

数学模型应用实例

SHUXUE MOXING YINGYONG SHILI

深入思考

掌握精髓

反复把玩

其乐无穷

杨桂元 李天胜 徐军 编著

合肥工业大学出版社



数

学模型

应用实例

SHUXUE

MOXING

YINGYONG

SHILI



合肥工业大学出版社

杨桂元
李天胜 编著
徐 军

图书在版编目(CIP)数据

数学模型应用实例/杨桂元等编著. —合肥:合肥工业大学出版社, 2007. 6

ISBN 978-7-81093-606-4

I. 数… II. ①杨…②李… III. 数学模型—普及读物 IV. 022-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 087596 号

数学模型应用实例

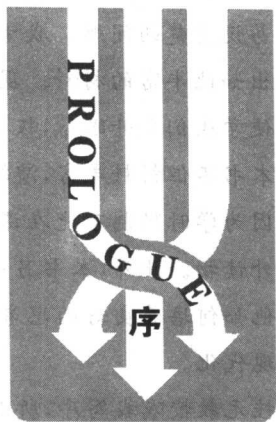
杨桂元 等编著 责任编辑 疏利民 特约编辑 王安平

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2007 年 6 月第 1 版
地 址	合肥市屯溪路 193 号	印 次	2007 年 6 月第 1 次印刷
邮 编	230009	开 本	710×1000 1/16
电 话	总编室:0551-2903038	印 张	16.75
	发行部:0551-2903198	字 数	308 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	印 刷	合肥现代印务有限公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发 行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-606-4

定价: 26.00 元

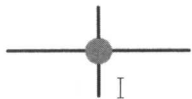
如果有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换。



近10年来,随着我国国民经济的高速发展,高等教育战线也相应地有了长足的进步,如果我们说高教事业的形势已处于历史的最好状态,并不为过。

但高教战线的这种变化更主要是表现在高等教育理念的转变,除了加大办学力度,增设新型专业以及提升办学层次等众所瞩目的成绩外,窃以为最近几年来最突出的地方是高等教育从教学内容和教学实施等方面开始着力于面向社会和面向未来。在这种形势下,无疑地,对于教材的改革与更新,以及对于教学手段和方法的现代化和科学化的强烈要求,更是一项处于瓶颈地位的课题。事实上,不少高校教师都面临这样一个现实问题:如何为教本式的教育垫铺一块跳板,以便将严谨但呆板的课堂内容与活生生的社会现实有机地结合在一起?说实在的,近年来的教材建设规模已经相当可观,例如不少出版社已经将课件等教学软件连同教材一起发行,并辅以相应的参考材料等,考虑不可谓不周。但唯独缺少一本合乎上述那样要求的材料,以与教材匹配。想来也许此项工作难度相当大,不是一人或一校可以完成的。我也一直在想,如果教本的编家们能随书编一本符合上述要求的书,这不光对于师生,甚至对于整个教育战线都是一件功德无量的事,可谓善莫大矣!

去年夏天杨桂元教授发来一本稿子,让提意见。细看之下,我惊喜地发



现,我所考虑的问题,他其实早已在进行思索,所不同的是,他早已加以实施了。此书收集了100多个问题,大都是我们在日常生活中常遇,但不用数学却不易说清楚的问题。我十分佩服作者匠心独具的观察能力和耐心,能够发掘出如此丰富的材料。现在作为经济专业数学课程的辅助教材,我相信它将使学生们大开眼界,极为受益,如同我一样。

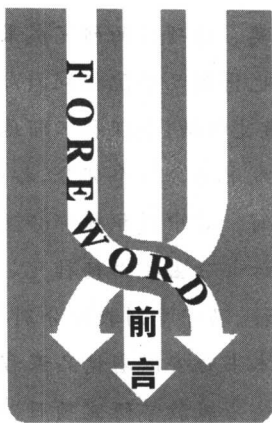
本书不但材料丰富,演绎严密,而且语言通俗,富有启发性。毫无疑问,即使因为学时限制不能在课堂全部讲述,但它也一定能成为备受师生欢迎的课外读物。此外,本书另一个潜在的优点是,对于一位勤勉的学生,它将教会他如何培养良好的思考习惯。正是这样的特色,更体现出本书的科学化和现代化。

