# 奥数讲义

高一年级·上

主编　朱华伟

编委　朱华伟　范端喜　符开广

张　雷　蒋太煌

浙江大学出版社

# 前　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共 122 人参赛，取得 92 块金牌、23 块银牌、5 块铜牌，13 次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册，和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏：以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

知识方法扫描：补充竞赛方面的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

典型例题解析：在保留部分经典好题、经典解法的同时，尽可能选用一些国际国内竞赛的新题(不一定是难题)，如近3—5年高考、高中数学联赛、女子竞赛、西部竞赛、美国数学邀请赛、美国数学奥林匹克试题等，每道赛题注明竞赛年份，给出一些新颖的解答方法，减少跟其他同类书籍的雷同率，增强读者的阅读欲望。例题总个数控制在8道，由基础题(2道高考难度的试题)、提高题(4道一试难度的试题)、综合题(2道二试难度的试题)组成；

原版赛题传真：含英文试题与英文解答，针对试题与解答中的生词给出"英汉小词典"。

同步训练：含3道选择题、4道填空题、3道解答题(不便于采用客观题形式的专题，安排6道解答题作为同步训练题)，均给出详细解答过程。

在"同步测试篇"中，与"专题讲座篇"中的专题对应设置测试卷。在"全真测试篇"中，精选了国内外最新高中数学奥林匹克试卷若干套。全书后附有"同步训练题、同步测试题、全真测试题"题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学生兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词："数学好玩"。我们深信本丛书让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好："数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！"

广州大学　朱华伟

2007—5—10

# 目录

contents

## 专题讲座篇



## 同步测试篇



## 全真测试篇

## 专题讲座篇

# 第1讲　集合的概念与运算

没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园(集合论)中驱逐出去.

——D. 希尔伯特



### 知识方法扫描

集合是数学中的重要概念之一，在中学数学竞赛中，许多本质上属于代数、几何、数论、组合的问题都可以用集合的观点和方法来解决，局部与整体的观点是其思想实质.

一般地，某些指定的对象集中在一起就成为一个集合，集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

常用描述法表示集合，$S=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$ 表示所有具有性质 $P$ 的对象组成的集合 $S$.

集合的运算中，除了交、并运算外，还有补运算和差运算. 对于 $A$、$B$ 两个集合，由所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素构成的集合称为 $A$ 关于 $B$ 的差集，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A, \text{且 } x\notin B\}$$

关于集合的运算满足如下关系式：

(1) 交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$

(2) 结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 摩根法则：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(5) $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

读者可以利用文氏图验证以上各个等式，它们的严格证明要用到高等数学的知识.

### 经典例题解析

**例1**　求下列关于 $x$ 的不等式的解集：$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$

**解**　不等式即 $a^2x+b^2(1-x)\geqslant a^2x^2+2ab(1-x)x+b^2(1-x)^2$

移项合并得 $(a-b)^2x^2-(a-b)^2x\leqslant 0$

即 $(a-b)^2(x-1)x\leqslant 0$

故　$a=b$ 时，$x\in\mathbf{R}$

$a\neq b$ 时，有 $(x-1)x\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 1$

从而不等式的解集为：当 $a=b$ 时为实数集 $\mathbf{R}$；当 $a\neq b$ 时为 $[0,1]$.

**评注** 这是一道求不等式解集的问题，其实质是证明如下条件不等式：已知 $a,b\in\mathbf{R}$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，求证：$a^2\lambda+b^2(1-\lambda)\geqslant[a\lambda+b(1-\lambda)]^2$

**例2** 关于 $x$ 的不等式 $(m-1)x<\sqrt{4x-x^2}$ 的解集为 $\{x\mid 0<x<2\}$，求实数 $m$ 的值.

**解** $4x-x^2\geqslant 0\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 4$

由于原不等式的解集为 $\{x\mid 0<x<2\}$

所以 $m-1\geqslant 0$（若 $m-1<0$，则不等式的解集包含 $\{x\mid 0<x<4\}$） ①

不等式两边平方得：$(m-1)^2x^2<4x-x^2$，即 $x\left(x-\dfrac{4}{(m-1)^2+1}\right)<0$

故 $0<x<\dfrac{4}{(m-1)^2+1}$

结合题意有 $\dfrac{4}{(m-1)^2+1}=2\Rightarrow(m-1)^2=1$

而 $m-1\geqslant 0$，所以 $m-1=1$ ②

综合①②知，$m=2$ 为所求.

