



普通高等教育“十五”国家级规划教材

有限元技术基础

冷纪桐 赵军 张娅 编



化学工业出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

有限元技术基础

冷纪桐 赵军 张娅 编

图例在附录(CIP)中

有限元技术基础(冷纪桐、赵军、张娅编)北京:化学工业出版社,2007.4

ISBN 978-7-122-00679-8
普通高等教育“十五”国家级规划教材

I. ①冷... ②赵... ③张... Ⅱ. 冷纪桐等编 Ⅲ. 有限元分析 Ⅳ. O241.85

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第031192号

责任编辑:李利平

责任编辑:李利平
封面设计:张娅

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区黄线大街18号 邮政编码100011)

印刷:北京印刷集团有限责任公司

装订:天津市滨海新区

787mm×960mm 1/16 印张16N 字数347千字 2007年5月北京第1版第1次印刷



化学工业出版社

·北京·

邮购部: 010-64213888 (传真) 010-64213889

网址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有质量问题,本社负责退换。

本书通过对三结点三角形平面单元的详细分析,介绍了有限元法的基本思想和基本理论。主要内容包括:弹性力学的基本方程,有限元的离散化、三结点平面单元的形函数、几何矩阵、弹性矩阵、单元刚度矩阵、总刚度矩阵的集成方法、有限元方程的形成及求解,平面问题的矩形单元、一维杆梁单元、轴对称单元等,并对任意四边形单元及等参元进行了简单的介绍。书中也讨论了诸如数值积分、解的收敛性等问题。书中附有平面三角形单元的源程序算法以便学生深入了解本课程的内容,并可作为练习工具。学习本书内容需要有高等数学、材料力学、线性代数的基础而不需要更深的知识背景。

本书用于本科机械类专业的有限元课程,亦可作为有关工程技术人员有限元技术入门的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元技术基础/冷纪桐,赵军,张娅编. —北京:化学工业出版社,2007.4
普通高等教育“十五”国家级规划教材
ISBN 978-7-122-00079-8

I. 有… II. ①冷…②赵…③张… III. 有限元分析-高等学校-教材 IV. 0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第031195号

责任编辑:程树珍 金玉连
责任校对:陈静

装帧设计:史利平

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)
印刷:北京云浩印刷有限责任公司
装订:三河市前程装订厂
787mm×960mm 1/16 印张16 $\frac{1}{4}$ 字数347千字 2007年5月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899
网 址: <http://www.cip.com.cn>
凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价: 29.80 元

版权所有 违者必究

过程装备与控制工程学科的研究方向、趋势和前沿

——代序

人类的主要特点是能制造工具，富兰克林曾把人定义为制造动物的动物。通过制造和使用工具，人把自然物变成他的活动器官，从而延伸了他的肢体和感官。人们制造和使用工具，有目的、有计划地改造自然、变革自然，才有了名符其实的生产劳动。

现代人越来越依赖高度机械化、自动化和智能化的产业来创造财富，因此必然要创造出现代化的工业装备和控制系统来满足生产的需要。流程工业是加工制造流程性材料产品的现代国民经济支柱产业之一，必然要求越来越高度机械化、自动化和智能化的过程装备与控制工程。如果说制造工具是原始人与动物区别的最主要标志，那么就可以说，现代过程装备与控制系统是现代人类文明的最主要标志。

工程是人类将现有状态改造成所需状态的实践活动，而工程科学是关于工程实践的科学基础。现代工程科学是自然科学和工程技术的桥梁。工程科学具有宽广的研究领域和学科分支，如机械工程科学、化学工程科学、材料工程科学、信息工程科学、控制工程科学、能源工程科学、冶金工程科学、建筑与土木工程科学、水利工程科学、采矿工程科学和电子/电气工程科学等。

现代过程装备与控制工程是工程科学的一个分支，严格地讲它并不能完全归属于上述任何一个研究领域或学科。它是机械、化学、电、能源、信息、材料工程乃至医学、系统学等学科的交叉学科，是在多个大学科发展的基础上交叉、融合而出现的新兴学科分支，也是生产需求牵引、工程科技发展的必然产物。显而易见，过程装备与控制工程学科具有强大的生命力和广阔的发展前景。