桂元教授嘱我写序,所以勉为其难,写了以上一些话,不足为训。

盛立人谨识于安徽大学

2007年1月8日





大学数学教育要教给学生的不仅仅是严密的数学理论,还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力,让学生学会用数学的思维方式观察事物,用数学的方法分析和解决实际问题。这就是运用数学方法的“建模”能力。“建模”能力的培养是一个潜移默化的过程,由数学理论到数学建模也不可能一蹴而就,这就需要在两者之间建立某种“过渡”,我们的努力就是为了填补这个空白所进行的一种尝试。从这种意义上说,这本书也可以说是数学建模的“启蒙教材”。

《经济数学基础》是经济、管理类专业一门重要的基础课。长期以来,在讲授这门课程时,注重的往往是数学知识的传授,至于怎样运用数学知识解决实际问题却讲得很少,形成了学生只会计算、解题而不知道如何应用的局面。随着教育改革的逐步深入,如何提高学生的数学素养,用数学思想和方法解决实际问题的意识,培养学生的“建模”能力和创新能力,就成了《经济数学基础》教学改革切入点和当务之急。

近十年来,为了改变教学上的被动局面,我们针对学生的实际,结合省级精品课程《经济数学基础》的课程建设和相关教学研究课题的研究,努力挖掘数学在实际问题特别是在经济、管理问题中的应用实例,整理编写了一些与教材内容配套的数学模型,并尝试在教学中穿插讲授,提高了学生学习

数学的兴趣和积极性,收到了很好的教学效果。2000年我们申请了校级教学研究项目“经济数学基础应用实例研究”,并获得了2003年校级教学成果二等奖。该项目的研究成果“经济数学基础应用实例”在与近20所院校的交流中也得到兄弟院校同行很高的评价。近两三年来,我们又参阅了大量资料,通过归纳、整理和不断地修改才形成了本书——《数学模型应用实例》。

本书共分三个部分,按微积分、线性代数、概率论与数理统计内容的顺序编写。其中微积分部分主要由李天胜编写;线性代数部分和概率论与数理统计部分主要由杨桂元、徐军编写。李柏年教授、唐晓静副教授、赵魁君副教授、冯守平副教授分别参与了个别实例的编写。

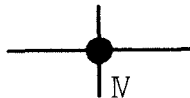
本书是安徽省精品课程《经济数学基础》课程建设的阶段性成果,也是安徽省省级教学研究项目“数学建模与大学生创新能力培养研究”(项目编号:2007jyxm282)的阶段性成果。在项目研究和本书的编写过程中,我们参考了国内外一些相关教材、精品课程网站的内容,每一篇实例后都列出了对应的参考文献;安徽大学盛立人教授在百忙中认真地审阅了书稿,提出了宝贵的建议并欣然为之作序;合肥工业大学苏化明教授对书稿进行了审阅,并提出了宝贵的意见;安徽财经大学统计与应用数学学院的一些同事给予了很大的支持和帮助;本书责任编辑疏利民先生在编辑、出版过程中做了大量的工作,在此一并致谢!