**评注** 这是一道已知含参数的无理不等式的解集，求参数的取值范围问题，注意代数式本身要有意义.这类问题的求解常常可以利用数形结合的思想方法，如在本题中令 $f(x)=(m-1)x$，$g(x)=\sqrt{4x-x^2}$，则只需根据题意在同一直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，准确考察它们的相对位置关系，写出交点坐标，将交点坐标代入方程 $f(x)=(m-1)x$ 即可求得 $m$ 的值.

**例3** 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 $x$ 为 $f(x)$ 的"不动点"；若 $f(f(x))=x$，则称 $x$ 为 $f(x)$ 的"稳定点"，函数 $f(x)$ 的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 $A$ 和 $B$.若 $f(x)=ax^2-1$ $(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$ 且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围.

**解** (1) $a=0$ 时，$f(x)=-1$，则集合 $A=B=\{-1\}$，满足题设.

(2) $a\neq 0$ 时，

因为集合 $A\neq\varnothing$，所以方程 $ax^2-1=x$ 有解，得 $a\geqslant-\dfrac{1}{4}$

集合 $B=\{x\mid a(ax^2-1)^2-1=x\}=\{x\mid a^3x^4-2a^2x^2-x+a-1=0\}$

$=\{x\mid(ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0\}$

因为 $A=B$，所以方程 $a^2x^2+ax-a+1=0$ 无解，或与 $ax^2-x-1=0$ 同解.

由 $\Delta<0$，得 $a<\dfrac{3}{4}$

由 $\begin{cases}a^2x^2+ax-a+1=0\\ax^2-x-1=0\end{cases}$

解得 $a=\dfrac{3}{4}$

综上得 $-\dfrac{1}{4}\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{4}$ 为所求.

**评注** 本题借用"不动点"和"稳定点"这两个概念来描述方程的解集问题，关键是对 $f(f(x))-x$ 进行因式分解.由于 $f(x)$ 不一定就是二次函数，所以要考虑 $a$ 是否等于0.

**例4** 集合 $A,B,C$（不必相异）满足 $A\cup B\cup C=\{1,2,3,\cdots,11\}$，求满足条件的集

合的有序三元组$(A, B, C)$的解的个数.

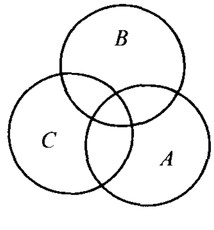

图 1-1

**解** 如图 1-1 所示，集合 $A, B, C$ 之间两两相交得到 7 个区域，从而 $1, 2, 3, \cdots, 11$ 中每一个元素的位置，均有 7 种选择，故有序三元组$(A, B, C)$的解的个数为 $7^{11}$ 个.

**评注** 根据文氏图，将有序三元组$(A, B, C)$的解的个数问题，转化为 11 个元素在图中的放置方法种数问题，进而利用分步计数原理即可很快得出答案.

**例5** 已知对任意实数 $x$，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x) \leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$，如果集合 $A=\{a \mid f(a)>a^2\}$ 不是空集，试证 $A$ 是无限集.

**证明** 由 $f^2(0) \leqslant 0$，有 $f(0)=0$，故 $0 \notin A$

由于集合 $A=\{a \mid f(a)>a^2\}$ 不是空集，

存在 $m \in A(m \neq 0)$，满足 $f(m)>m^2$，且由已知 $f^2(m) \leqslant 2m^2 \cdot f\left(\frac{m}{2}\right)$

所以 $f\left(\frac{m}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2m^2} f^2(m)>\frac{1}{2m^2} \cdot (m^2)^2>\left(\frac{m}{2}\right)^2$，从而 $\frac{m}{2} \in A$

进而 $\frac{m}{2^2}, \frac{m}{2^3}, \cdots \in A$，故 $A$ 为无限集.

