

☆ 21世纪高等院校规划教材 ☆

高等数学

(第2版)

(上册)

唐宗贤 徐玉民 编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

内 容 简 介

本版《高等数学》上、下册系根据编者多年的教学经验,结合《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书上册包括函数、极限、连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用及微分方程等7章;下册包括空间解析几何与向量代数,多元函数及其微分法,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数等5章。每章后都配有习题,书后有习题答案。附录中给出了积分表和常用曲线图形。

本书具有理论严谨、语言通俗、说理浅显、叙述详尽等特点,书中习题分为概念理解题、基本要求题和提高题3种类型,以适合不同层次学生的要求,便于自学。

本书可供高等理工院校作为教材使用,也可供报考研究生的读者备考复习时使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(第2版). 上册/唐宗贤,徐玉民编.—2版.

北京:国防工业出版社,2007.7

ISBN 978-7-118-05250-3

I. 高... II. ①唐...②徐... III. 高等数学—高等学校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 108970 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×960 1/16 印张 25½ 字数 528 千字

2007 年 7 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—5000 册 总定价 67.00 元 上册 35.00 元
下册 32.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

按照独立学院培养应用型本科人才的培养定位,参照国家关于高等工科学学校高等数学教学基本要求,结合独立学院教学工作的实践,我们编写了本教材。自2005年出版以来,经过05级、06级两届学生的使用,达到了良好的教学效果。使用本教材的教师和学生普遍反映:这套教材对加强学生的基本概念、基本方法和基本技能(应用)的培养和提高很有帮助,特别适合于学生自学。在内容编排上,从满足学生自身发展的目标出发,本教材又适合于不同层次学生的学习需求。习题选配上,部分(二)对学生掌握基本方法是有益的;部分(三)对学有余力的学生和准备报考硕士研究生的学生是有帮助的。每单元后面设置的检测题,既便于教师进行教学检查,又便于学生学完一个单元后总结提高。

第二版的修订工作,在保持第一版特色的基础上,主要集中在下述方面:一、更正了第一版的不当之处,删去了个别难度较大的习题;二、在每节后面增加了习题题,这对于学生复习基本内容是必要的;三、在每册书后面增加了两套期末考试的参考模拟试题,这对于学生了解期末考试所掌握的基本知识和试题题型是有帮助的;四、在本书上册中增加了关于极坐标的附录,这对于联系高中知识和大学教学是有益的。通过修订,进一步突出了第一版的特色,为独立学院“适应性”教学改革深入,提供了坚实有力的保障。

在使用本书的教学过程中,燕山大学里仁学院的任课教师提出了有建设性的意见,为本书第二版修改工作增色很多。在此,对他们的支持表示感谢!

尽管作者对第一版的印刷错误进行了认真的校正,也难免会出现疏漏,对此给读者带来的使用不便,表示歉意。

编 者

2007年6月于秦皇岛

目 录

上 册

第一章 函数、极限、连续	1
第一节 函数	1
一、变量及其变化区间	1
二、函数概念	2
三、函数的简单性质	7
四、反函数及其图形	10
五、复合函数	12
六、基本初等函数 初等函数	13
*七、双曲函数	17
*八、经济学中常用的函数	19
第二节 极限概念	23
一、极限概念导引	23
二、数列的极限	24
三、函数的极限	31
第三节 无穷小量与无穷大量	37
一、无穷小量	37
二、无穷大量	38
三、无穷小量与无穷大量的关系	39
四、无穷小量运算定理	39
第四节 极限的运算法则	41
第五节 两个重要的极限	46
一、夹逼定理(极限存在的准则)	46
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	46

	三、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	48
第六节	无穷小的比较	50
	一、无穷小的比较	50
	二、等价无穷小的性质	53
第七节	函数的连续性与间断点	54
	一、函数连续性的概念	54
	二、函数的间断点	56
第八节	连续函数的运算与初等函数的连续性	59
	一、连续函数的四则运算	59
	二、复合函数的连续性	59
	三、反函数的连续性	59
	四、初等函数的连续性	60
第九节	闭区间上连续函数的性质	60
	一、最大值定理和最小值定理	60
	二、有界性定理	61
	三、介值定理(中间值定理)	61
习题一		62
本章学习要点		77
第一单元(函数、极限、连续)检测题		79
第二章 导数与微分		83
第一节 导数概念		83
	一、变化率问题举例	83
	二、导数的定义	85
	三、导数的几何意义	87
	四、函数的可导性与连续性的关系	88
第二节 基本初等函数导数公式 导数的四则运算法则		90
	一、基本初等函数的导数公式	90
	二、导数的四则运算法则	92
第三节 反函数求导法则 复合函数求导法则		95
	一、反函数求导法则	95
	二、反三角函数的导数	96
	三、复合函数求导法则	97

