普通高等学校少数民族预科教材（试用）

高等数学

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会　编

全一册

PUTONG GAODENG XUEXIAO SHAOSHU MINZU YUKE JIAOCAI (SHIYONG)

国家行政学院出版社
红旗出版社

高等数学

普通高等学校少数民族预科教材(试用)

高等数学

(全一册)

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

主 编 罗守山

编写人员 罗守山 章元崧 刘 学
熊 苹 王学严

国家行政学院出版社
红 旗 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/教育部《普通高等学校少数民族预科教材》编写委员会编．－北京：国家行政学院出版社，2007.2
普通高等学校少数民族预科教材
ISBN 978－7－80140－578－4

Ⅰ.高… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学－高等教育：少数民族教育－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第021009号

高等数学

（全一册）

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社 出版
北京市海淀区长春桥路6号(100089)
新华书店总经销
开封市第一印刷厂印刷
880×1230毫米 1/16开本 18印张 360千字
2007年2月第1版 2007年2月第1次印刷
印数：1－15000
ISBN 978-7-80140-578-4/0·49 定价：27.00元（全二册）

教育部“普通高等学校少数民族预科教材”编写委员会

主任委员　阿布都

副主任委员　次仁多布杰　张英海

编　　委　(按姓氏笔画为序)

马锦卫　于为苍　王笑施　乌丽亚

田崇雪　朱建平　刘　利　刘翠兰

邱树森　宋太成　宋茂强　张　澍

林　锋　罗守山　金炳镐　郑素花

钟义信　赖辉亮

前 言

为适应普通高等学校少数民族预科教学的需要，教育部民族教育司组织编写了普通高等学校少数民族预科《大学语文》、《汉语精读教程》、《高等数学》、《英语》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》等系列教材。本套教材的使用对象为普通高等学校少数民族一年制预科与两年制预科的学生。其中《大学语文》、一年制《英语》适用于一年制预科学生；《汉语精读教程》、两年制《英语》适用于两年制预科学生。《高等数学》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》适用于一年制和两年制预科学生。

本套教材是以教育部制定的各科课程教学大纲为依据，参照近年来预科学生的普遍水平，遵循有利于国家统一、民族团结、贴近生活、贴近社会的原则进行编写的。为保证教材的适用性，教材编写人员与部分预科教学的一线老师进行了充分的沟通。许多预科教学的一线教师承担了一定的编写工作。

本套教材充分考虑了少数民族学生的实际情况，针对预科阶段的教学特点，在高中阶段各科教学内容的基础上，指导学生对应掌握的学科知识进行查漏补缺，补预结合，使之全面提高。同时，教材在编写过程中，渗透了新的教育理念，真正贴近学生的需要，注重对学生学习能力的培养，力求把教材的思想性、科学性、趣味性、综合性统一起来，突出教材的适用性和可操作性，力求做到难易适度，由浅入深，梯度推进，逐步提高，使他们通过一年或两年预科阶段的学习达到教学的目的，成为维护民族团结、促进和谐发展、实现民族复兴的骨干人才。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

编写说明

由于近十年全国各少数民族自治区、聚居区经济和教育水平的不断发展，加之高中课程改革的不断深入，为了进一步提高全国各少数民族预科院校的教学质量，2005年12月教育部民族教育司在北京召开了编写“普通高等学校少数民族预科系列教材”启动会。

遵照会议精神，以及听取全国各少数民族预科院校师生的宝贵意见和建议，在全国高校民族预科《数学》教材第二版的基础上，结合《新高中数学课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》，我们编写了本系列普通高校少数民族预科《数学》教材。

在教育部民族教育司的指导下，在北京邮电大学领导的支持下，本套教材由北京邮电大学的数学教师负责编写。编写教师都是工作在一线的老师，很多都有着在民族预科班教学的丰富经验。