**评注** 本题证明实质上是利用不等式的放缩变换进行递归.

**例6** 如果存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $k+a_k(k=1, 2, \cdots, n)$都是完全平方数，则称 $n$ 为“好数”. 问在集合$\{11, 13, 15, 17, 19\}$中，哪些是“好数”，哪些不是“好数”，说明理由！ (2004 年中国女子数学奥林匹克)

**分析** 由于$\{11, 13, 15, 17, 19\}$是有限集，且该集合只含 5 个元素，故可以对这些元素逐一进行讨论.

**解** (1) 11 不是“好数”，因为 4 只能与 5 相加得 $3^2$，而 11 也只能与 5 相加得 $4^2$，从而不存在满足要求的排列.

(2) 13 是“好数”，因为在如下排列中，$k+a_k(k=1, 2, \cdots, 13)$均为完全平方数.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $a_k$: | 8 | 2 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 1 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |

(3) 15 是“好数”，因为在如下排列中，$k+a_k(k=1, 2, \cdots, 15)$均为完全平方数.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $a_k$: | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

(4) 17 是“好数”，因为在如下排列中，$k+a_k(k=1, 2, \cdots, 17)$均为完全平方数.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| $a_k$: | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 | 10 | 2 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 1 | 9 | 8 |

(5) 19 是“好数”，因为在如下排列中，$k+a_k(k=1, 2, \cdots, 19)$均为完全平方数.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| $a_k$: | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 19 | 18 | 17 |

综上知，集合$\{11, 13, 15, 17, 19\}$中除 11 外，其他元素均为“好数”.

**评注** 这道试题解答的本质是组合构造，读者可以对正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 进行讨论，作为原题

的推广，见本讲【同步训练】第 10 题.

**例7** 给定 1978 个集合，每个集合都含有 40 个元素，已知其中任两个集合都恰有一个公共元素. 证明：存在一个元素，它同属于这 1978 个集合.

**证明** 设 1978 个集合分别为 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{1977}$，任取其中一个不妨设为 $A_0$，由于 $A_0$ 与其余 1977 个集合的任何一个都恰有一个公共元素，且 $|A_0|=40$，由抽屉原理知，存在一个元素 $a\in A_0$，$a$ 至少属于 $\left[\dfrac{1977}{40}\right]+1=50$ 个其余的集合. 设 $a\in A_0$，且 $a\in A_i(i=1, 2, \cdots, 50)$，下面我们证明 $a$ 属于其他的任意一个集合.

用反证法，假设存在 $k\in\{51, 52, \cdots, 1977\}$，使 $a\notin A_k$. 由于 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{50}$ 中任两个集合除 $a$ 外没有其他公共元素，则对于任意 $i, j\in\{0, 1, 2, \cdots, 50\}$，$i\neq j$，均有 $A_k\cap A_i\neq A_k\cap A_j$（否则 $|A_i\cap A_j|=2$，与题设矛盾），又 $A_k\cap A_i\neq\varnothing$，故 $|A_k|\geqslant 51$，与 $|A_k|=40$ 矛盾.

从而存在一个元素 $a$，它同属于 1978 个集合.

**评注** 这是一道用集合来描述的组合题，从元素与集合之间的关系出发进行讨论，蕴涵了从局部到整体的数学思想. 本问题可推广为：

给定 $n$ 个集合，每个集合都含有 $m$ 个元素，其中 $m$，$n$ 是正整数，$m>1$，$n>m^2$. 已知其中任两个集合都恰有一个公共元素. 证明：存在一个元素，它同属于这 $n$ 个集合.

**例8** 设 $x, y, z, u\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant x, y, z, u\leqslant 10$，求使下面不等式成立的四元有序数组 $(x, y, z, u)$ 的个数：$\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-u}{z+u}+\dfrac{u-x}{u+x}>0$

**分析** 原不等式可化为 $(xz-yu)(z-x)(u-y)>0$，此时很容易陷入对 $x, y, z, u$ 的讨论与漫无目的的计算当中. 而利用集合的思想方法处理这个问题，则能合理分类、有序讨论，使得毫无头绪的分类与运算变得简单明了.

**解** 设 $f(a, b, c, d)=\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-d}{c+d}+\dfrac{d-a}{d+a}$

记 $A$：$\{(x, y, z, u)\mid 1\leqslant x, y, z, u\leqslant 10, f(x, y, z, u)>0\}$

$B$：$\{(x, y, z, u)\mid 1\leqslant x, y, z, u\leqslant 10, f(x, y, z, u)<0\}$

$C$：$\{(x, y, z, u)\mid 1\leqslant x, y, z, u\leqslant 10, f(x, y, z, u)=0\}$

显然 $|A|+|B|+|C|=10^4$

下面我们先证明 $|A|=|B|$

对每一个 $(x, y, z, u)\in A$，考虑 $(x, u, z, y)$

$(x, y, z, u)\in A\Leftrightarrow f(x, y, z, u)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-u}{z+u}+\dfrac{u-x}{u+x}>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x-u}{x+u}+\dfrac{u-z}{u+z}+\dfrac{z-y}{z+y}+\dfrac{y-x}{y+x}<0$

$\Leftrightarrow f(x, y, z, u)<0\Leftrightarrow(x, u, z, y)\in B$

这说明存在一个从集合 $A$ 到集合 $B$ 的一一映射，所以 $|A|=|B|$

下面再计算 $|C|$.

$$(x, y, z, u)\in C\Leftrightarrow\frac{xz-yu}{(x+y)(z+u)}=\frac{xz-yu}{(y+z)(u+x)}$$

$$\Leftrightarrow(z-x)(u-y)(xz-yu)=0$$

设 $C_1=\{(x, y, z, u)\mid x=z, 1\leqslant x, y, z, u\leqslant 10\}$

$C_2=\{(x, y, z, u) \mid x \neq z, y=u, 1 \leqslant x, y, z, u \leqslant 10\}$

$C_3=\{(x, y, z, u) \mid x \neq z, y \neq u, 1 \leqslant x, y, z, u \leqslant 10\}$

由分步计数原理知，$|C_1|=1000$，$|C_2|=900$

设 $x, y, z, u \in \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

由分步计数原理知，满足 $x=y, z=u, x \neq z$ 的四元有序数组 $(x, y, z, u)$ 有 90 个；满足 $x=u, z=y, x \neq z$ 的四元有序数组共 90 个.

验证知，满足 $xy=zu$，$x, y, z, u$ 两两不同的无序四元组 $(x, y, z, u)$ 有以下 9 组：

$$1\times6=2\times3,\ 1\times8=2\times4,\ 1\times10=2\times5$$
$$2\times6=3\times4,\ 2\times9=3\times6,\ 2\times10=4\times5$$
$$3\times8=4\times6,\ 3\times10=5\times6,\ 4\times10=5\times8$$

从而 $|C_3|=4\times2\times9+90+90=252$

所以 $|C|=2152$

所以 $|A|=\frac{1}{2}(10000-2152)=3924$

故使题设不等式成立的四元有序数组 $(x, y, z, u)$ 的个数为 3924 个.

**评注** 这是2004年首届中国东南地区数学奥林匹克试题，本题用到了映射、集合的划分、分步计数原理等，最关键的是处理好局部与整体的关系，利用简单而深刻的思想来解决问题.

## 原版赛题传真

**Problem**

Without computer assistance, find five different sets of three positive integers $\{k, m, n\}$ such that $k<m<n$ and $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{19}{84}$

[To think about, but not a part of the problem: how many solutions are there?]

**Solution**

Answer: (5, 60, 105), (6, 21, 84), (6, 28, 42), (7, 14, 84), (7, 21, 28)

We will attempt to find only five sets, not all of them. Our first step will be to look for solutions of the form $\{k, m, n\}$, where $k$, $m$ and $n$ are divisors of 84, the denominator of the right hand side. So we let $a=\frac{84}{k}$, $b=\frac{84}{m}$, $c=\frac{84}{n}$, and multiply both sides of the equation $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{19}{84}$ by 84 to get $a+b+c=19$ and $a>b>c$. $k$ is a factor of 84, so is $a$. Likewise for $b$ and $c$. $\{a, b, c\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$

It's no hard to see that $a$ is either 7, 12, or 14. If $a$ is 7, we must find $b>c$ with $b+c=12$, but this is impossible. If $a$ is 12, we must find $b>c$ with $b+c=7$. There are two such pairs $b=6$, $c=1$ and $b=4$, $c=3$. These yield $k=7$, $m=14$, $n=84$ and $k=7$, $m=21$, $n=28$, respectively. If $a$ is 14, we must find $b>c$ with $b+c=5$. There are two such pairs, $b=4$, $c=1$ and $b=3$, $c=2$. These yield $k=6$, $m=21$, $n=84$ and $k=6$, $m=28$, $n=42$, respectively.

Now, that is only four sets, to find a fifth, we notice that we already have solutions with

$k=6$ and $k=7$, so we arbitrarily try $k=5$. We then get the equation $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{11}{420}$. We use the same trick as before, multiplying by 420 this time, to get $d+e=11$, where $d$ and $e$ are factors of 420. It doesn't take much work at all to find one possible solution: $d=7$, $e=4$, yielding a fifth solution of $k=5$, $m=60$, $n=105$.

Note that there are, in fact, many more than five solutions: there are 22.

**英汉小词典**

| | | | |
|---|---|---|---|
| divisor | 除数,约数 | denominator | 分母 |
| multiply | 乘,增加 | equation | 相等,平衡,方程式,等式 |
| factor | 因素,要素,因数 | | |



## 同步训练

### 一、选择题

1. 已知 $\mathbf{Z}$ 为整数集,集合 $A=\{x \mid |x-3|<\pi,\ x\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x \mid x^2-11x+5<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x \mid |2x^2-11x+10|\geqslant|3x-2|,x\in\mathbf{Z}\}$,$\overline{C}$ 是 $C$ 在 $\mathbf{Z}$ 中的补集,则 $A\cap B\cap\overline{C}$ 的真子集的个数为 ( )

A. 7　　B. 8　　C. 15　　D. 16

2. 集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, $C=\{x \mid x^2-mx+2=0\}$, $A\cap C=C$,则实数 $m$ 的值为 ( )

A. 3　　B. 3 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$　　D. 以上都不对

3. 设 $S=\{(x,y) \mid x^2-y^2=$ 奇数$,x,\ y\in\mathbf{R}\}$, $T=\{(x,\ y) \mid \sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2),\ x,\ y\in\mathbf{R}\}$,则 ( )

A. $S\subsetneqq T$　　B. $T\subsetneqq S$　　C. $S=T$　　D. $S\cap T=\varnothing$

### 二、填空题

4. 集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l,\ m,\ n,\ l\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{u \mid u=20p+16q+12r,\ p,\ q,\ r\in\mathbf{Z}\}$,则 $M$, $N$ 之间的关系是________.

5. 已知 $x,\ y,\ z\in\mathbf{Z}$,使得 $\begin{cases}x+y+z=3\\x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$,则 $x^2+y^2+z^2$ 所有可能的值组成的集合为________.

6. 使 $(x^2-1)^{2k}+(x^2+2x)^{2k}+(2x+1)^{2k}=2(1+x+x^2)^{2k}$ 对所有实数 $x$ 都成立的正整数 $k$ 组成的集合为________.

7. $A_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 为集合 $S=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2005\}$ 的子集,$F$ 为所有有序四元组 $(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)$ 构成的集合,则 $\sum\limits_{(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)\in F}|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|$ 的值为________.

### 三、解答题

8. 对于集合 $S$,设 $|S|$ 表示 $S$ 中的元素个数,并令 $n(S)$ 表示包括空集和 $S$ 自身在内的 $S$ 的子集的个数.如果 $A$, $B$, $C$ 三个集合满足 $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$, $|A|=|B|$

$=100$，求 $|A\cap B\cap C|$ 最小可能值.

9. 若 $A$ 是 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个 $k$ 元子集，$m$ 为正整数，满足条件 $n>(m-1)(C_k^2+1)$，则存在 $S$ 中的元素 $t_1, t_2, \cdots, t_m$，使 $A_j=\{x+t_j \mid x\in A\}(j=1, 2, \cdots, m)$ 中任意两个集合的交集为空集.

10. 如果存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使 $k+a_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 都是完全平方数，则称 $n$ 为“好数”. 问在正整数集合中，哪些是“好数”，哪些不是“好数”，并说明理由.

# 第2讲　三个基本计数原理

十进计数法的发明恐怕是科学史上最重要的成就.

——勒贝格

## 知识方法扫描

计数问题是组合数学的基本问题之一.乘法原理、加法原理和容斥原理是计数的三个基本原理,由它们可以建立一系列的计数公式.这三个基本原理读者在小学和初中数学奥林匹克中已有所接触,为了加深对它们的理解,本讲给出它们的集合论形式.

**1. 乘法原理**

设 $n$ 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 包含元素的个数依次为 $|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|$,则从这 $n$ 个集合中依次各取一个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成有序组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的个数等于

$$|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$$

即 $|\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1\in A_1, a_2\in A_2, \cdots, a_n\in A_n\}|$

$=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$

应用乘法原理的关键在于将一个比较复杂的"全过程"恰当地分成 $n$ 个连续进行的较为简单的"分过程".

**2. 加法原理**

设集合 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不交,即 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, n)$,则 $A$ 的元素个数等于这 $n$ 个子集元素之和,即

$$|A|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|$$

在这里,我们着眼于子集间的互斥性,将 $A$ 进行分划,就是将它所有的元素按适当的标准进行分类,分类时应防止元素的重复出现和遗漏,选择的分类标准要有利于和 $\sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|$ 的计算.因此,应用加法原理的关键在于把一个元素个数较多的集合分划为若干个两两不交的元素且个数较少的子集,即把整体分成若干个局部,使得每个局部的元素个数便于计数.

在应用加法原理时,关键在于把所要计数的集合 $A$ 分划为若干个两两不交的子集,使得每个子集便于计数.但是具体问题往往是复杂的,常常扭成一团,难以找到两两不交而又便于计数的划分,而要把条理分清楚就得用加法原理的推广——容斥原理.

**3. 容斥原理**

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $A$ 的子集,$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,则:

$$|A|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| \quad ①$$

① 可用数学归纳法给出证明，留作读者练习. 应当指出，当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不交时，容斥原理即是加法原理. 容斥原理是 19 世纪英国数学家西尔维斯特发现的. 它是组合计数的一个重要工具. 容斥原理的另一种形式是：

**逐步淘汰原理**　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 $A$ 的子集，则

$$\begin{aligned} &|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\ =&|A| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} \\ &|A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \qquad ②$$

逐步淘汰原理与数论中著名的筛法有密切联系，它是一种逐步筛去重复的个数的计数方法，在数论中有着广泛的应用.

从上可以看出，这两个原理源于同一思想，即不断地使用包含与排除，因此又统称包含与排除原理或多退少补原理. 公式 ① 用来计算至少具有某 $n$ 个性质之一的元素的个数，而公式 ② 则用来计算不具有某 $n$ 个性质中的任何一个的元素的个数.

## 经典例题解析

**例1**　从 $n$ 元集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 到 $m$ 元集 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 有多少不同的映射？

**解**　$a_1$ 的像可以为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 中任一个，即有 $m$ 种选择，$a_2$ 的像也有 $m$ 种选择，……，$a_n$ 的像也有 $m$ 种选择. 根据乘法原理，共有 $m^n$ 个从集 $A$ 到集 $B$ 的映射.

**例2**　在 1000 与 9999 之间有多少个各个数字都不同的奇数？

**解**　在 1000 与 9999 之间的数都是 4 个数字的有序排列. 这样，要求某排列的个数，我们需要进行 4 种选择：个位、十位、百位和千位数字. 因为我们所要的数是奇数. 个位数字可以是 1，3，5，7，9 中的任何一个. 十位数字与百位数字可以是 0，1，2，…，9 中的任意一个，而千位数字可以是 1，2，…，9 中的任意一个，这样，个位数字有 5 种选择. 由于要四个数字互不相同. 因此，个位数字选定后，千位数字就只有 8 种选择. 以上两个数字选定后，百位数字就剩有 8 种选择. 而以上三个数字都选定了，十位数字就只有 7 种选择了，于是，应用乘法原理，这个问题的答案是 $5\times8\times8\times7=2240$ 种.

**例3**　从四个小组中的每个小组里选出男女青年各 1 人，表演圆圈舞蹈，规定男女相间，而且同一个组里两人不得相邻，问共有几种不同队伍的变换形式？

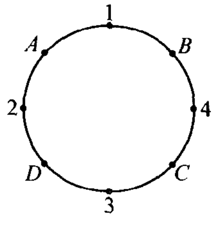


图 2-1

**解**　以 $A, B, C, D$ 表示四个小组选出的四个女青年，$a, b, c, d$ 表示四个小组选出的四个男青年，其中 $A_a, B_b, C_c, D_d$ 是同组. 女青年先排入有 $(4-1)!=3!$ 种方法. 图 2-1 中号码 ①②③④ 是男青年的位置，按号码由小到大的顺序，只有 $d, b, c, a$ 与 $c, a, b, d$ 两种方式，其他不合要求，所以不同队形共有 $2\cdot3!=12$ 种.

**评注**　若将四个小组推广为 $n$ 个小组，则例 3 变为一个著名的难题.

**例4**　若 $0<a<b<c<d<500$，问有多少个有序的四元整数组 $(a, b, c, d)$ 满足 $a+d=b+c$ 及 $bc-ad=93$？

**解**　由已知条件可设 $(a, b, c, d)=(a, a+x, a+y, a+x+y)$，其中 $x, y$ 为整数，且

$0 < x < y$

因为 $93 = bc - ad = (a+x)(a+y) - a(a+x+y) = xy$

而 $93 = 1 \times 93 = 3 \times 31$，且 $x < y$

所以 $(x, y) = (1, 93)$ 或 $(x, y) = (3, 31)$

下面分两种情形讨论.

(i) 当 $(x, y) = (1, 93)$ 时，$(a, b, c, d) = (a, a+1, a+93, a+94)$，$a$ 可取 $1, 2, \cdots, 405$.

(ii) 当 $(x, y) = (3, 31)$ 时，$(a, b, c, d) = (a, a+3, a+31, a+34)$，$a$ 可取 $1, 2, \cdots, 465$.

这两组数中无重复的，所以共有 $405 + 465 = 870$ 个有序四元组满足条件.

**例5** 如图 2-2，将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是________.

**解** 设想染色按 $S—A—B—C—D$ 的顺序进行.

对 $S$、$A$、$B$ 染色，有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法.

由于 $C$ 点的颜色可能与 $A$ 同或不同，这影响到 $D$ 点颜色的选取方法数，故分类讨论：

$C$ 与 $A$ 同色时（此时 $C$ 对颜色的选取方法唯一），$D$ 应与 $A$($C$)、$S$ 不同色，有 3 种选择；$C$ 与 $A$ 不同色时，$C$ 有 2 种可供选择的颜色，$D$ 也有 2 种颜色可供选择，从而对 $C$、$D$ 染色有 $1\times3+2\times2=7$ 种染色方法.

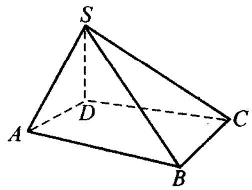

图 2-2

由乘法原理，总的染色方法数是 $60\times7=420$ 种.

**评注** 由于四棱锥的顶点 $S$ 处在较为特殊的地位上（它与其余 4 个顶点都有棱相连），故此题宜按 $S—A—B—C—D$ 的顺序染色，而不宜按 $A—B—C—D—S$ 的顺序染色. 后一种染色顺序将加大此题求解的难度，读者不妨试一下并对照下面的算式作出解释：

$$5\times4\times[1\times(1\times3+3\times2)+3\times(1\times2+2\times1)]=420$$

显然，图中的连接状况是本质条件，而是否空间图形则无关紧要. 试看以下两个变形题目：

(1) 用 5 种颜色给如图 2-3 中的 5 个车站的候车牌（$P$、$A$、$B$、$C$、$D$）染色，要求相邻两个车站间的候车牌不同色，有多少种不同的染色方案？

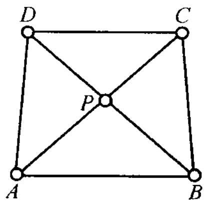

图 2-3

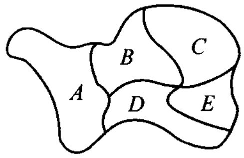

图 2-4

(2) 图 2-4 所示为一张有 5 个行政区划的地图，今要用 5 种颜色给地图着色，要求相邻区域不同色（$B$ 与 $E$，$C$ 与 $D$ 不算相邻区域），共有多少种着色方案？

**例6** 在 1～120 的整数中，合数与质数各有多少个？

**解** 如果 $a$ 是一个合数，那么一定有一个质数 $p \leqslant \sqrt{a}$，而 $\sqrt{120} < \sqrt{121} = 11$，故不超过 120 的合数必定是质数 2，3，5，7 的倍数. 设

$A_1=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 2\mid a\}$，$A_2=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 3\mid a\}$

$A_3=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 5\mid a\}$，$A_4=\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 7\mid a\}$

则 $|A_1|=\left[\dfrac{120}{2}\right]=60$，$|A_2|=\left[\dfrac{120}{3}\right]=40$，$|A_3|=\left[\dfrac{120}{5}\right]=24$，$|A_4|=\left[\dfrac{120}{7}\right]=17$

$|A_1\cap A_2|=\left[\dfrac{120}{2\times 3}\right]=20$，$|A_1\cap A_3|=\left[\dfrac{120}{2\times 5}\right]=12$

$|A_1\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{2\times 7}\right]=8$，$|A_2\cap A_3|=\left[\dfrac{120}{3\times 5}\right]=8$

$|A_2\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{3\times 7}\right]=5$，$|A_3\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{5\times 7}\right]=3$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\left[\dfrac{120}{2\times 3\times 5}\right]=4$

$|A_1\cap A_2\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{2\times 3\times 7}\right]=2$

$|A_1\cap A_3\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{2\times 5\times 7}\right]=1$

$|A_2\cap A_3\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{3\times 5\times 7}\right]=1$

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\left[\dfrac{120}{2\times 3\times 5\times 7}\right]=0$

由公式 ① 得

$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|$

$=(60+40+24+17)-(20+12+8+8+5+3)+(4+2+1+1)-0=93$

这就是说，在不超过 120 的正整数中或是 2 的倍数，或是 3 的倍数，或是 5 的倍数，或是 7 的倍数的数共有 93 个，其中含有 2，3，5，7 本身，故合数的个数为 $93-4=89$(个).

而两质数的个数等于 120 个数中除去合数与数 1 的个数：$120-(89+1)=30$(个).

**例7** 据一份调查资料显示，冬天的某日，有 1000 户人家使用煤气、油或煤作燃料取暖，所用燃料数依次为 265，51，803. 而据户主们回忆，在这天使用煤气或油，油或煤，煤气或煤的数量依次为 287，843，919. 试论证这一资料有不合实际之处.

**解** 设 $A$ 为 1000 户中的总用量，$A_1$，$A_2$，$A_3$ 分别表示 1000 户中用煤气、油、煤的户数，

则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，其中 $|A_1|=265$，$|A_2|=51$，$|A_3|=803$，$|A_1\cup A_2|=287$，$|A_2\cup A_3|=843$，$|A_1\cup A_3|=919$

由公式 ①，得 $|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|=265+51-287=29$

同理，$|A_2\cap A_3|=11$，$|A_3\cap A_1|=149$. 于是由公式 ①，得

$1000=|A_1\cup A_2\cup A_3|=265+51+803-(29+11+149)+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

故 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=1189-1119=70>|A_2|$

这与 $A_1\cap A_2\cap A_3\subseteq A_2$ 相矛盾. 因而这一资料不合实际.

最后再有一个更具有组合韵味的计数问题.

**例8** 46 个国家派代表队参加亚洲数学竞赛，比赛共 4 个题. 结果统计如下：

第 1 题对的学生 235 人；第 1、2 两题都对的 59 人；第 1、3 两题都对的 29 人；第 1、4 两题都对的 15 人；四个题全对的有 3 人. 又知道有人做对了前三个题，但没有做好第四个题.

求证：存在一个国家，这个国家派出的选手中至少有 4 人做对了且只做对了第一个题目.

**证明** 设集合

$I=\{$全部选手$\}$

$A=\{$第一题对的考生$\}$

$B=\{$第二题对的考生$\}$

$C=\{$第三题对的考生$\}$

$D=\{$第四题对的考生$\}$

则 $|A|=235$, $|A\cap B|=59$, $|A\cap C|=29$, $|A\cap D|=15$, $|A\cap B\cap C\cap D|=3$

因为 $|A\cap B\cap C|>|A\cap B\cap C\cap D|=3$

同理 $|A\cap C\cap D|$, $|A\cap B\cap D|>3$，可见：

$$|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|>6$$

注意到

$$|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|=|A\cap\overline{(B+C+D)}|$$
$$=|A+B+C+D|-|B+C+D|$$
$$=(|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-\cdots+|A\cap B\cap C|+\cdots-|A\cap B\cap C\cap D|)-(|B|+|C|+|D|-|B\cap C|-|C\cap D|-|B\cap D|+|B\cap C\cap D|)$$
$$=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|$$
$$>235-59-29-15+6=138$$

可见 $|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|\geqslant 139=3\times 46+1>3\times 46$

由抽屉原理知，存在一个国家，该国派出的选手中至少有 4 人做对了且只做对了第一题.

## 原版赛题传真

**Problem**

Nine trucks follow one another, in a line, on a highway. At the end of a day's ride it turned out that each driver disliked the style of the driving of the one in front of him. They wish to rearrange themselves so that, next day, no truck would follow the same truck that it followed on the first day. How many such rearrangements are possible?

**Solution**

For $i=1, 2, \cdots, n$, let $P_i$ be the set of those permutations of the set $\{1, 2, \cdots, n\}$ in which the element "$i$" appears immediately after "$i-1$". Note that $|P_i|=(n-1)!$ (the number of arrangements of the elements $1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$; the position of "$i$" is determined).

If $K$ is a subset of $\{2, \cdots, n\}$ with $|K|=k$, then

$$\left|\bigcap_{i\in K}P_i\right|=(n-k)! \qquad (2)$$

(such is the number of permutations of $\{1, 2, \cdots, n\}\backslash K$; any such permutation uniquely