳兹曼定律, α 为斯忒藩常数。

3. 频率为 ν 的 X 射线与静止的电子作弹性碰撞, X 射线和电子分别沿着角度 φ 和 θ 方向散射 (见图 1-1), 这时散射 X 射线的波长增加多少? 并求被散射电子的角度 θ 与 ν 和 φ 之间的函数关系。

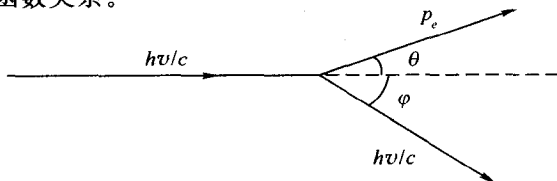


图 1-1

解: 设被散射 X 射线的频率为 ν_1 , 静止电子质量为 m , 速度为 v , 且 $\beta = v/c$ 。

根据动量守恒定律, 有

$$\frac{h\nu}{c} = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)\cos\varphi + \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\theta \quad (1)$$

$$0 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)\sin\varphi - \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\theta \quad (2)$$

根据能量守恒定律, 有

$$h\nu + mc^2 = h\nu_1 + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)三式消去 θ 和 v , 可得

$$\nu_1 = \frac{\nu}{\left(1 + \frac{h\nu}{mc^2}\right)(1 - \cos\varphi)}$$

由此得到

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi)$$

且对于电子的散射角度 θ 为

$$\cot\theta = \left(1 + \frac{h\nu}{mc^2}\right)\tan\frac{\varphi}{2}$$

4. 根据玻尔量子化通则求氢原子能量。

解: 玻尔量子化通则则为

$$\oint p(q) dq = nh$$

式中: q 为广义坐标, $p(q)$ 为广义动量。

对氢原子有

$$\oint p_\varphi d\varphi = nh$$

$$\text{即 } \oint p_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = nh$$

$$\text{故 } mvr = nh \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\text{按经典理论, 有 } m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{令 } e_s^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad e_s = (4\pi\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} e$$