学科交叉、融合和用信息化改造传统的“化工设备与机械”学科产生了过程装备与控制工程学科。化工设备与机械专业是在建国初期向前苏联学习在我国几所高校首先设立后发展起来的，半个世纪以来，毕业生几乎一直供不应求，为我国社会主义建设输送了大批优秀工程科技人才。1998年3月教育部应上届教学指导委员会建议正式批准建立了“过程装备与控制工程”学科。这一学科在美欧等国家本科和研究生专业目录上是没有的，在我国已有60多所高校开设这一专业，是适合我国国情，具有中国特色的一门新兴交叉学科。其主要特点如下：

(1) 过程装备：与生产工艺即加工流程性材料紧密结合，有其独特的过程单元设备和工程技术，如混合工程、反应工程、分离工程及其设备等，与一般机械设备完全不同，有其独特之处。

(2) 控制工程：对过程装备及其系统的状态和工况进行监测、控制，以确保生产工艺有

序稳定运行,提高过程装备的可靠度和功能可利用度。

(3) 过程装备与控制工程:是指机、电、仪一体化连续的复杂系统,它需要长周期稳定运行;并且系统中的各组成部分(机泵、过程单元设备、管道、阀、监测仪表、计算机系统)均互相关联、互相作用和互相制约,任何一点发生故障都会影响整个系统;又由于加工的过程材料有些易燃易爆、有毒或是加工要在高温、高压下进行,系统的安全可靠性十分重要。

过程装备与控制工程的上述特点就决定了其学科研究的领域十分宽广,一是要以机电工程为主干与工艺过程密切结合,创新单元工艺装备;二是与信息技术和知识工程密切结合,实现智能监控和机电一体化;三是不仅研究单一的设备和机器,而且更主要的是要研究与过程生产融为一体的机、电、仪连续复杂系统,在工程上就是要设计建造过程工业大型成套装备。因此,要密切关注其它学科的新的动向,博采众长、集成创新,把诸多学科最新研究成果之他山之石为我所用;同时要以现代系统论(Systemics)和耗散结构理论为指导,研究本学科过程装备与控制工程复杂系统独特的工程理论,不断创新和发展过程装备与控制工程学科是我们的重要研究方向。

我国科技部和国家自然科学基金委员会在本世纪初发表了《中国基础学科发展报告》,其中分析了世界工程科学研究的发展趋势和前沿,这也为过程装备与控制工程学科的发展指明了方向,值得借鉴和参考。

(1) 全生命周期的设计/制造正成为研究的重要发展趋势。由过去单纯考虑正常使用的设计,前后延伸到考虑建造、生产、使用、维修、废弃、回收和再利用在内的全生命周期的综合决策。

过程装备的监测与诊断工程、绿色再制造工程和装备的全寿命周期费用分析、安全和风险评估等正在流程工业开始得到应用。工程科技界已开始移植和借鉴现代医学与疾病作斗争的理论和方法,去研究过程装备故障自愈调控(Fault Self-recovering Regulation),探讨装备医工程(Plant Medical Engineering)理论。

(2) 工程科学的研究尺度向两极延伸。过程装备的大型化是多年发展方向,近年来又有向小型化集成化的趋势。

(3) 广泛的学科交叉、融合,推动了工程科学不断深入、不断精细化,同时也提出了更高的前沿科学问题,尤其是计算机科学和信息技术的发展冲击着每个工程科学领域,影响着学科的基础格局。过程装备与控制工程学科的发展也必须依靠学科交叉和信息化,改变传统的生产观念和模式,过程装备复杂系统的监控一体化和数字化是发展的必然趋势。

(4) 产品的个性化、多样化和标准化已经成为工程领域竞争力的标志,要求产品更精细、灵巧并满足特殊的功能要求。产品创新和功能扩展/强化是工程科学研究的首要目标,柔性制造和快速重组技术在大流程工业中也得到了重视。