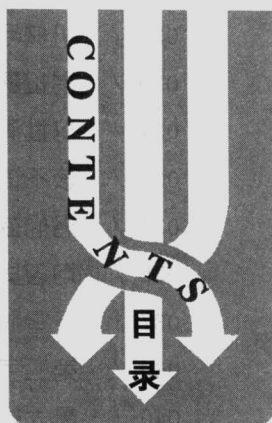
由于我们水平有限,书中有些实例没有来得及仔细推敲,谬误之处在所难免,敬请同行和广大读者批评指正。

作 者

E-mail: yangguiyuan57@126.com

2007年1月于龙子湖畔



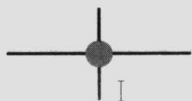


001 / 序

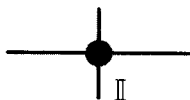
003 / 前言

001 / 第一部分  微积分

- 003 / 市话费是降了还是升了
- 004 / 外币兑换与股票交易中的涨跌停板
- 005 / 库存问题与库存曲线
- 006 / “另类”的常量函数
- 009 / 蠓虫分类的初等数学模型
- 011 / 核军备竞赛问题
- 012 / 科赫雪花的面积与周长
- 015 / 复利、连续复利与贴现
- 017 / 椅子为什么能放稳
- 019 / 影子为什么那么长
- 020 / 边际是什么
- 022 / 弹性是什么



- 025 / 商家的价格策略
- 027 / 不同消费群体的需求弹性
- 029 / 机械与人工的调配方案
- 030 / 易拉罐的形状
- 031 / 这批酒什么时候出售最好
- 033 / 该不该接受供货商的优惠条件
- 034 / 洛伦兹曲线与基尼系数
- 036 / 均匀货币流的总价值与投资回收期的计算
- 037 / 下雪时间的确定
- 039 / 第二宇宙速度是怎样计算出来的
- 040 / 最大货币供应量的计算
- 043 / 谈谈龟兔赛跑悖论
- 045 / 空调销售量的预测
- 046 / 相互关联商品的需求分析
- 048 / 衣物怎样漂洗最干净
- 050 / 拉格朗日乘数与影子价格
- 053 / 人口模型
- 056 / 单种群动物模型
- 059 / 江河污染物的降解系数
- 060 / 怎样计算固定资产的折旧
- 062 / 放射性元素衰变模型
- 065 / 市场上的商品价格是怎样波动的
- 066 / 再谈下雪时间的确定
- 068 / 信贷消费中每月还款金额的确定
- 069 / 资源的合理开发与利用
- 071 / 从诺贝尔奖谈起
- 073 / 蛛网模型
- 076 / 梵塔问题
- 077 / 平面内直线交点的个数
- 079 / 菲波那契数列的通项公式

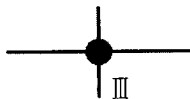




- 085 / 兔子繁殖的数量与菲波那契数列
- 087 / 通过定点的曲线与曲面方程
- 090 / 多项式插值问题(范德蒙行列式的应用)
- 092 / 循环比赛名次的确定
- 094 / 不同地(城市)之间的交通问题
- 097 / 一种密码方法(逆矩阵的应用)
- 099 / 交通流量问题
- 101 / 工资问题
- 102 / 不定方程组的整数解
- 104 / 调整气象观测站问题
- 106 / 最优生产计划的确定(线性规划问题)
- 110 / 基因的“距离”
- 113 / 平行四边形的面积与平行体的体积
- 115 / 动物繁殖问题与 Leslie 人口模型
- 118 / 植物基因的分布与从事各业人员总数的
发展趋势
- 123 / 受教育程度的依赖性
- 125 / 快乐的假期旅游
- 129 / 投入产出分析
- 133 / 小行星的轨道问题
- 135 / 二次型的正定性在函数极值判定中
的应用



