

21世纪

高等学校电子信息类规划教材



电磁场与电磁波

(第二版)

王家礼 朱满座 路宏敏 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

0441. 4/36=2

2004

21 世纪高等学校电子信息类系列教材

电磁场与电磁波

(第二版)

王家礼 朱满座 路宏敏 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

全书共分八章,内容包括:矢量分析、静电场、恒定电流的电场和磁场、静态场的解、时变电磁场、平面电磁波、电磁波的辐射及导行电磁波。

本书内容精练,概念清晰,语言流畅,注重实践性与新颖性。为便于学习使用,书中安排有较多的例题。

本书可作为高等学校本科相关专业“电磁场与电磁波”课程的教材,也可作为有关科技人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波 / 王家礼, 朱满座, 路宏敏编著. —2 版.

—西安: 西安电子科技大学出版社, 2004.12 (2007.8 重印)

(21 世纪高等学校电子信息类系列教材)

ISBN 978-7-5606-0940-9

I. 电… II. ①王… ②朱… ③路… III. ①电磁场—高等学校—教材
②电磁波—高等学校—教材 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 107147 号

责任编辑 云立实 戚文艳

出版发行 西安电子科技大学出版社 (西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西兰力印务有限责任公司

版 次 2004 年 12 月第 2 版 2007 年 8 月第 11 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 19

字 数 446 千字

印 数 56 001~64 000 册

定 价 23.00 元

ISBN 978-7-5606-0940-9 / TN·0165

XDUP 1211022-11

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜, 谨防盗版。

第二版前言

本书作为西安电子科技大学电子类专业“电磁场与电磁波”课程的统一教材，是按照西安电子科技大学1999年教改方案确定的教学内容，参照各学院的教学大纲编写的。在编写中，吸收了部分讲课教师的意见和建议，同时融入了编者长期的教学经验和体会。

根据教学需求，我们对该书的第一版进行了部分修改，在第五、六、七章中增加了部分内容。其中第一、八章由王家礼修订，第二、三、四章由朱满座修订，第五、六、七章由路宏敏修订。最后由王家礼负责全书的统稿工作。

本书在编写过程中，西安电子科技大学出版社云立实、戚文艳编辑对此书的再版付出了艰辛的劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中的错误和不当之处在所难免，衷心希望使用本书的老师和同学批评指正。

编者

2004年9月

第一版前言

现代电子技术如通讯、广播、电视、导航、雷达、遥感、测控、电子对抗、电子仪器和测量系统，都离不开电磁波的发射、控制、传播和接收；从家用电器、工业自动化到地质勘探，从电力、交通等工业、农业到医疗卫生等国民经济领域，几乎全都涉及到电磁场理论的应用。不仅如此，电磁学一直是，将来仍是新兴学科的孕育点，学习这一课程对培养学生严谨的科学学风、科学方法以及抽象思维能力、创新精神等，都起着十分重要的作用。因此，在我国和世界先进工业国家中，各高等学校都把它列入电子类专业必修的专业基础课。

本书作为西安电子科技大学各电子类专业“电磁场与电磁波”课程的统一教材，是按照西安电子科技大学1999年教改方案确定的教学内容，参照各学院的教学大纲编写的。在本书的编写过程中，还参照了全国普通高等学校工科电磁场理论课程教学指导小组1993年制定，并由原国家教委颁布的教学基本要求。在编写中，吸收了部分讲课教师的意见和建议，同时融入了编者长期的教学经验和体会。

全书共分八章。第一章首先复习矢量分析的基本知识，力求简明实用，为以后学习奠定教学基础。第二、三、四章讨论静态场，论述了静电场、恒定电流的电场和磁场的基本概念和计算方法及其应用。在第四章中专门讨论了静态场边值问题的基本解法，以便学会场问题的基本处理方法，为以后进一步学习奠定基础。第五、六、七章研究时变电磁场和电磁波的基本理论和有关应用，论述了麦克斯韦方程组及其边界条件，研究了无界媒质中均匀平面波的特性、均匀平面波在平面分界面的反射和折射以及全反射和全透射的条件、均匀平面波在多层介质中的反射和折射，讨论了电磁波的辐射特性及其应用。第八章研究了导行电磁波的特性，并介绍了波导、同轴线、谐振腔的特点及应用。书末附录给出了重要的矢量公式、常用数学公式以及物理量和单位，以便查用。