(5) 先进工艺技术得到前所未有的广泛重视,如精密、高效、短流程、敏捷制造、虚拟制造等先进制造技术对机械、冶金、化工、石油等制造业产生了重要影响。

(6) 可持续发展的战略思想渗透到工程科学的多个方面,表现了人类社会与自然相协调

的发展趋势。制造业和大型工程建设都面临着有限资源和破坏环境等迫切需要解决的难题，从源头控制污染的绿色设计和制造系统为今后发展的主要趋势之一。

众所周知，过程工业是国民经济的支柱产业；是发展经济提高我国国际竞争力的不可缺少的基础；过程工业是提高人民生活水平的基础；过程工业是保障国家安全、打赢现代战争的重要支撑，没有过程工业就没有强大的国防；过程工业是实现经济、社会发展与自然相协调从而实现可持续发展的重要基础和手段。因而，过程装备与控制工程在发展国民经济的重要地位是显而易见的。

新中国成立以来，特别是改革开放以来，中国的制造业得到蓬勃发展。中国的制造业和装备制造业的工业增加值已居世界第四位，仅次于美国、日本和德国。但中国制造业的劳动生产率远低于发达国家，约为美国的 5.76%、日本的 5.35%、德国的 7.32%。其中最主要原因是技术创新能力十分薄弱，基本上停留在仿制，实现国产化的低层次阶段。从 20 世纪 70 年代末，中国大规模、全方位地引进国外技术和进口国外设备，但没做好引进技术装备的消化、吸收和创新，没有同时加快装备制造业地发展，因此，步入引进—落后—再引进的怪圈。以石油化工设备为例，20 年来，化肥生产企业先后共引进 31 套合成氨装置、26 套尿素装置、47 套磷复肥装置，总计耗资 48 亿美元；乙烯生产企业先后引进 18 套乙烯装置，总计耗资 200 亿美元。因此，要振兴我国的装备制造业，必须变“国际引进型”为“自主集成创新型”，这是历史赋予我们过程装备与控制工程教育和科技工作者的历史重任。过程装备与控制工程学科的发展不仅仅要发表 EI、SCI 文章，而且要十分重视发明专利和标准，也要重视工程实践，实现产、学、研相结合。这样才能为结束我国过程装备“出不去、挡不住”的局面做出应有的贡献。

过程装备与控制工程是应用科学和工程技术，这一学科的发展会立竿见影，直接促进国民经济的发展。过程装备的现代化也会促进机械工程、材料工程、热能动力工程、化学工程、电子/电气工程、信息工程等工程技术的发展。我们不能只看到过程装备与控制工程是一个新兴的学科，是博采诸多自然科学学科的成果而综合集成的一项工程科学技术，而忽略了反过来的一面，一个反馈作用，也就是过程装备与控制工程学科也应对自然科学的发展做出应有的贡献。

实际上，早在 18 世纪末期，自然科学的研究就超出了自然界，从而包括了整个世界，即自然界和人工自然物。过程装备与控制工程属人工自然物，它也理所当然是自然科学研究的对象之一。工程科学能把过程装备与控制工程在工程实践中的宝贵经验和初步理论精练成具有普遍意义的规律，这些工程科学的规律就可能含有自然科学里现在没有的东西。所以对工程科学研究的成果即工程理论加以分析，再加以提高就可能成为自然科学的一部分。钱学森先生曾提出：“工程控制论的内容就是完全从实际自动控制技术总结出来的，没有设计和运用控制系统的经验，决不会有工程控制论。也可以说工程控制论在自然科学中是没有它的祖先的。”因此对现代过程装备与工程的研究也有可能创造出新的工程理论，为自然科学的发展做出贡献。

过程装备与控制工程学科的发展历史地落在我们这一代人的肩上，任重道远。我们深

信，经过一代又一代人的努力奋斗，过程装备与控制工程这一新兴学科一定会兴旺发达，不但会为国民经济的发展建功立业，而且会为自然科学的发展做出应有的贡献。

高质量的精品教材是培养高素质人才的重要基础，因此编写面向 21 世纪的迫切需要的过程装备与控制工程“十五”规划教材，是学科建设的重要内容。遵照教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》，以邓小平理论为指导，全面贯彻国家的教育方针和科教兴国战略，面向现代化、面向世界、面向未来，充分发挥高等学校在教材建设中的主体作用，在有关教师和教学指导委员会委员的共同努力下，过程装备与控制工程的“十五”规划教材陆续与广大师生和工程科技界读者见面了。这套教材力求反映近年来教学改革成果，适应多样化的教学需要；在选择教材内容和编写体系时注意体现素质教育和创新能力和实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。在此向所有为这些教材问世付出辛勤劳动的人们表示诚挚的敬意。