本套教材可以针对一年制（即全国班）和两年制（即新疆班）学生（含同步练习册），教师可以根据自己学生的情况，对教学内容做适当的删减。《数学》分上、下两册，上册主要为初等数学部分，下册为高等数学一元函数微积分部分。本书内容分为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分共5章内容，附录为章节习题答案。

在编写过程中，我们保留了全国高校民族预科《数学》教材第二版的主要知识体系，同时对与目前高校少数民族预科数学教学不适应的章节有所改动，对一些偏题、怪题有所删减，对新课程标准要求的内容有所增补，注重让学生学习掌握基本理论、基本知识、基本技能，培养学生应用数学解决实际问题的能力。更加注意了预科教材内容对高中知识和本科知识的衔接作用，增加了例题、习题，同时配有同步练习册，条理清晰、针对性强。同时，为了让学生对数学家有所了解，增加学生学习数学的兴趣，在部分章节前后有一些数学科学家的名言、生平介绍以及利用数学知识解决的生活中实际问题，供同学课外阅读。这增加了教材的人文性、实际应用性，可供各少数民族预科院校一年制和两年制学生使用。

参加本书编写的有罗守山（第1章）、章元崧（第2章）、刘学（第3章）、熊苹（第4章）、王学严（第5章），蒲明松、刘洪波参加了第1章的编写。

在本书的编写过程中，得到了全国各少数民族预科院校及师生的热情帮助，在本书的评审阶段，中央民族大学数学教研室的黄宁老师，宁夏社会主义学院的

李宁银老师，北京理工大学秦皇岛分校的程兆雄老师对本书提出了宝贵意见。同时，编者所在院校的领导和老师对本书的编写工作给予了全力的支持。在此，我们表示衷心的感谢。由于时间特别仓促，书中存在的问题及不足之处，敬请广大专家、师生批评指正并给予谅解。

编　者

目　录

第一章　函数与极限

> 伟大的数学家，诸如阿基米德、牛顿和高斯等，都把理论和应用视为同等重要而紧密相关.
>
> ——克莱因(F. Klein)
>
> 克莱因(Felix Christian Klein 1849～1925)，德国数学家，他对数学的贡献主要在函数理论上.

函数是高等数学研究的主要对象. 极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法. 本章在复习函数有关知识的基础上，着重介绍极限的概念和函数的连续性.

1.1　数列的极限

定义 1.1.1　设 A,B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A、B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射. 记作：$f:A\to B$.

定义 1.1.2　给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a\in A,b\in B$，如果元素 a 和元素 b 对应，则元素 b 叫做元素 a 的象，元素 a 叫做元素 b 的原象.

映射三要素　集合 A、B 以及对应法则 f，缺一不可；集合 A 中的元素一定有象，且唯一；集合 B 中的元素未必有原象，即使有也未必唯一. $A=\{$原象$\}$(映射的必要条件)，$B\supseteq\{$象$\}$(是否相等决定了是否是满射)，A、B 可以是数集，也可以是点集或其他集合. A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是两个不同的映射.

如图 1.1.1，设 A,B 分别是两个集合，为简明起见，设 A,B 分别是两个有限集.

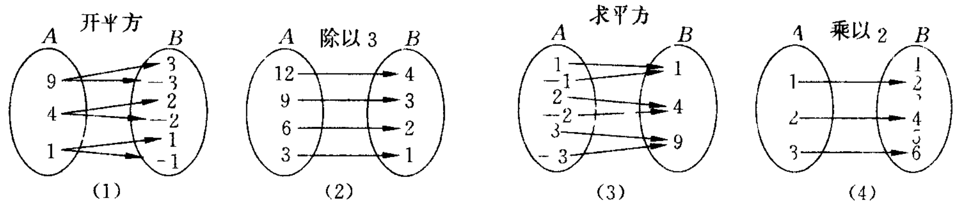

图 1.1.1　映射示意图

(2)(3)(4)这三个对应的共同特点是：对于左边集合 A 中的任何一个元素，在右边集合 B 中都有唯一的元素和它对应. 根据定义，(2)(3)(4)这三个对应都是集合 A 到集合 B 的映射；注意到其中(2)(4)是一对一，(3)是多对一. 对于(1)，在集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中都有两个元素与之相对应，因此，(1)不是集合 A 到集合 B 的映射.