本书是西安电子科技大学国家电工电子教学基地的规划教材之一，由西安电子科技大学机电学院和电子工程学院的老师共同编写完成。其中第一、八章由王家礼编写，第二、三、四章由朱满座编写，第五、六、七章由路宏敏编写，最后由王家礼负责全书的统稿工作。本书在编写过程中，得到了许多同志的大

力支持与帮助，赵永久、王新稳、任获荣提供了部分习题，韩军功、李海、李文成、黄磊、王磊为本书打印了部分手稿及绘制了部分图稿。

本书的编写大纲由褚庆昕教授审阅，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢。

本书在编写过程中，孙肖子教授给予了大力支持和帮助，西安电子科技大学出版社云立实、孙雪妹编辑为此书的出版付出了艰辛的劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中错误和不当之处在所难免，衷心希望使用本书的老师、同学和读者批评指正。

编 者

2000年9月

目 录

第一章 矢量分析	1
1.1 场的概念	1
1.2 标量场的方向导数和梯度	3
1.3 矢量场的通量和散度	6
1.4 矢量场的环量和旋度	10
1.5 圆柱坐标系与球坐标系	13
1.6 亥姆霍兹定理	16
小结	17
习题一	18
第二章 静电场	21
2.1 库仑定律与电场强度	21
2.2 高斯定理	23
2.3 静电场的旋度与静电场的电位	25
2.4 电偶极子	28
2.5 电介质中的场方程	29
2.6 静电场的边界条件	33
2.7 导体系统的电容	35
2.8 电场能量与能量密度	39
2.9 电场力	42
小结	43
习题二	45
第三章 恒定电流的电场和磁场	47
3.1 恒定电流的电场	47
3.2 磁感应强度	54
3.3 恒定磁场的基本方程	56
3.4 矢量磁位	59
3.5 磁偶极子	62
3.6 磁介质中的场方程	63
3.7 恒定磁场的边界条件	67
3.8 标量磁位	69
3.9 互感和自感	70
3.10 磁场能量	72
3.11 磁场力	74
小结	75
习题三	77

第四章 静态场的解	80
4.1 边值问题的分类	80
4.2 唯一性定理	81
4.3 镜像法	82
4.4 分离变量法	89
4.5 复变函数法	98
4.6 格林函数法	104
4.7 有限差分法	111
小结	115
习题四	116
第五章 时变电磁场	119
5.1 法拉第电磁感应定律	119
5.2 位移电流	122
5.3 麦克斯韦方程组	125
5.4 时变电磁场的边界条件	128
5.5 时变电磁场的能量与能流	135
5.6 正弦电磁场	138
5.7 波动方程	144
5.8 时变电磁场中的位函数	146
小结	149
习题五	151
第六章 平面电磁波	154
6.1 无耗媒质中的平面电磁波	154
6.2 导电媒质中的平面电磁波	162
6.3 电磁波的极化	169
6.4 色散、相速和群速	174
6.5 均匀平面电磁波向平面分界面的垂直入射	179
6.6 均匀平面电磁波向多层媒质分界面的垂直入射	186
6.7 均匀平面电磁波向平面分界面的斜入射	190
6.8 均匀平面电磁波的全透射和全反射	197
小结	202
习题六	203
第七章 电磁波的辐射	207
7.1 滞后位	207
7.2 电基本振子的辐射场	210
7.3 对偶原理与磁基本振子的辐射场	215
7.4 天线的电参数	218
7.5 对称线天线和天线阵的概念	223
7.6 面天线的辐射场	230
7.7 互易定理	234
7.8 天线的有效面积	237
7.9 传输方程	238