教材的建设往往滞后于教学改革的实践，教材的内容很难包含最新的科研成果，这套教材还要在教学和教改实践中不断丰富和完善；由于对教学改革研究深度和认识水平都有限，在这套书中不妥之处在所难免。为此，恳请广大读者予以批评指正。

教育部高等学校机械学科教学指导委员会副主任委员

过程装备与控制工程专业教学指导分委员会主任委员

北京化工大学 教授

中国工程院 院士

高吉

2003 年 5 月 于北京

前 言

自 20 世纪 50 年代出现有限元（作为算法本身可以追溯到更早出现的结构分析领域）名词以来，随着计算机技术的迅猛发展，有限元方法和有限元计算技术都得到了快速发展，已经成为现今工程问题中应用最广泛的数值仿真方法。掌握有限元技术也已经成为对合格机械工程师的要求之一。

20 世纪 80 年代以前是有限元理论的形成和发展时期，在这一期间，数学家和力学家完成了有限元的理论框架，发展和丰富了各种算法，奠定了有限元的应用基础。20 世纪 80 年代以后有限元迅速发展为一种工程应用技术，在各个工程领域得到广泛应用。我国很多高等工科院校开设了有限元课程，并编写了许多有关有限元的优秀教材，为有限元技术的推广和普及起到了重要的推动作用。然而，随着高等教育体制的改革和科学技术的发展，一些教材已不能适应目前形势的要求。编者在多年教学经验的基础上，结合工程实践编写了本教材，目的是使学生通过本书的学习掌握有限元最基础的理论和初步应用技术的能力。

全书介绍了弹性力学平面问题的基本理论，有限元的平面问题和轴对称问题，空间问题的有限元法，伽辽金法和热传导的有限元解法，梁单元和板壳单元，大型通用有限元软件 ANSYS 的基本使用方法和简单应用实例。为了更好地学习和理解有限元理论方法，部分章节后附有习题。本书最后附有用 FORTRAN 语言代码编写的教学程序，通过阅读和使用该程序可以加深对有限元技术实现的理解（该代码的可执行程序可以在以下服务器下载 <ftp://202.4.131.200>）。

本书适用于机械类和土木类本科生有限元课程，适用学时为 32~40，也可作为工程技术人员学习有限元的入门教材。

在本书写作过程中，北京化工大学工程力学研究室的研究生周昊、刘英林等做了大量的文字、图形录入工作并验证了部分例题，在此表示衷心地感谢。由于作者水平有限，书中难免会有一些不妥之处，敬请专家和读者批评指正。

编 者

2006 年 12 月

目 录

引言	1
1 弹性力学的基础知识	3
1.1 弹性力学中的基本假设	3
1.2 弹性力学中的基本量	4
1.3 两种平面问题	7
1.3.1 平面应力问题	7
1.3.2 平面应变问题	7
1.4 弹性力学平面问题的数学提法	8
1.4.1 平衡微分方程	8
1.4.2 几何方程——应变与位移的关系	9
1.4.3 物理方程——应力与应变的关系	11
1.4.4 边界条件	12
1.4.5 弹性力学平面问题的基本解法	13
1.5 弹性力学的一般原理	13
1.6 虚功原理	14
1.7 势能原理	15
习题	16
2 平面问题的三角形单元 (一) 单元分析	17
2.1 离散化	17
2.2 三结点单元的位移模式	19
2.3 用结点位移表示单元应变——几何矩阵 B^e	24
2.4 用结点位移表示单元应力——矩阵 S^e	25
2.5 单元刚度矩阵 K^e	27
2.6 单元刚度矩阵 K^e 的性质	28
2.7 外力等效移置到结点	31
本章小结	34
习题	34
3 平面问题的三角形单元 (二) 整体分析	36
3.1 两个单元的结构	36
3.2 结构的整体刚度矩阵	39
3.3 整体刚度矩阵的性质	45