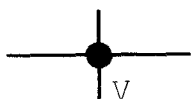
- 141 / 至少两人生日在同一天
- 143 / 有趣的蒙特莫特问题



145 /	论掷骰子游戏中的概率计算
147 /	意料之外,“数理”之中
149 /	敏感性问题调查
151 /	抽签(抓阄)公平吗
153 /	对于疑难病症要进行综合检查
155 /	说谎的孩子
157 /	如何追究责任
159 /	泊松分布与突发事件概率的计算
163 /	选择题的给分标准
164 /	分赌本问题
166 /	奖品的诱惑下切勿上当
169 /	选择题能考出真实成绩吗
171 /	“摸大奖”真的免费吗
174 /	赌徒输完问题
176 /	考试成绩的标准分
179 /	求职面试问题(动态决策问题)
181 /	减少验血的工作量
184 /	报童的策略(随机存储问题)
188 /	建大厂还是建小厂
189 /	应该订购多少本挂历,可使总利润最大
191 /	正态分布的应用
196 /	如何有效安排人力
198 /	这样找庄家公平吗
199 /	配对问题(蒙特莫特问题的继续讨论)
201 /	组合证券投资决策模型
206 /	中心极限定理的例子
211 /	蒲丰投针与蒙特卡洛方法
214 /	随机变量平均值的稳定性
216 /	大数定律在保险中的应用
218 /	人寿保险问题



220 /	电影院座位数的设定
221 /	价格预测
224 /	统计数据的整理与加工
226 /	彩电色彩的质量分布
228 /	根据统计数据估计吉尼系数
230 /	正态总体样本方差服从卡方分布 并且与样本均值相互独立
233 /	正态总体样本标准差 S 不是总体标准差 σ 的无偏估计量
234 /	参数估计方法在捕鱼问题中的应用
237 /	平均值的质量控制图
239 /	概率论在产品质量验收抽样方案确定 中的应用
244 /	实际推断原理——小概率事件原理
245 /	改变包装能使销售量增加吗
247 /	成对比较与成组比较
249 /	刀具寿命的“正态拟合”
252 /	手掌“生命线”的长度并不反映人的寿命
254 /	一元线性回归在季节波动预测中的应用



第一部分

微 积 分

微积分解决的主要问题是与连续变量有关的问题。本部分运用微积分的理论与方法,通过建立模型,用数学的语言解释了发生在我们周围的一些日常现象的成因(如“椅子为什么能放稳”、“影子为什么那么长”、“易拉罐的形状”、“市场上的商品价格是怎样波动的”等),给出了一些实际问题的解决办法(如“均匀货币流的总价值与投资回收期的计算”、“衣物怎样漂洗最干净”、“怎样计算固定资产的折旧”、“信贷消费中每月还款金额的确定”等),同时,也对一些广泛流传的趣题作出了解答(如“科赫雪花的面积与周长”、“谈谈龟兔赛跑悖论”、“梵塔问题”、“菲波那契数列的通项公式”等)。

市话费是降了还是升了

2001年1月1日起,我国的电信资费进行了一次结构性的调整,其中某地区固定电话的市话费由原来的每3分钟(不足3分钟以3分钟计)0.18元调整为前3分钟0.22元,以后每1分钟(不足1分钟以1分钟计)0.11元。那么,与调整前相比,市话费是降了还是升了?升、降的幅度是多少?

若以 $y(t)$ 、 $Y(t)$ 分别表示调整前后市话费与通话时间 t 之间的函数关系,则有

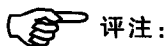
$$y(t) = \begin{cases} 0.18 & 0 < t \leq 3 \\ 0.18 \times \frac{t}{3} & t > 3 \text{ 且 } \frac{t}{3} \text{ 是整数} \\ 0.18([\frac{t}{3}] + 1) & t > 3 \text{ 且 } \frac{t}{3} \text{ 不是整数} \end{cases}$$

$$Y(t) = \begin{cases} 0.22 & 0 < t \leq 3 \\ 0.22 + 0.11(t - 3) & t > 3 \text{ 且 } t \text{ 是整数} \\ 0.22 + 0.11([t - 3] + 1) & t > 3 \text{ 且 } t \text{ 不是整数} \end{cases}$$

为便于两者进行比较,我们可以按具体的时段计算上述两个函数对应的函数值及相应的调价幅度,并列成如下的对照表。

t	(0,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	...	(59,60]	...
$y(t)$	0.18	0.36	0.36	0.36	0.54	0.54	0.54	...	3.60	...
$Y(t)$	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66	0.77	0.88	...	6.49	...
升降幅度	22%	-8%	22%	53%	22%	43%	63%	...	80%	...