小结	239
习题七	240
第八章 导行电磁波	242
8.1 沿均匀导波装置传输电磁波的一般分析	242
8.2 矩形波导	251
8.3 圆柱形波导	260
8.4 波导中的能量传输与损耗	267
8.5 同轴线	271
8.6 谐振腔	275
小结	284
习题八	285
附录一 重要的矢量公式	287
附录二 常用数学公式	289
附录三 量和单位	293

第一章

矢量分析

电场和磁场都是矢量场，因此在研究电磁场与电磁波之前，我们先介绍分析矢量场和标量场问题的数学工具——矢量分析。掌握矢量分析的数学工具将为学习电磁场与电磁波内容奠定必要的数学基础。本章重点讨论如下内容：

- 标量场的方向导数和梯度
- 矢量场的通量和散度
- 矢量场的环量和旋度
- 亥姆霍兹定理

1.1 场的概念

1.1.1 矢性函数

数学上，实数域内任一代数数量 a 都可以称为标量，因为它只能表示该代数数量的大小。在物理学中，任意一个代数数量一旦被赋予物理单位，则成为一个具有物理意义的标量，即所谓的物理量，如电压 u 、电流 i 、面积 S 、体积 V 等等。

在二维空间或三维空间内的任一点 P ，它是一个既存在大小（或称为模）又有方向特性的量，故称为实数矢量，用黑体 A 表示，而白体 A 表示 A 的大小（即 A 的模）。若用几何图形表示，它是从原点出发画一条带有箭头的直线段，直线段的长度表示矢量 A 的模，箭头的指向表示该矢量 A 的方向。矢量一旦被赋予物理单位，便成为具有物理意义的矢量，如电场强度 E 、磁场强度 H 、速度 v 等等。

若某一矢量的模和方向都保持不变，此矢量称为常矢，如某物体所受到的重力。而在实际问题中遇到的更多的是模和方向或两者之一会发生变化的矢量，这种矢量我们称为变矢，如沿着某一曲线物体运动的速度 v 等。

设 t 是一数性变量， A 为变矢，对于某一区间 $G[a, b]$ 内的每一个数值 t ， A 都有一个确定的矢量 $A(t)$ 与之对应，则称 A 为数性变量 t 的矢性函数。记为

$$A = A(t)$$

而 G 为 A 的定义域。矢性函数 $A(t)$ 在直角坐标系中的三个坐标分量都是变量 t 的函数，分别为 $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 、 $A_z(t)$ ，则矢性函数 $A(t)$ 也可用其坐标表示为

$$A = A_x(t)e_x + A_y(t)e_y + A_z(t)e_z$$

其中 e_x 、 e_y 、 e_z 为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向单位矢量。

在矢量代数中，已经学习过矢性函数的极限和连续性，矢性函数的导数和微分，矢性函数的积分。由于篇幅所限我们不再讨论，但是它们的运算法则我们必须掌握，这样才能学好后面的内容。

1.1.2 标量场和矢量场

在许多科学问题中，常常需要研究某种物理量在某一空间区域的分布情况和变化规律，为此，在数学上引入场的概念。

如果在某一空间区域内的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，则称在此区域内确定了该物理量的一个场。换句话说，在某一空间区域中，物理量的无穷集合表示一种场。如在教室中温度的分布确定了一个温度场，在空间电位的分布确定了一个电位场。场的一个重要的属性是它占有空间，而且在该空间域内，除有限个点和表面外，其物理量应是处处连续的。若该物理量与时间无关，则该场称为静态场；若该物理量与时间有关，则该场称为动态场或称为时变场。

在研究物理系统中温度、压力、密度等在一定空间的分布状态时，数学上只需用一个代数变量来描述，这些代数变量(即标量函数)所确定的场称为标量场，如温度场 $T(x, y, z)$ 、电位场 $\varphi(x, y, z)$ 等。然而在许多物理系统中，其状态不仅需要确定其大小，同时还需确定它们的方向，这就需要用一个矢量来描述，因此称为矢量场，例如电场、磁场、流速场等等。

1.1.3 标量场的等值面和矢量场的矢量线

在研究场的特性时，以场图表示场变量在空间逐点分布的情况具有很大的意义。对于标量场，常用等值面的概念来描述。所谓等值面，是指在标量场 $\varphi(x, y, z)$ 中，使其函数 φ 取相同数值的所有点组成的曲面。如温度场的等值面，就是由温度相同的点所组成的等温面。等值面在二维空间称为等值线。如地图上的等高线，就是由高度相同的点连成的一条曲线。

标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的等值面方程为

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

对于矢量场 $A(x, y, z)$ ，则用一些有向矢量线来形象地表示矢量 A 在空间的分布，称为矢量线，如图 1-1 所示。矢量线上任一点的切线方向必定与该点的矢量 A 的方向相同。在直角坐标系中，其矢量线方程可写成

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1-1)$$

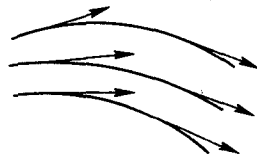


图 1-1 矢量场的矢量线

按照一定的规则，绘制出矢量线，既可根据矢量线确定矢量场中各点矢量的方向，又可根据矢量线的疏密程度，判别出场中各点矢量的大小和变化趋势。因此，矢量线在分析矢量场特性时是十分有用的。

例 1-1 求数量场 $\varphi = (x+y)^2 - z$ 通过点 $M(1, 0, 1)$ 的等值面方程。

解：点 M 的坐标是 $x_0=1, y_0=0, z_0=1$ ，则该点的数量场值为 $\varphi = (x_0 + y_0)^2 - z_0 = 0$ 。

其等值面方程为

$$(x + y)^2 - z = 0 \quad \text{或} \quad z = (x + y)^2$$

例 1-2 求矢量场 $A = xy^2e_x + x^2ye_y + zy^2e_z$ 的矢量线方程。

解：矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{y^2z}$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \\ \frac{dx}{xy^2} = \frac{dz}{y^2z} \end{cases}$$

解之即得矢量方程

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ z = c_2x \end{cases}$$

c_1 和 c_2 是积分常数。

1.2 标量场的方向导数和梯度

1.2.1 标量场的方向导数

在标量场中，标量 $\varphi = \varphi(M)$ 的分布情况可以由等值面或等值线来描述，但这只能大致地了解标量 φ 在场中的整体分布情况。而要详细地研究标量场，还必须对它的局部状态进行深入分析，即要考察标量 φ 在场中各点处的邻域内沿每一方向的变化情况。为此，引入方向导数的概念。

设 M_0 是标量场 $\varphi = \varphi(M)$ 中的一个已知点，从 M_0 出发沿某一方向引一条射线 l ，在 l 上 M_0 的邻近取一点 M ， $\overline{MM_0} = \rho$ ，如图 1-2 所示。若当 M 趋于 M_0 时（即 ρ 趋于零时），

$$\frac{\Delta\varphi}{\rho} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho}$$

的极限存在，则称此极限为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向

的方向导数，记为 $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0}$ ，即

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\rho} \quad (1-2)$$

由此可见，方向导数 $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0}$ 是函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿 l 方向对距离的变化率。当 $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$ 时，表示在 M_0 处函数 φ 沿 l 方向是增加的，反之就是减小的。

在直角坐标系中，方向导数可按下述公式进行计算。

若函数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微， $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 l 方向的方向余

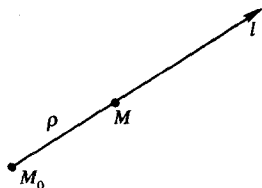


图 1-2 方向导数的定义

弦, 则函数 φ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数必定存在, 且为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-3)$$

证明: M 点的坐标为 $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 由于函数 φ 在 M_0 处可微, 故

$$\Delta \varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z + \omega \rho$$

ω 是比 ρ 高阶的无穷小。

两边除以 ρ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varphi}{\rho} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\rho} + \omega \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma + \omega \end{aligned}$$

当 ρ 趋于零时对上式取极限, 可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \quad \text{证毕}$$

例 1-3 求数量场 $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$ 在点 $M(1, 1, 2)$ 处沿 $l = e_x + 2e_y + 2e_z$ 方向的方向导数。

解: l 方向的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \\ \cos \beta &= \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \\ \cos \gamma &= \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{(x^2 + y^2)}{z^2}$$

数量场在 l 方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \\ &= \frac{1}{3} \frac{2x}{z} + \frac{2}{3} \frac{2y}{z} - \frac{2}{3} \frac{x^2 + y^2}{z^2} \end{aligned}$$

在点 M 处沿 l 方向的方向导数

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{3}$$

1.2.2 标量场的梯度

方向导数可以描述标量场中某点处标量沿某方向的变化率。但从场中沿任一点出发有无穷多个方向, 通常不必要更不可能研究所有方向的变化率, 而只关心沿哪一个方向变化率最大, 此变化率是多少? 我们从方向导数的计算公式来讨论这个问题。标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 l 方向上的方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma$$

在直角坐标系中, 令

$$l^0 = \cos \alpha e_x + \cos \beta e_y + \cos \gamma e_z$$

$$G = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_z$$

则
$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = G \cdot l^0 = |G| \cos(G, l^0) \quad (1-4)$$

矢量 l^0 是 l 方向的单位矢量, 矢量 G 是在给定点处的一常矢量。由上式显然可见, 当 l 与 G 的方向一致时, 即 $\cos(G, l^0) = 1$ 时, 标量场在点 M 处的方向导数最大, 也就是说, 沿矢量 G 方向的方向导数最大, 此最大值为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\max} = |G| \quad (1-5)$$

这样, 我们找到了一个矢量 G , 其方向是标量场在 M 点处变化率最大的方向, 其模即为最大的变化率。

在标量场 $\varphi(M)$ 中的一点 M 处, 其方向为函数 $\varphi(M)$ 在 M 点处变化率最大的方向, 其模又恰好等于最大变化率的矢量 G , 称为标量场 $\varphi(M)$ 在 M 点处的梯度, 用 $\text{grad} \varphi(M)$ 表示。在直角坐标系中, 梯度的表达式为

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_z \quad (1-6)$$

梯度用哈密顿微分算子的表达式为

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi \quad (1-7)$$

由上面的分析可知: 1° 在某点 M 处沿任意方向的方向导数等于该点处的梯度在此方向上的投影; 2° 标量场 $\varphi(M)$ 中每一点 M 处的梯度垂直于过该点的等值面, 且指向函数 $\varphi(M)$ 增大的方向。这一点是因为点 M 处梯度的坐标 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ 恰好是过 M 点的等值面 $\varphi(x, y, z) = c$ 的法线方向导数, 即梯度为其法向矢量, 因此梯度垂直于该等值面。

等值面和方向导数均与梯度存在一种比较特殊的关系, 这使得梯度成为研究标量场的一个极为重要的矢量。

设 c 为一常数, $u(M)$ 和 $v(M)$ 为数量场, 很容易证明下面梯度运算法则的成立。

$$\text{grad} c = 0 \quad \text{或} \quad \nabla c = 0 \quad (1-8)$$

$$\text{grad}(cu) = c \text{grad} u \quad \text{或} \quad \nabla(cu) = c \nabla u \quad (1-9)$$

$$\text{grad}(u \pm v) = \text{grad} u \pm \text{grad} v \quad \text{或} \quad \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1-10)$$

$$\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v \quad \text{或} \quad \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v \quad (1-11)$$

$$\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \text{grad} u - u \text{grad} v) \quad \text{或} \quad \nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \nabla u - u \nabla v) \quad (1-12)$$

$$\text{grad}[f(u)] = f'(u) \text{grad} u \quad \text{或} \quad \nabla[f(u)] = f'(u) \nabla u \quad (1-13)$$

例 1-4 设标量函数 r 是动点 $M(x, y, z)$ 的矢量 $r = xe_x + ye_y + ze_z$ 的模, 即 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明: $\text{grad} r = \frac{r}{r} = r^0$ 。

证:
$$\text{grad} r = \nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} e_x + \frac{\partial r}{\partial y} e_y + \frac{\partial r}{\partial z} e_z$$

因为

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}$$

所以 $\text{grad}r = \nabla r = \frac{x}{r}e_x + \frac{y}{r}e_y + \frac{z}{r}e_z = \frac{1}{r}(xe_x + ye_y + ze_z) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^\circ$

例 1-5 求 r 在 $M(1, 0, 1)$ 处沿 $\mathbf{l} = e_x + 2e_y + 2e_z$ 方向的方向导数。

解: r 的梯度为

$$\text{grad}r = \nabla r = \frac{1}{r}(xe_x + ye_y + ze_z)$$

点 M 处的坐标为 $x=1, y=0, z=1, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$, 所以 r 在 M 点处的梯度为

$$\text{grad}r = \nabla r = \frac{1}{\sqrt{2}}e_x + \frac{1}{\sqrt{2}}e_z$$

r 在 M 点沿 \mathbf{l} 方向的方向导数为

$$\left. \frac{\partial r}{\partial l} \right|_M = \nabla r \cdot \mathbf{l}^\circ$$

而

$$\mathbf{l}^\circ = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{1}{3}e_x + \frac{2}{3}e_y + \frac{2}{3}e_z$$

所以

$$\left. \frac{\partial r}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 1-6 已知位于原点处的点电荷 q 在点 $M(x, y, z)$ 处产生的电位为 $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$, 其中矢径 \mathbf{r} 为 $\mathbf{r} = xe_x + ye_y + ze_z$, 且已知电场强度与电位的的关系是 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, 求电场强度 \mathbf{E} 。

解: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\epsilon r}\right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

根据 $\nabla f(u) = f'(u) \cdot \nabla u$ 的运算法则,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)' \nabla r = \frac{-1}{r^2} \nabla r$$

又由例 1-2 得知, $\nabla r = \frac{1}{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^\circ$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\nabla r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon r^3}\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\mathbf{r}^\circ \end{aligned}$$

1.3 矢量场的通量和散度

1.3.1 矢量场的通量

在分析和描绘矢量场的特性时, 矢量穿过一个曲面的通量是一个很重要的基本概念。

将曲面的一个面元用矢量 $d\mathbf{S}$ 来表示, 其方向取为面元的法线方向, 其大小为 dS , 即

$$d\mathbf{S} = n dS \quad (1-14)$$

n 是面元法线方向的单位矢量。 n 的指向有两种情况: 对开曲面上的面元, 设这个开曲面是由封闭曲线 l 所围成的, 则选定绕行 l 的方向后, 沿绕行方向按右手螺旋的拇指方向就是 n 的方向, 如图 1-3(a) 所示; 对封闭曲面上的面元, n 取为封闭曲面的外法线方向, 如图 1-3(b) 所示。

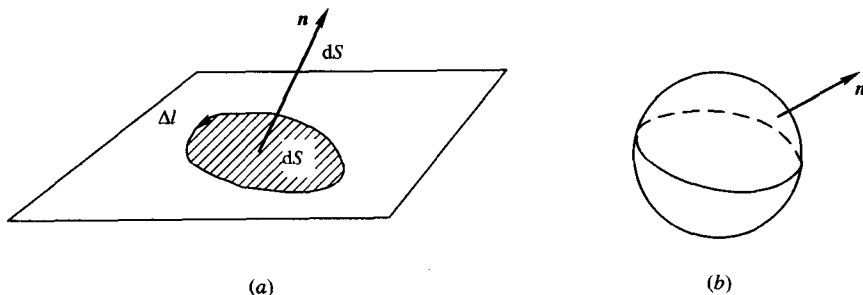


图 1-3 法线方向的取法

若面元 $d\mathbf{S}$ 位于矢量场 \mathbf{A} 中, 由于 $d\mathbf{S}$ 很小, 其各点上的 \mathbf{A} 值可以认为是相同的。矢量场 \mathbf{A} 和面元 $d\mathbf{S}$ 的标量积 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 便称为矢量 \mathbf{A} 穿过面元 $d\mathbf{S}$ 的通量。例如在流速场中, 流速 \mathbf{v} 是一个矢量, $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ 就是每秒中通过 $d\mathbf{S}$ 的流量。通量是一个标量。

将曲面 S 各面元上的 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 相加, 它表示矢量场 \mathbf{A} 穿过整个曲面 S 的通量, 也称为矢量 \mathbf{A} 在曲面 S 上的面积分:

$$\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot n dS \quad (1-15)$$

如果曲面是一个封闭曲面, 则

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-16)$$

表示矢量 \mathbf{A} 穿过封闭曲面的通量。若 $\Psi > 0$, 表示有净通量流出, 这说明封闭曲面 S 内必定有矢量场的源; 若 $\Psi < 0$, 表示有净通量流入, 说明封闭曲面 S 内有洞(负的源)。在大学物理课程中我们已知, 通过封闭曲面的电通量 Ψ 等于该封闭曲面所包围的自由电荷 Q 。若电荷 Q 为正电荷, Ψ 为正, 则表示有电通量流出; 若电荷 Q 为负电荷, Ψ 为负, 则表示有电通量流入。

1.3.2 矢量场的散度

上述通量是一个大范围面积上的积分量, 它反映了在某一空间内场源总的特性, 但它没有反映出场源分布特性。为了研究矢量场 \mathbf{A} 在某一点附近的通量特性, 我们把包围某点的封闭曲面向该点无限收缩, 使包含这个点在内的体积元 ΔV 趋于零, 取如下极限:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

称此极限为矢量场 \mathbf{A} 在某点的散度, 记为 $\text{div} \mathbf{A}$, 即散度的定义式为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-17)$$

此式表明, 矢量场 \mathbf{A} 的散度是一个标量, 它表示从该点单位体积内散发出来的矢量 \mathbf{A} 的通量(即通量密度)。它反映出矢量场 \mathbf{A} 在该点通量源的强度。显然, 在无源区域中, 矢量场 \mathbf{A} 在各点的散度均为零。

矢量场 \mathbf{A} 的散度可表示为哈密尔顿微分算子 ∇ 与矢量 \mathbf{A} 的标量积, 即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-18)$$

计算 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 时, 先按标量积规则展开, 再做微分运算。因而在直角坐标中有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-19)$$

利用哈密尔顿微分算子, 读者可以证明, 散度运算符合下列规则:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1-20)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi \quad (1-21)$$

1.3.3 散度定理

矢量 \mathbf{A} 的散度代表的是其通量的体密度, 因此可直观地知道, 矢量场 \mathbf{A} 散度的体积积分等于该矢量穿过包围该体积的封闭曲面的总通量, 即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-22)$$

上式称为散度定理, 也称为高斯定理。证明这个定理时, 将闭合面 S 包围的体积 V 分成许多体积元 $dV_i (i=1 \sim n)$, 计算每个体积元的小封闭曲面 S_i 上穿过的通量, 然后叠加。由散度的定义可得

$$\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i \quad (i=1 \sim n)$$

由于相邻两体积元有一个公共表面, 这个公共表面上的通量对这两个体积元来说恰好是等值异号, 求和时就互相抵消了。除了邻近 S 面的那些体积元外, 所有体积元都是由几个相邻体积元间的公共表面包围而成的, 这些体积元的通量总和为零。而邻近 S 面的那些体积元, 它们中有部分表面是在 S 面上的面元 dS , 这部分表面的通量没有被抵消, 其总和刚好等于从封闭曲面 S 穿出的通量。因此有

$$\sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_i = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

故得到

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

例 1-7 已知矢量场 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, 求由内向外穿过圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = H$ 所围封闭曲面的通量。