我们要注意：一对一，多对一是映射，但一对多显然不是映射.

例 1.1.1 判断下列对应是否是集合 A 到集合 B 的映射?

(1)$A=\mathbf{R}, B=\mathbf{R}, f: x \to y=\frac{1}{x}$;

(2)$A=\mathbf{R}, B=\overline{\mathbf{R}^-}, f: x \to y=|x|$;

(3)$A=\{x|x\in\mathbf{R}^+\}, B=\{y|y\in\mathbf{R}\}, f: x\to y=\pm\sqrt{x}$

分析:由映射的定义可以判断.

解:(1)因为 $x=0$ 在 B 中没有对应的 y,所以(1)不是映射.

(2)这时,A 中的 $\pm x$ 都对应 B 中的一个像,故(2)为映射.

(3)因为 A 中元素对应 B 中两个像,属于一对多的情况,故(3)并非映射.

一一映射

首先观察图 1.1.2:

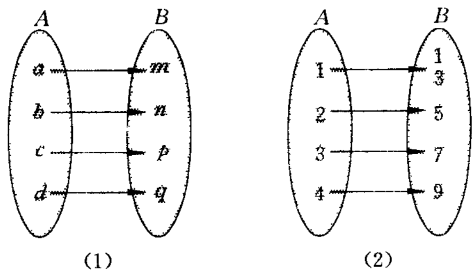

图 1.1.2 一一映射示意图

映射(1)有两个特点:

①集合 A 中不同的元素在 B 中有不同的象(意即不是多对一);

②集合 B 中的元素都有原象(没有多余的象).

这样的映射,比较特殊,称为一一映射.

定义 1.1.3 设 A,B 是两个集合,f 是集合 A 到集合 B 的映射,如果在这个映射中,对于集合 A 中不同的元素在 B 中有不同的象,而且集合 B 中的每一个元素都有原象,这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射

图 1.1.2 中(1)是 A 到 B 上的一一映射,(2)是 A 到 B 的映射,但不是一一映射.

1. 函数的概念

定义 1.1.4 设 A,B 是非空的数集,如果按某个确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个 x,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数,记作 $y=f(x), x\in A$,其中 x 叫自变量,x 的取值范围 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域;与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合 $C:\{f(x)|x\in A\}(C\subseteq B)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域. 函数符号 $y=f(x)$ 表示"y 是 x 的函数",有时简记作函数 $f(x)$.

例 1.1.2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$ 的定义域及值域.

解:x 需满足条件 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)>0$,

解得 $x>3$ 或 $x<-1$,定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. 其值域为 $(0,+\infty)$

2. 函数的性质

有界性:设 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如 $\exists M>0$,使 $\forall x\in X$,均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在

X 内是有界的，如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 内是无界的.

单调性：如果对于属于定义域 I 内某个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数（减函数）

奇偶性：如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x 都有 $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$，则称 $f(x)$ 为偶函数（奇函数）. 其图形关于 y 轴（原点）对称.

周期性：设 $y = f(x)$ 为 D 上的函数，如 $\exists a > 0, \forall x \in D, f(x+a) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为 D 上的周期函数，a 称为 $f(x)$ 的一个周期. 显然，如果 a 为 $f(x)$ 的周期，则 $\forall k \in \mathbf{N}, ka$ 也是 $f(x)$ 的周期，如果 $f(x)$ 存在最小的正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期. 一般说函数的周期都是指基本周期.

例 1.1.3　函数 $y = \sin x$ 就是周期为 2π 的奇函数.

