21世纪高等院校规划教材

高等数学（第2版）

（上册）

唐宗贤　徐玉民　编

HIGHER MATHEMATICS

国防工业出版社

National Defense Industry Press

内容简介

本版《高等数学》上、下册系根据编者多年的教学经验，结合《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书上册包括函数、极限、连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用及微分方程等7章；下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数及其微分法，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等5章。每章后都配有习题，书后有习题答案。附录中给出了积分表和常用曲线图形。

本书具有理论严谨、语言通俗、说理浅显、叙述详尽等特点，书中习题分为概念理解题、基本要求题和提高题3种类型，以适合不同层次学生的要求，便于自学。

本书可供高等理工科院校作为教材使用，也可供报考研究生的读者备考复习时使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第2版). 上册/唐宗贤，徐玉民编. —2版. 北京：国防工业出版社，2007.7

ISBN 978-7-118-05250-3

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①唐...②徐... Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第108970号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×960 1/16 印张 25½ 字数 528 千字

2007年7月第2版第1次印刷 印数 1—5000册 总定价 67.00元 上册 35.00元 下册 32.00元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　　言

按照独立学院培养应用型本科人才的培养定位，参照国家关于高等工科学校高等数学教学基本要求，结合独立学院教学工作的实践，我们编写了本教材。自 2005 年出版以来，经过 05 级、06 级两届学生的使用，达到了良好的教学效果。使用本教材的教师和学生普遍反映：这套教材对加强学生的基本概念、基本方法和基本技能（应用）的培养和提高很有帮助，特别适合于学生自学。在内容编排上，从满足学生自身发展的目标出发，本教材又适合于不同层次学生的学习需求。习题选配上，部分（二）对学生掌握基本方法是有益的；部分（三）对学有余力的学生和准备报考硕士研究生的学生是有帮助的。每单元后面设置的检测题，既便于教师进行教学检查，又便于学生学完一个单元后总结提高。

第二版的修订工作，在保持第一版特色的基础上，主要集中在下述方面：一、更正了第一版的不当之处，删去了个别难度较大的习题；二、在每节后面增加了习作题，这对于学生复习基本内容是必要的；三、在每册书后面增加了两套期末考试的参考模拟试题，这对于学生了解期末考试所掌握的基本知识和试题题型是有帮助的；四、在本书上册中增加了关于极坐标的附录，这对于联系高中知识和大学教学是有益的。通过修订，进一步突出了第一版的特色，为独立学院"适应性"教学改革的深入，提供了坚实有力的保障。

在使用本书的教学过程中，燕山大学里仁学院的任课教师提出了有建设性的意见，为本书第二版修改工作增色很多。在此，对他们的支持表示感谢！

尽管作者对第一版的印刷错误进行了认真的校正，也难免会出现疏漏，对此给读者带来的使用不便，表示歉意。

编　者

2007 年 6 月于秦皇岛

目　　录

上　册

第一章　函数、极限、连续

本章所研究的概念是微积分的理论基础。函数是微积分的研究对象，极限方法是微积分的研究方法，是高等数学的基石，连续函数是微积分的主要研究对象。由此可见，函数、极限和连续是高等数学中重要的概念。

第一节　函　　数

函数是微积分的研究对象，所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。本节是在中学已学知识的基础上，进一步研究函数概念，总结中学里已经学过的一些函数，并介绍函数的简单性质。

一、变量及其变化区间

1. 常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，在研究过程中会遇到各种各样的量，例如长度、面积、体积、时间、速度、温度等。这些量一般分为两类：一类在研究过程中保持不变数值，称为常量；另一类在研究过程中可以取不同数值，称为变量。常量用 a、b、c、α、β 等字母表示，变量用 x、y、z、u、v 等字母表示。例如，研究圆的面积 A 与半径 r 的关系时，圆面积 A 和半径 r 看做变量，而圆周率 π 看做常量。又如，在研究自由落体运动时，路程 S 和时间 t 看做变量，而重力加速度 g 则看做常量。

值得注意的是，一个量是常量或变量不是一成不变的，是有条件的，这要看所研究的具体问题而定。例如，速度在匀速运动中是常量，而在匀加速运动中是变量。

2. 区间

我们研究变量，就是要研究变量的变化范围，称为变域。变域一般表现为一个区间，所谓区间就是介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段，a 与 b 称为区间的端点。当 $a < b$ 时，a 称为左端点，b 称为右端点。

区间可以分为以下几种：

(1) 闭区间　包括 a 和 b 两个端点在内的一切实数，记作 $[a,b]$，即 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$。

(2) 开区间　不包括 a 和 b 两个端点的一切实数，记作 (a,b)，即 $(a,b) = \{x \mid a <$

$x < b\}$。

(3) 半开半闭区间　只包括一个端点的一切实数,记作$[a,b)$或$(a,b]$,即$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$或$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$。

除上述有限区间外,还有下列无限区间:

(4) 小于 c 的一切实数记作$(-\infty,c)$,即$(-\infty,c) = \{x \mid x < c\}$。

(5) 大于 c 的一切实数记作$(c,+\infty)$,即$(c,+\infty) = \{x \mid x > c\}$。

(6) 全体实数,记作$(-\infty,+\infty)$,即$(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$。

读者不难把无穷区间$[c,+\infty)$和$(-\infty,c]$的定义表述出来。

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,a 叫邻域中心,δ 叫半径。用不等式表示,点 a 的 δ 邻域为集合$\{x \mid |x-a| < \delta\}$。有时需要考虑把中心去掉的邻域,称之为开心邻域,记作$\overset{0}{U}(a,\delta)$,即$(a-\delta,a) \cup (a,a+\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$。

二、函数概念

在微积分中所讨论的函数,其定义域和值域都是实数,记 R 为全体实数的集合。为了叙述的方便,引进下列符号:

R　实数集合;　　**N**　自然数集合;

C　复数集合;　　**Z**　整数集合;

Q　有理数集合;　　**J**　无理数集合;

$x \in A$　x 是 A 的元素;

$A \subset B$　集合 A 是集合 B 的子集;

$\exists$　"存在"或"找到";

$\forall$　"任意"或"给定";

$A \cup B$　集合 A 与集合 B 的并集;

$A \cap B$　集合 A 与集合 B 的交集;

为了引进函数概念,下面举几个例子。

例 1-1-1　自由落体运动。设 $t = 0(\mathrm{s})$ 开始,经过 $t(\mathrm{s})$ 后落下的距离为 $s(\mathrm{m})$。如果不计空气的阻力,则 s 与 t 之间有如下关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$。

设物体从开始到着地所需时间为 $T(\mathrm{s})$,则变量 t 的变化范围为 $0 \leqslant t \leqslant T$。当 t 在这个范围内每取一个值时,都可以从依存关系确定 s 的一个惟一确定的对应值。例如:

$t = 1\text{s}$ 时，$s = \frac{1}{2}g \times 1^2 = 4.9(\text{m})$

$t = 2\text{s}$ 时，$s = \frac{1}{2}g \times 2^2 = 19.6(\text{m})$

例 1-1-2 金属棒受热后要伸长，根据实验的结果，棒长 L 与温度 t(℃)之间有如下的依存关系：

$$L = L_0(1 + \alpha t)$$

其中 L_0 是 0℃ 时的棒长，α 是一个常数，称为“线膨胀系数”，它的值随着金属材料不同而不同。在 t 可以取值的范围内任取一值时，由依存关系可求出 L 的惟一的一个对应值。

在以上的两例中，变量之间的依存关系都由一个确定的公式给出。应当指出，变量之间的依存关系并不一定由公式给出，下面两例则说明依存关系也可以由表格和图像给出。

例 1-1-3 下面表格中记录了某河流在 40 年内的平均月流量 $q(10^8\text{m}^3)$ 和时间 t(月)之间的依存关系：

t/月	1	2	3	4	5	6
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72
t/月	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由上表可见，当月份 t 每取一个值时，月流量 q 就由表可确定惟一的对应值。

例 1-1-4 图 1-1 是某气象站自动温度记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间 t 和气温 t_1 之间的依存关系。

时间 t 的变化区间是 $0 \leqslant t \leqslant 24(\text{h})$，当 t 在这个范围内每取一个值时，由曲线可惟一确定温度 t_1(℃)的一个对应值。例如 $t = 14\text{h}, t_1 = 25℃$，这是一天的最高气温。

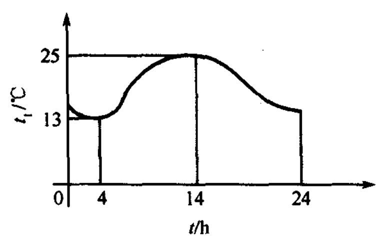

图 1-1

由以上各例可以看到，虽然它们所描述的问题中所考虑的量实际意义不同，但它们都表达了两个变量之间存在着依存关系，这种依存关系给出了一种确定的对应法则，依着这个法则，当一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应，两个变量之间的这种对应关系就是函数关系的实质。下面给出函数概念的定义。

1. 函数定义

定义 1-1-1 设有两个变量 x、y 和非空集合 $D \subset \mathbf{R}$，若存在一个对应规则 f，使得对每一 $x \in D$，都有惟一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，或称 f 是从 D 到

$\mathbf{R}$ 的一个映射，通常将函数简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$。

按照定义，对每个 $x \in D$，由对应法则 f，总有惟一确定的值 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，该值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f，即 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$。

函数的记号“f”也可以改用其他字母，如“φ”、“F”等。

在函数定义中主要有两个要素，即函数的定义域和对应法则。关于对应法则，在定义中用 f 表示。如果同时讨论几个不同函数，应该用不同的字母表示不同的对应法则。例如用 F、φ、g 等。如果两个函数的定义域和对应法则相同，尽管它们是用不同字母表示的，但它们仍表示是同一函数。关于定义域，如果考虑的是实际问题，应由问题的实际意义而定。如例 1-1-1 中的定义域是 $D_f = [0, T]$，例 1-1-3 中的定义域是 $D_f = \{1, 2, \cdots, 12\}$，例 1-1-4 中的定义域是 $D_f = [0, 24]$。如果不考虑函数的实际意义，我们规定函数的定义域，应是使函数算式有意义的自变量所能取的值的全体。例如，$y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$，$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$，$y = \lg(x-1)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$。

最后指出几点：

(1) 根据函数的定义，对于定义域中的每一 x 值，函数仅有一个确定值与之对应。有时为了讨论问题方便，我们可以把定义放宽，如果对于定义域内的任一 x 值，函数的对应值有几个，这时称函数为多值函数。例如，圆的方程 $x^2 + y^2 = r^2$，对于 $x \in (-r, r)$，可以确定 y 的对应值有两个，即 $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$，这是多值函数。

在遇到多值函数时，总是分成几个单值函数，称为单值支。例如，$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ 可以分成 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ 两个单值支。今后，如无特别声明，所讨论的函数均指单值函数。

(2) 函数的定义域不能是空集。

(3) 如果所研究的变量多于两个，则称所确定的函数为多元函数。关于多元函数，将在下册第九章中研究。

2. 函数的表示法

由上面所举的四个例子可见，函数有三种表示法：

(1) 解析法　函数的对应法则用一个公式或叫解析式子表示。如例 1-1-1 中的 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$，例 1-1-2 中的 $L = L_0(1 + \alpha T)$，解析法的优点是便于作理论研究与数值计算，但不直观。

(2) 表格法　如例 1-1-3 中的依存关系表。表格法的优点是便于直观查找，但不便于作理论研究，也不直观。

(3) 图示法　如例 1-1-4 中的图 1-1。图示法的优点是直观，但不便于作理论研究。

在实际应用中，往往是三种方法配合使用，对于用公式法表示的函数，我们常作出它的图形。

3. 函数的图形

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D_f。对于任一 $x \in D_f$，对应的函数值 y，这样就确定了平面上一点 (x, y)，当 x 遍取 D_f 的所有数值时，点 (x, y) 就确定了平面上一个集合 C，即

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

点集 C 称为函数 $y = f(x)$ 的图形(见图 1-2)。

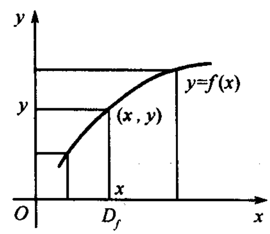

图 1-2

最后指出，有时由于变量之间的函数关系较为复杂，需用几个式子来表示，这时不能把它们理解为几个函数，而应理解为由几个式子表示的一个函数。例如，1g 冰由 -10℃ 上升到 10℃，它所吸收的热量 Q 与温度 t 之间存在着函数关系。由于冰的比热容为 $0.5 \times 4.18\text{J}/(\text{g} \cdot \text{K})$，水的比热容为 $1 \times 4.18\text{J}/(\text{g} \cdot \text{K})$，1g 0℃ 的冰变成 0℃ 的水的溶解热为 $80 \times 4.18\text{J}$，所以 Q 与 t 的函数关系为

$$Q = \begin{cases} 0.5 \times 4.18(t + 10) & -10 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1 \times 4.18(t + 85) & 0 < t \leqslant 10 \end{cases}$$

上面的函数叫分段函数。

下面举几个常见的函数的例子。

例 1-1-5　常数 $y = c$ 可以看成是一个特殊的函数，定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{c\}$，其图形是一条平行于 x 轴的直线(见图 1-3)。

例 1-1-6　函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，它的图形如图 1-4 所示。

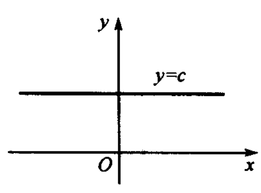

图 1-3

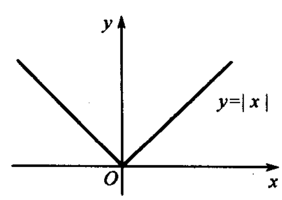

图 1-4

例 1-1-7 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 称为符号函数,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域是 $R_f=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-5 所示。

例 1-1-8 函数 $y=[x]$ 称为取整函数,其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。显然 $D_f=(-\infty,+\infty)$,$R_f=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,其函数图形为阶梯曲线,如图 1-6 所示。

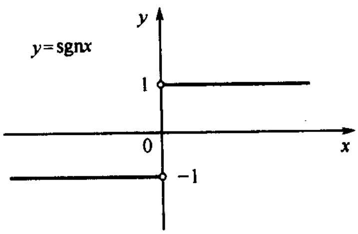

图 1-5

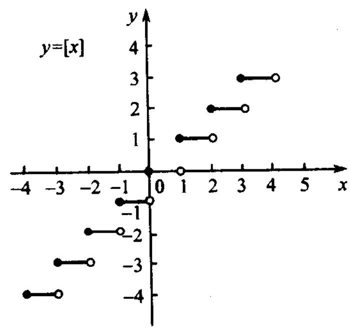

图 1-6

例 1-1-9 求 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域。

解 若使函数有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解此不等式组,得 $x\geqslant -2$ 和 $x\neq\pm1$。函数的定义域 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

例 1-1-10 求函数 $y=\arcsin(3x-1)+\lg(1-x)$ 的定义域。

解 若使函数有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}|3x-1|\leqslant 1\\ 1-x>0\end{cases}$$

解此联立不等式,得 $x<1$ 和 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$,函数的定义域为 $D_f=\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$。

例 1-1-11 已知 $f(x)=x4^{x-2}$,求 $f(-2)$,$f(2)$,$f(t^2)$,$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$。

解 $f(2)=2$,$f(-2)=-2\times4^{-4}$,$f(t^2)=t^2 4^{t^2-2}$,$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t}4^{\frac{1}{t}-2}$

例 1-1-12 已知 $f(x) = x^3 + 1$，求 $f(x^2)$，$[f(x)]^2$。

解 $f(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$

$$[f(x)]^2 = [x^3 + 1]^2$$

例 1-1-13 已知 $f(x-1) = x^2 + 2x + 4$，求 $f(x)$。

解 令 $x - 1 = t, x = t + 1$

$$f(t) = (t+1)^2 + 2(t+1) + 4 = t^2 + 4t + 7$$

所以
$$f(x) = x^2 + 4x + 7$$

例 1-1-14 判断函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数。说明理由，并指出在哪个区间上是相同的。

(1) $f(x) = x, \varphi(x) = \sqrt{x^2}$

(2) $f(x) = 2\lg x, \varphi(x) = \lg x^2$

解 (1) 显然 $D_f = D_\varphi = (-\infty, +\infty)$，但对应法则不同，因为 $\varphi(x) = |x|$，当 $x < 0$ 时，$\varphi(x) = -x, f(x) = x$。两个函数在 $[0, +\infty)$ 上是相同的。

(2) 因为 $D_f = (0, +\infty), D_\varphi = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，定义域不同，故不是同一函数。两个函数在 $(0, +\infty)$ 上是相同的。

例 1-1-15 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geqslant 0 \\ x^2 + 4 & x < 0 \end{cases}$ 的定义域，试计算 $f(0), f(1), f(-1), f(x-1)$ 并画 $y = f(x)$ 的图形。

解 $D_f = (-\infty, +\infty)$

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(-1) = 5$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1 & x-1 \geqslant 0 \\ (x-1)^2 + 4 & x - 1 < 0 \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geqslant 1 \\ x^2 - 2x + 5 & x < 1 \end{cases}$$

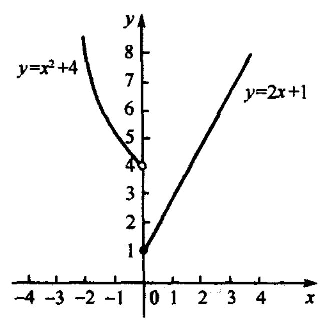

图 1-7

函数的图形如图 1-7 所示。

三、函数的简单性质

1. 函数的有界性

如果存在正数 M，使对一切 $x \in I$，恒有不等式 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，其中 $I \subset D_f$，则