第四节	导数的基本公式和运算法则总结 * 双曲函数和反双曲函数的导数	100
	一、导数的基本公式	101
	二、导数的运算法则	101
	* 三、双曲函数的导数	101
	四、反双曲函数的导数	102
第五节	高阶导数	102
第六节	隐函数的导数 由参数方程所确定函数的导数 相关变化率	105
	一、隐函数及其导数	105
	二、幂指数函数求导 取对数求导法	107
	三、由参数方程所确定函数的导数	108
	* 四、极坐标系中曲线的切线与矢径的交角公式	110
	五、相关变化率问题	111
第七节	函数的微分法及其应用	112
	一、微分的概念	113
	二、微分的几何意义	114
	三、微分的运算	114
	四、微分在近似计算中的应用	116
	* 五、微分在误差估计中的应用	118
*第八节	导数在经济分析中的应用	119
	一、边际概念	119
	二、边际成本	120
	三、边际收益	121
	四、函数的弹性	122
	五、常用函数的弹性公式	123
	六、弹性的四则运算	123
	七、弹性应用举例	124
习题二		126
本章学习要点		136
第三章	导数的应用	139
第一节	中值定理	139
	一、罗尔(Rolle)定理	139
	二、拉格朗日(Lagrange)定理	141

三、柯西(Cauchy)定理	143
第二节 未定式求极限与罗必塔法则	144
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	144
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	146
三、其他类型未定式极限	148
第三节 函数的单调性与极值的判别法	149
一、函数单调性的判别法	149
二、函数的极值及其求法	151
第四节 函数的最大值、最小值及其应用问题	154
第五节 曲线的凹凸性与拐点	155
一、曲线的凹凸性	155
二、曲线的拐点	157
第六节 函数图形的描绘	158
一、曲线的渐近线	158
二、函数图形描绘举例	160
第七节 平面曲线的曲率	162
一、曲率概念	163
二、弧长的微分	164
三、曲率的计算公式	165
四、曲率圆、曲率半径和曲率中心	167
*第八节 方程的近似解	170
一、二分法	170
二、切线法	171
习题三	172
本章学习要点	181
第二单元(一元函数微分学)检测题	183
第四章 不定积分	187
第一节 不定积分的概念与性质	187
一、原函数概念	187
二、不定积分概念	188
三、基本积分表	190

四、不定积分的性质	191
第二节 换元积分法	193
一、第一类换元积分法	193
二、第二类换元积分法	201
第三节 分部积分法	206
第四节 有理函数的积分	211
一、化真分式为简单分式之和	211
二、四种最简分式的积分	214
三、有理函数积分举例	216
第五节 三角函数有理式的积分	218
* 一、形如 $\int R(\sin x)\cos x dx$, $\int R(\cos x)\sin x dx$ 和 $\int R(\tan x)\sec^2 x dx$ 的积分	218
* 二、形如 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$ 和 $\int R(\tan x) dx$ 的积分	218
三、形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 的积分	219
*第六节 简单无理式的积分	221
一、形如 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$ 的积分	221
二、形如 $\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 的积分	222
三、形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ 的积分	223
习题四	224
本章学习要点	230
第五章 定积分	232
第一节 定积分的概念	232
一、实例	232
二、定积分的定义	235
三、定积分的存在条件	236
四、定积分的几何意义	236
第二节 定积分的性质	237
第三节 微积分的基本公式	241
一、变速直线运动中路程函数与速度函数的关系	241

二、变上限的定积分及其对上限的导数	241
三、牛顿-莱布尼兹公式	243
第四节 定积分的换元积分法	245
一、第一类换元积分法	245
二、第二类换元积分法	246
第五节 定积分的分部积分法	250
*第六节 定积分的近似计算	253
一、矩形法	253
二、梯形法	254
三、抛物线法(辛普生公式)	254
习题五	257
本章学习要点	263
第六章 定积分的应用 广义积分初步	265
第一节 平面图形的面积	266
一、直角坐标系下平面图形的面积	266
二、极坐标系下平面图形的面积	270
第二节 体积	271
一、平行截面面积为已知的立体的体积	271
二、旋转体的体积	272
第三节 平面曲线的弧长	273
一、弧长的概念	273
二、弧长的计算公式	274
第四节 定积分的其他应用	275
一、变力作功问题	276
二、水压力问题	277
三、引力	278
四、物体的转动惯量	279
五、平均值问题	280
*六、定积分在经济问题中的应用举例	281
第五节 广义积分初步	285
一、无穷区间上的广义积分	285
二、无界函数的广义积分	287

习题六·····	289
本章学习要点·····	293
第三单元(一元函数积分学)检测题·····	295
第七章 微分方程 ·····	299
第一节 微分方程的基本概念·····	299
第二节 一阶微分方程·····	302
一、可分离变量的微分方程·····	302
二、齐次方程·····	306
三、一阶线性微分方程·····	310
第三节 可降阶的高阶微分方程·····	314
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的方程·····	314
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的方程·····	315
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的方程·····	318
第四节 高阶线性微分方程·····	319
一、二阶线性齐次微分方程·····	319
二、二阶线性非齐次微分方程·····	321
*三、常数变易法·····	322
第五节 常系数线性微分方程·····	324
一、二阶常系数线性齐次微分方程·····	324
二、二阶常系数线性非齐次微分方程·····	328
*第六节 欧拉方程·····	333
习题七·····	335
本章学习要点·····	342
第四单元(微分方程)检测题·····	344
习题答案与提示·····	346
高等数学期末参考试题(第一学期)·····	376
附录 A 积分表·····	380
附录 B 几种常用的曲线·····	391
附录 C 极坐标·····	394
参考文献·····	397

第一章 函数、极限、连续

本章所研究的概念是微积分的理论基础。函数是微积分的研究对象,极限方法是微积分的研究方法,是高等数学的基石,连续函数是微积分的主要研究对象。由此可见,函数、极限和连续是高等数学中重要的概念。

第一节 函 数

函数是微积分的研究对象,所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。本节是在中学已学知识的基础上,进一步研究函数概念,总结中学里已经学过的一些函数,并介绍函数的简单性质。

一、变量及其变化区间

1. 常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中,在研究过程中会遇到各种各样的量,例如长度、面积、体积、时间、速度、温度等。这些量一般分为两类:一类在研究过程中保持不变数值,称为常量;另一类在研究过程中可以取不同数值,称为变量。常量用 a, b, c, α, β 等字母表示,变量用 x, y, z, u, v 等字母表示。例如,研究圆的面积 A 与半径 r 的关系时,圆面积 A 和半径 r 看做变量,而圆周率 π 看做常量。又如,在研究自由落体运动时,路程 S 和时间 t 看做变量,而重力加速度 g 则看做常量。

值得注意的是,一个量是常量或变量不是一成不变的,是有条件的,这要看所研究的具体问题而定。例如,速度在匀速运动中是常量,而在匀加速运动中是变量。

2. 区间

我们研究变量,就是要研究变量的变化范围,称为变域。变域一般表现为一个区间,所谓区间就是介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数,在数轴上就是从 a 到 b 的线段, a 与 b 称为区间的端点。当 $a < b$ 时, a 称为左端点, b 称为右端点。

区间可以分为以下几种:

(1) 闭区间 包括 a 和 b 两个端点在内的一切实数,记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 。

(2) 开区间 不包括 a 和 b 两个端点的一切实数,记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a <$

$x < b\}$ 。

(3) 半开半闭区间 只包括一个端点的一切实数,记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$,即 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 或 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 。

除上述有限区间外,还有下列无限区间:

(4) 小于 c 的一切实数记作 $(-\infty, c)$,即 $(-\infty, c) = \{x \mid x < c\}$ 。

(5) 大于 c 的一切实数记作 $(c, +\infty)$,即 $(c, +\infty) = \{x \mid x > c\}$ 。

(6) 全体实数,记作 $(-\infty, +\infty)$,即 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 。

读者不难把无穷区间 $[c, +\infty)$ 和 $(-\infty, c]$ 的定义表述出来。

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$, a 叫邻域中心, δ 叫半径。用不等式表示,点 a 的 δ 邻域为集合 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 。有时需要考虑把中心去掉的邻域,称之为开心邻域,记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$,即 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 。

二、函数概念

在微积分中所讨论的函数,其定义域和值域都是实数,记 R 为全体实数的集合。为了叙述的方便,引进下列符号:

R 实数集合; N 自然数集合;

C 复数集合; Z 整数集合;

Q 有理数集合; J 无理数集合;

$x \in A$ x 是 A 的元素;

$A \subset B$ 集合 A 是集合 B 的子集;

$\exists$ “存在”或“找到”;

$\forall$ “任意”或“给定”;

$A \cup B$ 集合 A 与集合 B 的并集;

$A \cap B$ 集合 A 与集合 B 的交集;

为了引进函数概念,下面举几个例子。

例 1-1-1 自由落体运动。设 $t = 0(s)$ 开始,经过 $t(s)$ 后落下的距离为 $s(m)$ 。如果不计空气的阻力,则 s 与 t 之间有如下关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 $g = 9.8m/s^2$ 。

设物体从开始到着地所需时间为 $T(s)$,则变量 t 的变化范围为 $0 \leq t \leq T$ 。当 t 在这个范围内每取一个值时,都可以从依存关系确定 s 的一个惟一确定的对应值。例如:

$$t = 1\text{s 时}, s = \frac{1}{2}g \times 1^2 = 4.9(\text{m})$$

$$t = 2\text{s 时}, s = \frac{1}{2}g \times 2^2 = 19.6(\text{m})$$

例 1-1-2 金属棒受热后要伸长,根据实验的结果,棒长 L 与温度 $t(^{\circ}\text{C})$ 之间有如下
的依存关系:

$$L = L_0(1 + \alpha t)$$

其中 L_0 是 0°C 时的棒长, α 是一个常数,称为“线膨胀系数”,它的值随着金属材料不同而不同。在 t 可以取值的范围内任取一值时,由依存关系可求出 L 的惟一的一个对应值。

在以上的两例中,变量之间的依存关系都由一个确定的公式给出。应当指出,变量之间的依存关系并不一定由公式给出,下面两例则说明依存关系也可以由表格和图像给出。

例 1-1-3 下面表格中记录了某河流在 40 年内的平均月流量 $q(10^8\text{m}^3)$ 和时间 $t(\text{月})$ 之间的依存关系:

$t/\text{月}$	1	2	3	4	5	6
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72
$t/\text{月}$	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由上表可见,当月份 t 每取一个值时,月流量 q 就由表可确定惟一的对应值。

例 1-1-4 图 1-1 是某气象站自动温度记录仪描出的某一天气温变化曲线,它给出了时间 t 和气温 t_1 之间的依存关系。

时间 t 的变化区间是 $0 \leq t \leq 24(\text{h})$,当 t 在这个范围内每取一个值时,由曲线可惟一确定温度 $t_1(^{\circ}\text{C})$ 的一个对应值。例如 $t = 14\text{h}$, $t_1 = 25^{\circ}\text{C}$,这是一天的最高气温。

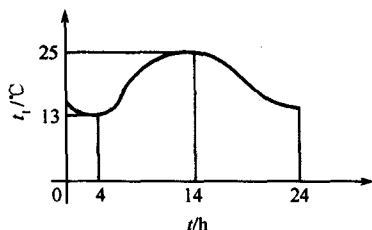


图 1-1

由以上各例可以看到,虽然它们所描述的问题中所考虑的量实际意义不同,但它们都表达了两个变量之间存在着依存关系,这种依存关系给出了一种确定的对应法则,依着这个法则,当一个变量在其变化范围内任取一个值时,另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应,两个变量之间的这种对应关系就是函数关系的实质。下面给出函数概念的定义。

1. 函数定义

定义 1-1-1 设有两个变量 x, y 和非空集合 $D \subset \mathbf{R}$,若存在一个对应规则 f ,使得对每一 $x \in D$,都有惟一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,或称 f 是从 D 到

$\mathbf{R}$ 的一个映射,通常将函数简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$ 。

按照定义, 对每个 $x \in D$, 由对应法则 f , 总有惟一确定的值 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 该值称为函数在点 x 处的函数值, 记作 $f(x)$ 。函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域, 记作 R_f , 即 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 。

函数的记号“ f ”也可以改用其他字母, 如“ φ ”、“ F ”等。

在函数定义中主要有两个要素, 即函数的定义域和对应法则。关于对应法则, 在定义中用 f 表示。如果同时讨论几个不同函数, 应该用不同的字母表示不同的对应法则。例如用 F 、 φ 、 g 等。如果两个函数的定义域和对应法则相同, 尽管它们是用不同字母表示的, 但它们仍表示是同一函数。关于定义域, 如果考虑的是实际问题, 应由问题的实际意义而定。如例 1-1-1 中的定义域是 $D_f = [0, T]$, 例 1-1-3 中的定义域是 $D_f = \{1, 2, \dots, 12\}$, 例 1-1-4 中的定义域是 $D_f = [0, 24]$ 。如果不考虑函数的实际意义, 我们规定函数的定义域, 应是使函数算式有意义的自变量所能取的值的全体。例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1, 1]$, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$, $y = \lg(x-1)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$ 。

最后指出几点:

(1) 根据函数的定义, 对于定义域中的每一 x 值, 函数仅有一个确定值与之对应。有时为了讨论问题方便, 我们可以把定义放宽, 如果对于定义域内的任一 x 值, 函数的对应值有几个, 这时称函数为多值函数。例如, 圆的方程 $x^2 + y^2 = r^2$, 对于 $x \in (-r, r)$, 可以确定 y 的对应值有两个, 即 $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, 这是多值函数。

在遇到多值函数时, 总是分成几个单值函数, 称为单值支。例如, $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ 可以分成 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ 两个单值支。今后, 如无特别声明, 所讨论的函数均指单值函数。

(2) 函数的定义域不能是空集。

(3) 如果所研究的变量多于两个, 则称所确定的函数为多元函数。关于多元函数, 将在下册第九章中研究。

2. 函数的表示法

由上面所举的四个例子可见, 函数有三种表示法:

(1) 解析法 函数的对应法则用一个公式或叫解析式子表示。如例 1-1-1 中的 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 例 1-1-2 中的 $L = L_0(1 + \alpha T)$, 解析法的优点是便于作理论研究与数值计算, 但不直观。

(2) 表格法 如例 1-1-3 中的依存关系表。表格法的优点是便于直观查找,但不便于作理论研究,也不直观。

(3) 图示法 如例 1-1-4 中的图 1-1。图示法的优点是直观,但不便于作理论研究。

在实际应用中,往往是三种方法配合使用,对于用公式法表示的函数,我们常作出它的图形。

3. 函数的图形

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D_f 。对于任一 $x \in D_f$, 对应的函数值 y , 这样就确定了平面上一点 (x, y) , 当 x 遍取 D_f 的所有数值时, 点 (x, y) 就确定了平面上一个集合 C , 即

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

点集 C 称为函数 $y = f(x)$ 的图形(见图 1-2)。

最后指出,有时由于变量之间的函数关系较为复杂,需用几个式子来表示,这时不能把它们理解为几个函数,而应理解为由几个式子表示的一个函数。例如,1g 冰由 -10°C 上升到 10°C , 它所吸收的热量 Q 与温度 t 之间存在着函数关系。由于冰的比热容为 $0.5 \times 4.18\text{J}/(\text{g} \cdot \text{K})$, 水的比热容为 $1 \times 4.18\text{J}/(\text{g} \cdot \text{K})$, 1g 0°C 的冰变成 0°C 的水的溶解热为 $80 \times 4.18\text{J}$, 所以 Q 与 t 的函数关系为

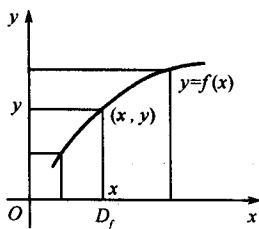


图 1-2

$$Q = \begin{cases} 0.5 \times 4.18(t + 10) & -10 \leq t \leq 0 \\ 1 \times 4.18(t + 85) & 0 < t \leq 10 \end{cases}$$

上面的函数叫分段函数。

下面举几个常见的函数的例子。

例 1-1-5 常数 $y = c$ 可以看成是一个特殊的函数, 定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{c\}$, 其图形是一条平行于 x 轴的直线(见图 1-3)。

例 1-1-6 函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-4 所示。

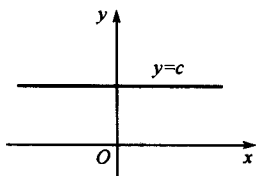


图 1-3

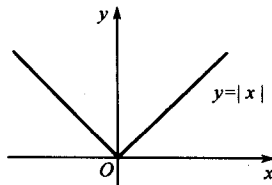


图 1-4

例 1-1-7 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域是 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-5 所示。

例 1-1-8 函数 $y = [x]$ 称为取整函数, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。显然 $D_f = (-\infty, +\infty)$, $R_f = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 其函数图形为阶梯曲线, 如图 1-6 所示。

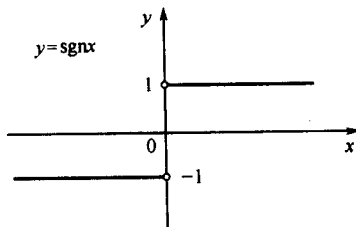


图 1-5

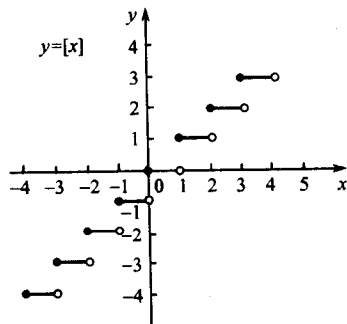


图 1-6

例 1-1-9 求 $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域。

解 若使函数有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

解此不等式组, 得 $x \geq -2$ 和 $x \neq \pm 1$ 。函数的定义域 $D_f = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

例 1-1-10 求函数 $y = \arcsin(3x-1) + \lg(1-x)$ 的定义域。

解 若使函数有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} |3x-1| \leq 1 \\ 1-x > 0 \end{cases}$$

解此联立不等式, 得 $x < 1$ 和 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, 函数的定义域为 $D_f = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ 。

例 1-1-11 已知 $f(x) = x4^{x-2}$, 求 $f(-2)$, $f(2)$, $f(t^2)$, $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 。

解 $f(2) = 2$, $f(-2) = -2 \times 4^{-4}$, $f(t^2) = t^2 4^{t^2-2}$, $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} 4^{\frac{1}{t}-2}$

例 1-1-12 已知 $f(x) = x^3 + 1$, 求 $f(x^2)$, $[f(x)]^2$ 。

解 $f(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$

$$[f(x)]^2 = [x^3 + 1]^2$$

例 1-1-13 已知 $f(x-1) = x^2 + 2x + 4$, 求 $f(x)$ 。

解 令 $x-1 = t$, $x = t+1$

$$f(t) = (t+1)^2 + 2(t+1) + 4 = t^2 + 4t + 7$$

所以

$$f(x) = x^2 + 4x + 7$$

例 1-1-14 判断函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数。说明理由, 并指出在哪个区间上是相同的。

$$(1) f(x) = x, \varphi(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(2) f(x) = 2\lg x, \varphi(x) = \lg x^2$$

解 (1) 显然 $D_f = D_\varphi = (-\infty, +\infty)$, 但对应法则不同, 因为 $\varphi(x) = |x|$, 当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = -x$, $f(x) = x$ 。两个函数在 $[0, +\infty)$ 上是相同的。

(2) 因为 $D_f = (0, +\infty)$, $D_\varphi = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 定义域不同, 故不是同一函数。两个函数在 $(0, +\infty)$ 上是相同的。

例 1-1-15 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ x^2+4 & x < 0 \end{cases}$ 的定义域, 试计算 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(x-1)$ 并画 $y = f(x)$ 的图形。

解 $D_f = (-\infty, +\infty)$

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(-1) = 5$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1 & x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2+4 & x-1 < 0 \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x^2-2x+5 & x < 1 \end{cases}$$

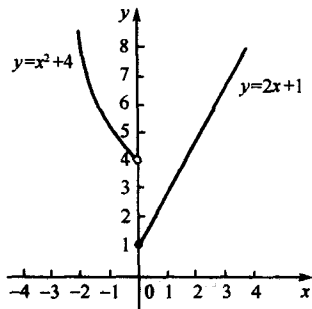


图 1-7

函数的图形如图 1-7 所示。

三、函数的简单性质

1. 函数的有界性

如果存在正数 M , 使对一切 $x \in I$, 恒有不等式 $|f(x)| \leq M$ 成立, 其中 $I \subset D_f$, 则