3. 反函数

定义 1.1.5　一般地，函数 $y = f(x)(x \in A)$ 中设它的值域为 C. 根据这个函数中 x, y 的关系，用 y 把 x 表示出，得到 $x = \varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x = \varphi(y)$，x 在 A 中都有且只有唯一的值和它对应，那么，$x = \varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x = \varphi(y)(y \in C)$ 叫做函数 $y = f(x)(x \in A)$ 的反函数. 记做

$$x = f^{-1}(y).$$

在函数 $x = f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数，但习惯上我们仍用 x 表示自变量，y 表示函数，为此我们常常对调函数 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y，把它改写成 $y = f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

定义 1.1.6　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且函数 $u = g(x)$ 的值域 $g(D)$ 满足 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数：

$$y = f[g(x)], x \in \mathbf{D}$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

注：定义中的 $g(D) \subset D_1$ 是函数 f 与函数 g 能构成复合函数的关键所在. 如果 $g(D) \not\subset D_1$，则对某个 $x_0 \in \mathbf{D}, g(x_0) = u_0 \notin D_1$. 此时 $f(u_0)$ 将没有定义.

5. 初等函数

定义 1.1.7　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

(1) 幂函数

定义 1.1.8　形如 $y = x^\mu$（μ 是常数）的函数我们称之为幂函数.

幂函数的定义域随函数形式的不同而改变，具体而言就是随 $y = x^\mu$ 中 μ 的取值不同而改变.

当 μ 为正整数时定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

当 μ 为负整数时为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

当 $\mu = \dfrac{1}{a}$（a 为正整数），若 a 为奇数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，若为偶数，则为 $[0, +\infty)$.

当 μ 为无理数时，以公式 $x^\mu = e^{\mu \ln x}$ 作为 x^μ 的定义，故定义域为 $(0, +\infty)$.

$y = x^\mu$ 中，最常见的取值为 $\mu = 1、2、3、\frac{1}{2}、-1$，图 1.1.3～图 1.1.5 给出它们的图形.

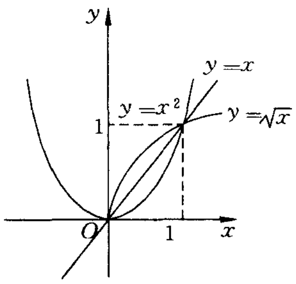

图1.1.3 $\mu=1,2,\frac{1}{2}$时幂函数的图形

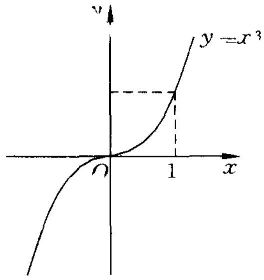

图 1.1.4 $\mu=3$ 时幂函数的图形

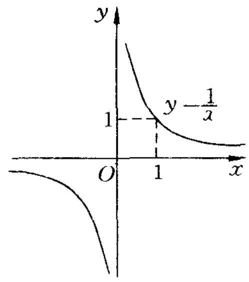

图1.1.5 $\mu=-1$ 时幂函数的图形

当 $\mu>0$ 时,函数是严格单调增加的.

当 $\mu<0$ 时,函数是严格单调减少的.

无论 μ 取何值.图形都经过(1,1)点.

(2)指数函数

定义 1.1.9 形如 $y=a^x$ 的函数称为指数函数.其中 a 为任意常数,并设 $a>0,a\neq1$.

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时函数为严格单调增加.

当 $0<a<1$ 时函数为严格单调减小.

不论 a 为何值($a>0,a\neq1$),函数图形都经过点(0,1).

函数 a^x 和函数$\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称.如图 1.1.6 所示.

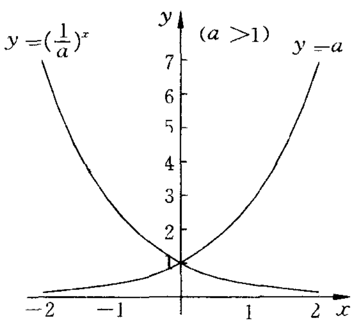

图 1.1.6 指数函数图形

(3)对数函数

定义 1.1.10 形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$的函数,我们称之为对数函数.其中 a 称为对数的底.

函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$就是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

因为 $y=a^x$ 的值域是$(0,+\infty)$,所以,函数 $y=\log_a x$ 的定义域是$(0,+\infty)$,其值域为$(-\infty,+\infty)$.

函数的图形:

当 $a>0$ 时函数为严格单调增加.

当 $0<a<1$ 时,函数为严格单调减少.

不论 a 为何值($a>0,a\neq1$)图形都经过(1,0)点.

常用对数函数:常用的对数函数有以 10 为底和以 e 为底的,这里 e=2.71828…为一常数.前者

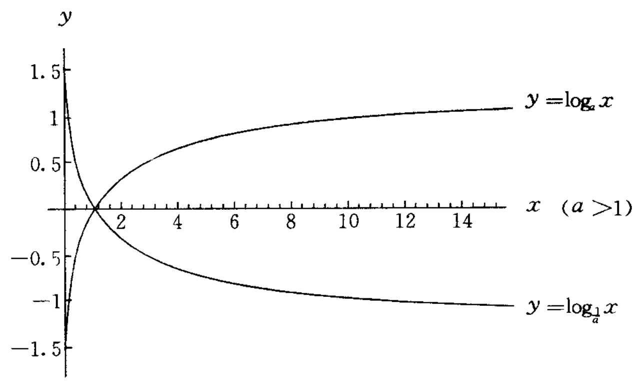

图 1.1.7　对数函数图形

称为常用对数,后者称为自然对数.通常将自然对数 $\log_e x$ 简记为 $\ln x$.

(4)三角函数

正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$ 正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$ 等等,它们的图形如图 1.1.8～图 1.1.11 所示.

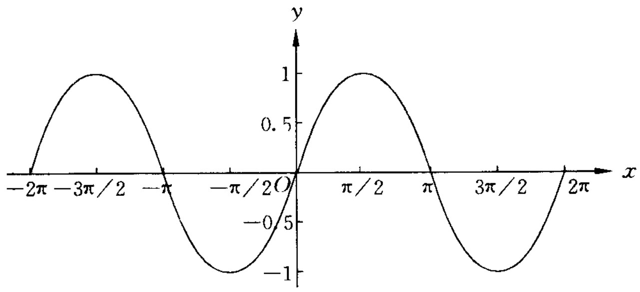

图 1.1.8　正弦函数

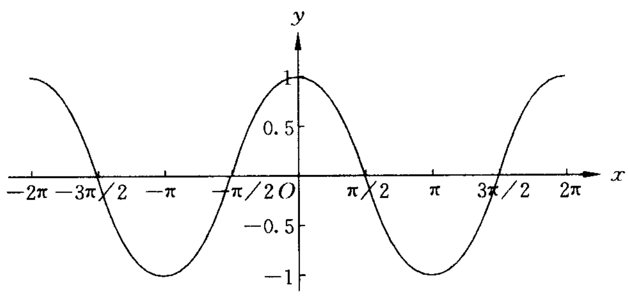

图 1.1.9　余弦函数

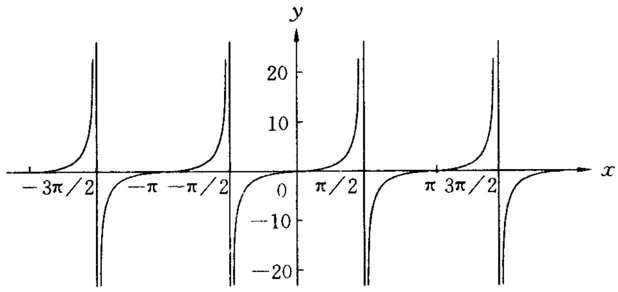

图 1.1.10　正切函数

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数,它们的定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$,值域都是闭区间 $[-1,1]$.

正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

正切函数和余切函数都以 π 为周期的周期函数,它们都是奇函数.

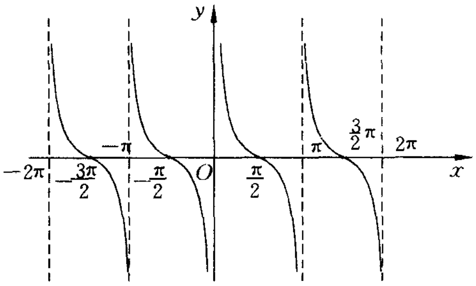

图 1.1.11 余切函数

此外,尚有另外两个三角函数,它们是:

正割函数 $y=\sec x$

它是余弦函数的倒数,即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

余割函数 $y=\csc x$

它是正弦函数的倒数,即

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数,并且在开区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数.

(5)反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数.三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,和 $y=\cot x$ 的反函数依次为:

反正弦函数 $y=\arcsin x$

反余弦函数 $y=\arccos x$

反正切函数 $y=\arctan x$

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

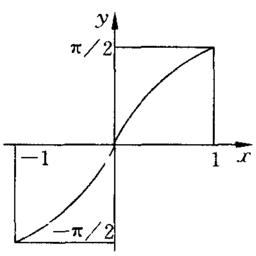

图 1.1.12 反正弦函数

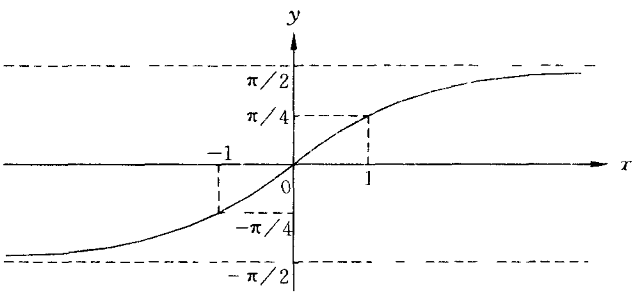

图 1.1.13 反正切函数

函数 $y=\arcsin x$ 与 $y=\arctan x$ 的图形如图 1.1.12,1.1.13 所示.

反三角函数的图形都可由相应的三角函数的图形按反函数作图法的一般规则作出.

这四个反三角函数都是多值函数.但是,我们可以选取这些函数的单值支.例如,把 arcsin$x$ 的值限制在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上,称为反正弦函数的主值,并记作 arcsin$x$.这样 $y=\arcsin x$ 就是定义在闭区间$[-1,1]$上单值函数,且有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

通常我们也称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数,它在闭区间$[-1,1]$上是单调增加的.

类似地,其他三个反三角函数的主值简称为反余弦函数,反正切函数和反余切函数,它们都是单值函数,它们的定义域、值域、单调性等如下:

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为闭区间$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,它在$[-1,1]$上单调减少.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,它在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为开区间$(0,\pi)$,它在$(-\infty,+\infty)$内单调减少.

例 1.1.4 某商场打八折促销,将商品提价后再降价,促销前价格可保证商场获得 25%的纯利润,则提价前后价格应满足什么函数关系?

解:设原价为 x,提价后为 y,则

$$\frac{80\%y-75\%x}{75\%x}=25\%,$$

化简可得

$$y=\frac{75}{64}x$$

故提价前后的价格应当满足关系式 $y=\frac{75}{64}x$.

1.1.1 数列极限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的.例如,我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;循此下去,每次边数加倍,一般地把内接正 $6\times2^{n-1}$边形的面积记为 $A_n(n\in\mathbf{N})$.这样,就得到一系列内接正多边形的面积:

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

它们构成一列有次序的数,当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确.但是无论 n 取值如何大,只要 n 取定了,A_n 终究只是多边形的面积,而还不是圆的面积.因此,设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋于无穷大),即内接正多边形的边数无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值,这个确定的数值就理解为圆的面积.这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数(所谓 数列)A_1,A_2,A_3,$\cdots$,A_n,$\cdots$当 $n\to\infty$时的极限.在圆面积问题中我们看到,正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.