不难看出,只有当通话时间 $t \in (3,4]$ 时,调整后的市话费才稍微有所降低,其余的时段均比调整前有较大幅度的提高。



评注:

1. 理论依据:

建立分段函数的方法及取整函数的应用。

2. 应用与推广:

许多以时间、重量、距离等为计量单位的收费系统,如场地租赁费、邮政信函及包裹的邮寄费、各类交通工具的行李运输费等,通常都规定了最小的计量单位,且不足一单位的部分以一个单位计。此类问题均可以参照此例提供的方法借助取整函数建立函数关系。

外币兑换与股票交易中的涨跌停板

按某个时期的汇率,若将美元兑换成加拿大元,币面值增加 12%;而将加拿大元兑换成美元,币面值减少 12%。今有一美国人准备到加拿大度假,他将一定数额的美元兑换成了加元,但后来因故未能成行,于是他又将加元兑换成了美元。经过这样一来一回的兑换,结果白白亏损了一些钱。这是为什么呢?

对于这个问题,我们只要将两种不同的兑换用函数关系表示出来进行分析,就不难发现造成他亏损的原因:

设 x 美元可兑换的加元数为 $y = f(x)$, y 加元可兑换的美元数为 $x = \varphi(y)$, 则

$$y = f(x) = x + 0.12x = 1.12x \quad (1)$$

$$x = \varphi(y) = y - 0.12y = 0.88y \quad (2)$$

于是,先把 x 美元兑换成加元,可得的加元数为 $f(x)$;再把这些加元兑换成美元,所得的美元数应为 $z = \varphi[f(x)]$, 即

$$z = \varphi[f(x)] = 0.88f(x) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

显然,他亏损了 1.44%。之所以会出现这样的结果,是因为两种兑换所对应的函数(1)和函数(2)不互为反函数。因为假若(1)和(2)互为反函数,则根据 $f[f^{-1}(x)] = x$ 的性质,应有 $\varphi[f(x)] = x$, 他也就不会亏损了。

类似的例子还有股票交易中的涨、跌停板。上海及深圳证券交易所为抑

制股票市场中的过度投机,规定了一只股票在一个交易日内的涨、跌幅均不得超过10%的限制,分别称之为“涨停板”和“跌停板”。假若某只股票第一个交易日涨停,而第二个交易日又跌停,则股价并不是简单地回到原地,而是比上涨前更低了。这其中的道理与造成外币兑换损失的原理是完全相同的。

 评注:

1. 理论依据:

反函数的性质。

2. 应用与推广:

本例给出了判定两个函数之间不具备反函数关系的一个方法。

 参考文献:

李心灿等. 高等数学应用 205 例. 高等教育出版社, 1997

库存问题与库存曲线

我们知道,不论是生产厂家还是商家,都要设置仓库用来存贮原料或是商品,因此库存问题也就成了他们都必须面对的问题。

如果在一个计划期内(譬如说一年),生产厂家对原料(或商家对商品)的总需求量是一定的,则由于资金和仓库容量的限制,不可能将全部原料或商品一次性采购进来,因此一般情况下所采用的都是分批进货的方法,于是就产生了相应的库存模型(也称存贮模型),其中最简单,也是最典型的一类就是“一致性存贮模型”。

所谓一致性存贮模型,是在“一致需求,均匀消耗,瞬间入库,不许短缺”的假设之下建立的模型。即在总需求一定的情况下,等量地分批进货,并以均匀的速度消耗这些原料(或商品)。而当一批原料(或商品)用完的时候,下一批原料(或商品)可以做到瞬间入库进行补充而忽略不计搬运入库的时间,从而不会有停工待料(或缺货)的现象发生。其库存量 Q 随时间 t 变化的情况可以用下面的库存曲线来描述: