

CELIANG PINGCHA

21 世纪测绘学科高职高专精品规划教材

测量平差

刘仁钊 主编



黄河水利出版社

中国 测量 工程 师 注册 考试 教材

测量平差

第二版 王宁



地质出版社

21 世纪测绘学科高职高专精品规划教材

测 量 平 差

刘仁钊 主 编

黄河水利出版社

内 容 提 要

本书重点介绍了测量误差理论、条件平差、间接平差、误差椭圆等基本理论和方法;为了突出平差方法的具体应用,在书中最后两章介绍了单一导线平差和高程控制网平差。考虑到平差计算时的需要,附录中还结合条件平差和间接平差详细介绍了 MATLAB 软件在测量平差中的具体应用。

本书可供高职高专院校测量专业学生使用,也可供测量工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/刘仁钊主编. — 郑州:黄河水利出版社,
2007.8

21 世纪测绘学科高职高专精品规划教材

ISBN 978-7-80734-234-2

I. 测… II. 刘… III. 测量平差-高等学校:技术学校-
教材 IV. P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 112929 号

出 版 社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路 11 号

邮政编码:450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话:0371-66026940

传真:0371-66022620

E-mail:hhslebs@126.com

承印单位:黄河水利委员会印刷厂

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:11

字数:254 千字

印数:1—4 100

版次:2007 年 8 月第 1 版

印次:2007 年 8 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-80734-234-2/P·70

定价:20.00 元

前 言

本书是在高等学校测绘学科教学委员会的指导下,以全国高等学校测绘学科教学指导委员会“十五”高职高专规划教材研讨会上制定的《测量平差》教学大纲为主要依据,在总结多年教学经验的基础上编写完成的。全书共分为七章,授课 60~80 学时。重点介绍了测量误差理论、条件平差、间接平差、误差椭圆等基本理论和方法;为了突出平差方法的具体应用,在书中最后两章介绍了单一导线平差和高程控制网平差。考虑到平差计算时的需要,附录中还结合条件平差和间接平差详细介绍了 MATLAB 软件在测量平差中的具体应用。本书在编写过程中注重高职高专教材的特点,力求深入浅出、通俗易懂,尽量做到重点突出、循序渐进,着重于实际应用。

本书由湖北国土资源职业学院刘仁钊副教授任主编,其编写了前三章。参加编写的其他教师有:沈阳农业大学高等职业技术学院周园(第四章),四川建筑职业技术学院樊正林(第五章),湖北国土资源职业学院毕婧(第六章)、王淑娴(第七章),沈岩英承担了部分书稿的录入和校对以及全书插图的描绘工作。全书最后由刘仁钊统一修改定稿。

本书完成后,由全国高等学校测绘学科教学指导委员会副主任、武汉大学测绘学院陶本藻教授进行了认真细致的审稿,并提出了许多宝贵意见。在此对陶本藻教授和教材审定委员会的各位专家表示感谢!在本书编写过程中,参考了一些院校的同类教材,武汉大学潘润秋副教授和同济大学伍吉仓教授提出了许多宝贵的建议,在此表示感谢!同时,对黄河水利出版社为本教材顺利出版给予的大力支持表示感谢。

由于编者水平有限,书中的错误和不足之处在所难免,恳请广大读者给予批评指正。

编 者

2007 年 6 月

目 录

前 言

第一章 绪 论	(1)
第一节 观测误差	(1)
第二节 观测误差分类	(2)
第三节 测量平差的研究对象和任务	(4)
习 题	(4)
第二章 误差理论与最小二乘原理	(6)
第一节 偶然误差的统计规律	(6)
第二节 衡量精度的指标	(10)
第三节 方差与协方差传播律	(14)
第四节 权与定权的常用方法	(24)
第五节 协因数与协因数传播律	(29)
第六节 由真误差计算中误差	(32)
第七节 最小二乘原理	(35)
习 题	(37)
第三章 条件平差	(40)
第一节 条件平差原理	(40)
第二节 确定条件方程的个数	(48)
第三节 条件方程	(51)
第四节 法方程的组成与解算	(56)
第五节 精度评定	(64)
第六节 附有参数的条件平差	(70)
习 题	(75)
第四章 间接平差	(79)
第一节 间接平差原理	(79)
第二节 误差方程	(86)
第三节 法方程的组成与解算	(97)
第四节 精度评定	(102)
第五节 间接平差特例——直接平差	(106)
第六节 附有限制条件的间接平差	(110)
习 题	(115)

第五章 误差椭圆.....	(118)
第一节 点位真误差及点位误差.....	(118)
第二节 误差曲线与误差椭圆.....	(125)
第三节 相对误差椭圆.....	(127)
习 题.....	(129)
第六章 单一导线平差.....	(131)
第一节 单一附和导线条件平差.....	(131)
第二节 单一附和导线间接平差.....	(140)
习 题.....	(144)
第七章 高程控制网平差.....	(147)
第一节 概 述.....	(147)
第二节 高程控制网条件平差.....	(148)
第三节 高程控制网间接平差.....	(153)
习 题.....	(158)
附录 MATLAB 应用简介	(159)
参考文献.....	(169)

第一章 绪 论

测量平差是测绘类各专业的一门重要专业课,是测绘学科中测量数据处理方面重要的组成部分。测量平差是根据最小二乘原理,由一系列带有观测误差的测量数据求定未知量的最佳估值及精度的一门学科。

内容提要

本章作为绪论引出了观测值、观测、观测误差等基本概念;分析了观测误差产生的原因;根据观测误差对测量结果的影响性质,重点讨论了两类非常重要的误差——偶然误差和系统误差;最后简要说明了测量平差的研究对象和任务。

第一节 观测误差

1 观测值与观测误差

通过一定的测量仪器、工具、传感器或其他手段获取的,反映地球与其他实体的空间分布有关信息的数据,通常称为观测值或测量值。获取测量数据的过程称为测量或观测。观测数据可以是直接测量的结果,也可以是经过某种变换后的结果。

大量的实践表明,当对某个量进行重复观测时就会发现,这些观测值之间往往存在一些差异。例如,对同一段距离重复丈量若干次,量得的长度通常是互有差异的。另外,观测一个平面三角形的三个内角,就会发现其观测值之和不等于 180° 。这种在同一个量的各观测值之间,或在各观测值与其理论上的应有值之间存在的偏差定义为观测误差。在后续内容中,我们将观测值与其真值之间的偏差定义为观测值的真误差,并用符号 Δ 表示。而将观测值与其相应的平差值(通过某种最优法则进行平差计算得到的最可靠值,也称为最优估值、最或然值或最或是值)之间的偏差定义为观测值的改正数,也叫最或然误差,用符号 V 表示。

若用 L 表示观测值, $\tilde{L}$ 和 $\hat{L}$ 分别表示相应的真值和平差值,则真误差 Δ 和改正数 V 的定义式为

$$\Delta = \tilde{L} - L \quad (1-1)$$

$$V = \hat{L} - L \quad (1-2)$$

2 观测误差产生的原因

观测误差产生的原因是多种多样的,但由于任何观测值在获取过程中都离不开观测者、测量仪器和外界条件这三种要素,所以观测误差产生的原因概括起来有以下三个

方面。

2.1 测量仪器

所谓测量仪器,这里是指采集数据所采用的任何工具和手段。由于每一种仪器只具有一定限度的准确度,由此观测得到的数据必然带有误差。例如,在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时,就难以保证在估读厘米以下的尾数时正确无误。同时,仪器本身也有一定的误差,如水准仪的视准轴不平行于水准轴等。此外,在地图数字化中采用的数字化仪或扫描仪,使用自动化精密仪器如全站仪、GPS 接收机等所采集的数据都存在着仪器误差。

2.2 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性,所以在仪器的操作过程中也会产生误差。同时,观测者的技术水平和工作态度,也对观测数据的质量有直接影响。

2.3 外界条件

测量时所处的外界条件,如温度、湿度、风力、大气折光等因素和变化都会对观测数据直接产生影响。特别是高精度测量,更要重视外界条件产生的观测误差。例如,GPS 接收机所接收的是来自 2 万 km 高空的卫星信号,经过电离层、大气层都会发生信号延迟而产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是引起误差的主要来源,因此我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些时,观测中所产生的误差平均说来就可能相应地小一些,因而观测成果的质量就会高一些;反之,当观测条件差一些时,观测成果的质量就会低一些。如果观测条件相同,也就可以说观测成果的质量是相同的。因此,观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是,不管观测条件如何,在整个观测过程中,由于受到上述种种因素的影响,观测的结果就会产生这样或那样的误差。从这一意义上来说,在测量中产生误差是不可避免的。当然,在客观条件允许的限度内,测量工作者可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

第二节 观测误差分类

根据观测误差对测量结果的影响性质,可分为偶然误差、系统误差和粗差三类。

1 偶然误差

在相同的观测条件下做一系列的观测,如果误差在大小和符号上都表现出偶然性,即从单个误差看,该列误差的大小和符号没有规律性,但就大量误差的总体而言,具有一定的统计规律,这种误差称为偶然误差。

例如,仪器没有严格照准目标,估读水准尺上毫米数不准,测量时气候变化对观测数据产生微小变化等都属于偶然误差。此外,如果观测数据的误差是许多微小偶然误差项的总和,则其总和也是偶然误差。例如,测角误差可能是照准误差、读数误差、外界条件变

化和仪器本身不完善等多项误差的代数和,因此测角误差实际是许许多多微小误差项的总和。而每项微小误差又随着偶然因素影响的不断变化,其数值忽大忽小,其符号或正或负。这样,由它们所构成的总和,就其个体而言,无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的,这种误差也是偶然误差。这是观测数据中存在偶然误差最普遍的情况。

根据概率统计理论可知,如果各个误差项对其总和的影响都是均匀的小,即其中没有一项比其他项的影响占绝对优势时,那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此,偶然误差就其总体而言,都具有一定的统计规律性,故有时又把偶然误差称为随机误差。

2 系统误差

在相同的观测条件下做一系列的观测,如果误差在大小、符号上表现出系统性,或者在观测过程中按一定的规律变化,或者为某一常数,这种误差就称为系统误差。

例如,用具有某一尺长误差的钢尺量距时,由尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加,距离愈长,所积累的误差也愈大,这种误差属于系统误差。每一把钢尺的尺长误差是一个常数,这种系统误差称为常系差。而对于全长的影响,则为线性项误差。在定点垂直形变测量中,两固定点间每天重复进行水准测量,就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差,这种具有线性项、周期性现象等有规律的系统误差是一种规律性系统误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时产生的,当观测中有显著的系统误差时,偶然误差就处于次要地位,观测误差就呈现出系统的性质;反之,则呈现出偶然的性质。

系统误差对观测结果的影响一般具有累积的作用,它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除或减弱其影响,达到实际上可以忽略不计的程度。所谓忽略不计的程度,是指残余的系统误差小于或至多等于偶然误差的量级。一种方法是通过合理的操作程序,例如进行水准测量时,使前后视距相等,以消除由于视准轴不平行于水准轴(i 角误差)对观测高差所引起的系统误差;还有在水平角观测中,总是进行盘左和盘右观测,以消除 $2C$ 误差。另一种方法是进行公式改正,例如对量距用的钢尺预先检定,求出尺长误差大小,对所量的距离进行改正,减弱尺长系统误差对量距的影响等。

如果观测列中已经排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列就可认为是带有偶然误差的观测列。

3 粗差

在数据采集过程中,如果其误差比在正常观测条件下所可能出现的最大误差还要大,则称之为粗差。通俗地说,粗差要比偶然误差大上好几倍。例如,观测时由于观测者的粗心大意读错,计算机输入数据错误,航测相片判读错误,控制网起始数据错误等。这种错误或粗差,在一定程度上可以避免。但在使用现今的高新测量技术如全球定位系统(GPS)、地理信息系统(GIS)、遥感(RS)以及其他高精度的自动化数据采集中,经常是粗差混入信息之中,识别粗差源并不是用简单方法可以达到目的的,需要通过数据处理方法

进行识别和消除其影响。

第三节 测量平差的研究对象和任务

由于观测结果不可避免地存在着误差,因此如何处理带有误差的观测值,找出待求量(以下称未知量)的最佳估值,在测绘学中是测量平差学科所研究的内容。

在测绘工程和其他工程领域中,只带有偶然误差的观测列占大多数,是比较普遍的情形,它是测量平差学科研究的基础内容,也是应用最广和理论研究中最重要的基础部分,一般认为属于经典测量平差范畴。

为了测定一条边长,丈量一次就可得出其长度,当然就不存在误差大小,也不存在数据处理问题。但如果对该边丈量 n 次,得到 n 个观测边长,取其平均值为该边长的最后长度。此时,偶然误差影响得到消除或减弱,既提高了边长的精度,又可检查观测值是否有错误存在,这就是多测 $n-1$ 次所得到的效益。取平均值就是一种带有偶然观测列的数据处理方法。多测的 $n-1$ 次,称为多余观测,用 r 表示,即 $r=n-1$ 次,多余观测数就是多于未知量的观测数。在测量工作中,为了提高成果质量和检查发现错误常做多余观测。当观测中进行了多余观测时,由于每个观测值带有偶然误差,就会产生一定的问题。如确定一个平面三角形的形状,只要测定其中两个内角就够了,现观测三个内角,三个内角观测值之和就不会等于 180° ,这就产生了闭合差或不符值。如何处理由于多余观测值之间的不符值或闭合差,求出未知量的最佳估值并评定结果的精度是测量平差的基本任务。

综上所述,测量平差的任务是:

(1)对一系列带有偶然误差的观测值,按最小二乘原理,消除各观测值之间的不符值,合理地配赋误差,求出未知量的最可靠值。

(2)运用合理的方法来评定测量成果的精度。

习 题

1. 什么叫观测误差?产生观测误差的原因主要有哪几个方面?
2. 观测条件是由哪些因素构成的?观测条件相同,其精度一定相同吗?
3. 根据观测误差对观测结果影响的不同,观测误差分为哪几类?
4. 为什么观测值中一定存在偶然误差?偶然误差能被消除吗,为什么?
5. 何谓多余观测?为什么在测量中常常要进行多余观测?
6. 测量平差的任务是什么?
7. 根据本书的观点,观测值的真误差属于什么误差?
8. 在角度测量中,总是用正倒镜观测;在水准测量中,总是尽量使前后视距相等,这些规定都是为了消除什么误差?
9. 用钢尺丈量距离,下列几种情况会使测量结果中含有误差,试分别判定误差的性质:

- (1)刻画不准确;
- (2)尺不水平;
- (3)估读小数不准确;
- (4)尺垂曲;
- (5)尺端稍偏直线方向(定线不准确)。

10.在水准测量中,有下列几种情况,使水准尺读数带有误差,试分别判断误差的性质:

- (1)视准轴与水准轴不平行;
- (2)仪器下沉;
- (3)读数时估读不准确;
- (4)水准尺下沉。

第二章 误差理论与最小二乘原理

误差理论是测量平差的理论基础,最小二乘原理是测量平差的准则。本章包含了测量平差中许多基本概念和定义,因此本章是学习和掌握测量平差的基础。

内容提要

本章主要介绍偶然误差的四个特性,精度、衡量精度的指标、方差、协方差、权、定权方法、协因数和最小二乘法等基本概念。在此基础上导出了协方差和协因数两个重要的传播律,并通过实例说明定权和两个传播律的应用。

学习要求

理解偶然误差、方差、协方差、权、协因数和最小二乘法等重要概念;掌握偶然误差的规律、常用定权方法,以及协方差和协因数传播律、由真误差计算中误差;学会常用定权和两个传播律在测量中的应用。

学习重点

偶然误差的规律,方差、协方差、权、协因数、最小二乘法等概念,常用定权方法,协方差、协因数传播律及其在测量中的应用。

学习难点

协方差传播律、协因数传播律及定权方法在测量中的具体应用。

第一节 偶然误差的统计规律

任何一个观测量,理论上总存在一个能代表其真正大小的数值,这个数值就称为该观测量的真值。对于某一观测量而言,若设观测值为 L , 其真值为 $\tilde{L}$, 则其差数定义为

$$\Delta = \tilde{L} - L \quad (2-1)$$

式中 Δ ——观测值 L 的真误差,简称误差。

对于某一确定的观测量,可以有多个不同的观测值,但真值只有一个。

研究 Δ 的性质及其概率特性是概率论的内容,测量平差研究的对象是一系列含有偶然误差的观测值。因此,这里的 Δ 仅指测量中的偶然误差。下面将对偶然误差的性质进行分析,最后得出偶然误差的统计规律。

1 偶然误差的统计分析

设有一组观测值 $L_1, L_2, \dots, L_n$, 其相应的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$, 真误差为 $\Delta_1,$

$\Delta_2, \dots, \Delta_n$ 。为了揭示偶然误差的规律性,将该偶然误差按照以下三种方法进行统计分析。

1.1 统计分析

在相同观测条件下,独立地观测了某测区 162 个三角形的全部内角。由于观测中含有观测误差,因此每个三角形的三个内角之和一般不会等于 180° 。由式(2-1)可求出 162 个三角内角和的真误差为

$$\Delta_i = 180^\circ - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1, 2, \dots, 162)$$

式中 下标 i ——第 i 个三角形。

由于三角形各内角均为独立观测值,因此三角形内角和真误差 Δ_i 相互之间是互相独立的偶然误差。这里所谓独立,是反映各个误差在数值的大小和符号上互不影响,与这一组误差相对应的观测值称为互相独立的观测值。

现将全部误差按其正负分成两组,并将每组中的真误差按绝对值从小到大排列,以误差区间 $d\Delta = 0.2''$ 统计出误差落入到各个区间内的个数 μ_i ,计算出误差出现在各个区间的频率 f_i ,其计算公式为

$$f_i = \mu_i / n \tag{2-2}$$

式中 n ——误差的总个数。现将计算结果列于表 2-1 中。

表 2-1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为负值		Δ 为正值	
	个数 μ_i	频率 μ_i / n	个数 μ_i	频率 μ_i / n
0.0'' ~ 0.2''	21	0.130	21	0.130
0.2'' ~ 0.4''	19	0.117	19	0.117
0.4'' ~ 0.6''	12	0.074	15	0.093
0.6'' ~ 0.8''	11	0.068	9	0.056
0.8'' ~ 1.0''	8	0.049	9	0.056
1.0'' ~ 1.2''	6	0.037	5	0.031
1.2'' ~ 1.4''	3	0.019	1	0.006
1.4'' ~ 1.6''	2	0.012	1	0.006
1.6'' 以上	0	0	0	0
总和	82	0.506	80	0.495

从表 2-1 中可以看出,该组误差表现出这样的分布规律:绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多;绝对值相等的正误差个数与负误差个数相近;误差的绝对值有一定限度,最大不超过 1.6''。

大量的统计实践告诉我们,在其他测量结果中,偶然误差也都显示出上述同样的规律。因此,上述闭合差的分布规律,实际上就是偶然误差所具有的统计规律性。

1.2 频率直方图分析

为了形象地表示偶然误差的分布规律,还可以利用频率直方图来表示误差分布情况。根据表 2-1 中的数据,以误差 Δ 的数值为横坐标,以 $\frac{\mu_i}{n}$ 为纵坐标可绘制出频率直方图,如图 2-1 所示。每一误差区间上的长方形面积表示误差在该区间出现的相对个数(频率)。误差较小的长方形较高,其面积($S = \frac{\mu_i}{n} \times d\Delta = \mu_i/n = f_i$)较大,即误差的相对个数较多;反之,误差较大的长方形较矮,其面积较小,即误差的相对个数较少。所有长方形基本上对称于纵坐标轴,这说明绝对值相等的正误差和负误差出现的相对个数很接近。误差绝对值大于 1.6" 的长方形没有,表明其面积为零,即出现的相对个数为零,亦即不会出现。我们还注意到,所有长方形面积之和等于 1,即 $\sum_{i=1}^n f_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ 。

1.3 正态分布密度函数

由于误差的取值是连续的,故当误差个数 n 无限增多,并无限缩小误差区间时,可以想象图中各个小长方条顶边的折线就变成一条光滑的曲线。如图 2-2 所示,我们称这条曲线为误差分布的概率密度曲线或误差分布密度曲线,简称为误差曲线。误差曲线上任一点的纵坐标 $f(\Delta)$ 与误差区间 $d\Delta$ 的乘积,即是误差区间内长方形的面积,就是误差出现在该区间内的实际频率。

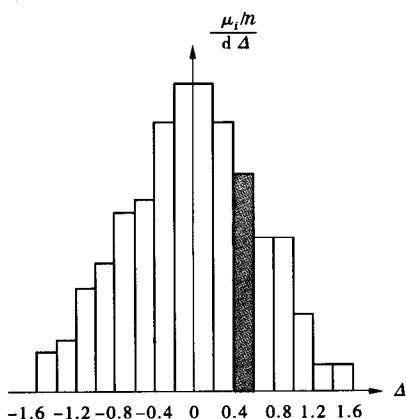


图 2-1

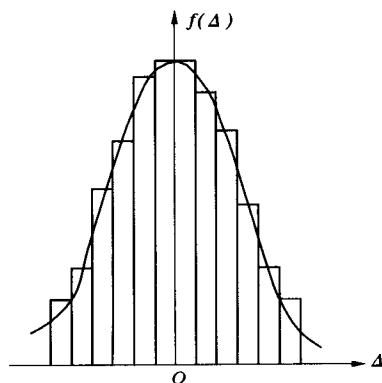


图 2-2

显然,当误差个数 $n \rightarrow \infty$ 时,误差区间 $d\Delta$ 逐渐缩小,实际频率将逐渐趋于理论频率,也就是误差出现在该区间内的概率,即

$$P(\Delta) = f(\Delta)d\Delta \quad (2-3)$$

式中 $f(\Delta)$ —— Δ 的密度函数。

由此可以看出,偶然误差的分布随着 n 的无限增大是以正态分布为其极限分布的。根据高斯(德国数学家和测量学家,1809 年)的推证,偶然误差 Δ 是服从均值为零的正态分布的随机变量,其密度函数的具体形式为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \quad (2-4)$$

式中 σ ——均方差。

σ 是随机变量的一个重要统计量,也是测量中的一个重要精度指标。

根据概率论中对正态分布的讨论可知,密度函数及误差曲线具有如下特点:

(1) $f(\Delta)$ 恒大于零,即误差曲线图像全部位于横轴上方。

(2) $f(\Delta)$ 是偶函数,即误差曲线图像关于纵轴对称。

(3) 参数 σ 随着取值不同,曲线的形状也不相同。图 2-3 分别给出了 σ 为 2.5 和 0.4 时的两条曲线。 σ 越大,曲线越“矮胖”;反之越“高瘦”。

(4) 对 $f(\Delta)$ 求一阶导数,并令其等于零,则有

$$f'(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{2\Delta}{2\sigma^2}\right) = 0$$

解上式可得 $\Delta = 0$, 故函数的最大值为

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (2-5)$$

(5) 对 $f(\Delta)$ 求二阶导数,并令其等于零,则有

$$f''(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right) = 0$$

由此可得

$$\Delta = \pm \sigma \quad (2-6)$$

式(2-6)说明, σ 为误差曲线拐点的横坐标。

2 偶然误差的分布特性

通过以上分析,偶然误差的分布特性可阐述如下:

(1) 在一定的观测条件下,误差的绝对值不会超过一定的限值,或偶然误差的绝对值大于某个值的概率为零,或观测误差的绝对值小于某个值的概率恒等于 1,该特性称为偶然误差的有界性,即

$$P(|\Delta_i| > \Delta_M) = 0 \quad (2-7)$$

或

$$P(|\Delta_i| < \Delta_M) = \int_{-\Delta_M}^{+\Delta_M} f(\Delta) d\Delta = 1 \quad (2-8)$$

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率要大,该特性称为偶然误差的聚中性。即若 $|\Delta_1| < |\Delta_2|$, 则有 $f(\Delta_1) > f(\Delta_2)$ 。

(3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相等,该特性称为偶然误差的对称性。由于 $f(-\Delta_i) = f(\Delta_i)$, 故其概率必有 $f(-\Delta) d\Delta = f(\Delta) d\Delta$ 。

(4) 偶然误差的数学期望或误差的算术平均值的极限值为 0,该特性称为偶然误差的

抵偿性,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = E(\Delta) = 0 \quad (2-9)$$

式中 $E(\Delta)$ ——偶然误差 Δ 的数学期望值(或理论均值),它描述了随机变量的取值中心。

符号“ $[\]$ ”是测量平差教材和文献中的一个惯用符号,与数学中的“ $\sum$ ”读音和意义相同,表示方括号中表达式的所有项求和,以下相同。

第二节 衡量精度的指标

测量平差的基本内容之一就是衡量测量成果的精度。因此,正确地理解精度的含义并准确地评定观测结果的精度,是非常重要的。本节将首先说明精度的含义,然后给出衡量精度的指标。

1 精度的含义

由前一节知道,在一定的观测条件下进行的一组观测,它对应着一种确定不变的误差分布。如果观测过程中小误差出现的个数较多,误差曲线较陡峭,即误差分布较为密集,则表示该组观测质量较好,也就是说,这一组观测精度较高;反之,如果误差曲线较平坦,分布较为离散,则表示该组观测质量较差,也就是说,这一组观测精度较低。由此可见,所谓精度,就是反映一组独立误差分布的密集或离散的程度。倘若两组观测成果的误差分布相同,我们可以说两组观测成果的精度相同;反之,若误差分布不同,则精度也就不同。

精度总是对一组观测而言的。在相同的观测条件下所进行的一组观测,由于它是对应着同一种误差分布,因此对于这一组中的每一个观测值,都称为是同精度观测值。例如,在表 2-1 所列 162 个三角形的真误差中,尽管真误差有大有小,有的为 $0.1''$,有的为 $1.5''$,但由于它们所对应的误差分布相同,故这些结果彼此是同精度的。

精度是对一组观测值而言的,与单个观测值的误差是两个不同的概念,不能混淆。

2 衡量精度的指标

为了衡量观测值的精度高低,可以按前节所述的三种方法,把一组相同条件下得到的误差,用误差分布表、绘成直方图或绘出误差分布曲线的方法来比较。但在实际工作中,这样做很不方便,有时甚至很困难。人们自然希望对精度有一个数字概念,且能用它来反映误差分布的密集或离散程度,并用该数字来作为衡量精度的指标,定量地反映观测成果的好坏。

如何通过一组误差的某种形式来定义精度指标呢?前已提及,精度是指一组误差的分布密集或离散的程度。分布愈密集,则表示在该组误差中,绝对值较小的误差所占的相对个数愈多。在这种情况下,该组误差绝对值的平均值就一定小。由此可见,精度虽然不能代表个别误差的大小,但是它与这一组误差绝对值的平均大小显然有着直接关系。因此,用一组误差的平均大小作为衡量精度高低的指标,是完全合理的。