3.4	载荷列阵	46
3.5	位移约束	48
3.6	有限元的解	53
3.6.1	位移解	53
3.6.2	应力解	53
3.6.3	解的收敛性	54
3.7	从虚功原理导出有限元方程	55
3.8	从势能原理导出有限元方程	56
	本章小结	58
	习题	58
4	空间轴对称问题	60
4.1	弹性力学中轴对称空间问题	60
4.1.1	柱坐标系	60
4.1.2	轴对称空间问题的变量	61
4.1.3	应变与位移的关系	61
4.1.4	应力应变关系	62
4.1.5	平衡微分方程	62
4.1.6	边界条件	62
4.1.7	虚功方程	63
4.1.8	势能原理	63
4.2	面积坐标	64
4.3	三结点环状单元分析	66
4.3.1	单元位移模式	67
4.3.2	单元内的应变	68
4.3.3	单元内的应力	68
4.4	从虚功方程导出轴对称问题有限元方程	69
4.5	从势能原理导出轴对称问题有限元方程	70
4.6	单元刚度矩阵 K^e 的计算	72
4.7	等效结点力的计算	73
	本章小结	75
	习题	76
5	其它常用的二维单元	78
5.1	四结点矩形单元	78
5.1.1	单元位移场	79
5.1.2	单元内的应变与应力	81
5.1.3	单元刚度矩阵	82

5.2	任意四边形单元	84
5.3	等参元概念与数值积分	86
5.4	四边形二次单元	88
5.5	Wilson 单元	91
	本章小结	94
6	弹性力学空间问题与体单元	96
6.1	空间问题的基本描述	96
6.2	有限元公式	99
6.3	常应变四面体单元	100
6.3.1	位移函数	101
6.3.2	单元应变	103
6.3.3	单元应力	103
6.3.4	单元刚度矩阵	104
6.4	常用的三维单元	105
6.4.1	体积坐标	105
6.4.2	高次四面体单元	106
6.4.3	三棱柱单元	108
6.4.4	长方体单元	109
6.4.5	六面体等参元	110
	本章小结	113
7	用伽辽金法导出有限元方程	114
7.1	伽辽金法	114
7.2	二维稳态热传导有限元方程	117
7.2.1	二维稳态热传导微分方程	117
7.2.2	有限元方程	118
7.2.3	三结点三角形单元和四结点等参元	121
	本章小结	123
8	梁(杆)单元	124
8.1	杆的力学模型	124
8.1.1	简单拉(压)杆	124
8.1.2	自由扭转杆——轴	125
8.1.3	杆的平面弯曲——梁	127
8.2	单元分析	128
8.2.1	拉、压杆单元	129
8.2.2	自由扭转单元	129
8.2.3	两结点梁单元	130

8.3	简单例子	133
8.4	平面刚架	136
8.5	空间梁系结构	140
8.6	考虑剪切效应的梁单元	146
8.7	板壳单元的力学模型	151
8.8	四结点矩形弯曲薄板单元	156
8.8.1	位移函数	156
8.8.2	单元刚度矩阵	157
	本章小结	158
	习题	158
9	ANSYS 程序简介及基本使用方法	161
9.1	简介	161
9.1.1	ANSYS 的基本功能	162
9.1.2	ANSYS 的高级功能	163
9.1.3	ANSYS 软件的优越性	164
9.2	ANSYS 的启动与 GUI 环境	165
9.2.1	ANSYS 运行环境的配置	165
9.2.2	启动步骤	166
9.2.3	ANSYS 的运行界面和文件系统	169
9.3	用 ANSYS 求解结构问题的步骤及操作方式	172
9.3.1	ANSYS 有限元分析过程的一般步骤	172
9.3.2	ANSYS 的操作方式	173
9.4	ANSYS 的前处理——建立几何模型和有限元模型	173
9.4.1	预备工作	174
9.4.2	定义单元类型	174
9.4.3	定义单元实常数	175
9.4.4	定义材料属性	176
9.4.5	实体建模	178
9.4.6	实体模型的网格划分	178
9.5	施加载荷与求解	183
9.5.1	施加载荷与边界条件	183
9.5.2	选择求解器	186
9.5.3	求解	187
9.6	ANSYS 的后处理——对有限元计算结果的提取和图形显示	188
9.6.1	通用后处理模块 POST1	188
9.6.2	评估分析结果	191

9.7	应用实例	192
9.7.1	悬臂梁受集中力	192
9.7.2	用梁单元计算受集中力作用的悬臂梁	201
9.7.3	受均匀拉力的开圆孔平板的应力集中	207
9.7.4	受内压压力容器筒体与封头连接的应力计算	215
9.7.5	厚壁圆筒温度场的计算	225
	本章小结	234
	习题	234
附录	三结点三角形单元的有限元教学程序	236
参考文献	248

181	ANSYS 程序简介及入门	181
181	1.1 简介	181
182	1.1.1 ANSYS 的基本功能	182
183	1.1.2 ANSYS 的组成	183
184	1.1.3 ANSYS 软件的安装	184
185	1.2 ANSYS 的启动与 GUI 界面	185
185	1.2.1 ANSYS 运行环境的配置	185
186	1.2.2 启动 ANSYS	186
186	1.2.3 ANSYS 的运行界面和文件菜单	186
187	1.3 用 ANSYS 求解问题的基本操作方式	187
187	1.3.1 ANSYS 有限元分析过程的一般步骤	187
187	1.3.2 ANSYS 的操作方式	187
187	1.4 ANSYS 的前处理——建立几何模型和有限元模型	187
187	1.4.1 预备工作	187
187	1.4.2 定义单元类型	187
187	1.4.3 定义单元实常数	187
187	1.4.4 定义材料属性	187
187	1.4.5 实体建模	187
187	1.4.6 实体模型的网格划分	187
187	1.5 施加载荷与求解	187
187	1.5.1 施加载荷与边界条件	187
187	1.5.2 选择求解器	187
187	1.5.3 求解	187
188	1.6 ANSYS 的后处理——对有限元计算结果的解释和图形显示	188
188	1.6.1 通用后处理 POST1	188
188	1.6.2 评估分析结果	188

引言

有限元技术已经广泛应用于各种工程设计领域，它的核心是有限元法。

有限元法全称有限单元法 (Finite Element Method, FEM)。它是求解偏微分方程初边值问题的有效的数值方法，广泛应用于结构工程分析、传热分析、电磁场、渗流及流体力学、流变学等可以用偏微分方程描述的领域，是工程领域中应用最广泛的一种数值方法。从工程角度看，它是一种数值模拟或数字仿真技术。

有限元法的出现，使得许多科学理论在技术上得以实现、得到应用，极大地推动了人类的技术能力的发展。大到航空、航天器具，海洋结构工程、岩土工程，桥梁，压力容器，水轮机械，小到玩具、手机壳、计算机内的精密器件及微型机械等精密机械的设计制造，到处都是有限元法的用武之地。毫不夸张地说，有限元技术发展了生产力，促进了人类社会的进步。同时，它推动、改进了现代工程技术人员的知识结构，要求他们懂得更多的科学理论与计算技术。更好地掌握科学理论，学习有限元法的基本概念是掌握运用有限元技术的两个必要条件。那种以为可以通过学习使用软件就可以掌握有限元技术的看法是不全面的。

有限单元法是电子计算机时代的典型技术。它几乎是与电子计算机同时出现，同期蓬勃发展起来的。虽然有限元中分段逼近的思想可以追溯到很早，但一般地认为最早的比较明确的做法始于1943年 Courant 对扭转的研究工作。20世纪50年代是理论构架的萌芽阶段，由于工程实际的需要和电子计算机开始进入应用，有限元首先在结构分析领域得到发展，学者们从多方面做了尝试与研究。1956年，Turner 和 Clough 在分析飞机结构中，用三角形单元解决了弹性力学平面问题。1960年 Clough 正式提出了有限单元法这个名称，从此，有限单元法从技术上、理论上、应用的实例上开始了快速的发展。数学工作者对有限元的误差、解的收敛性和稳定性等问题展开了研究，使得有限元理论日趋成熟。在20世纪七八十年代理论工作与技术框架基本形成，推向市场的实用软件得到迅速发展。有限元程序软件走向市场普及了有限元技术，也推动了有限元技术的完善与领域的拓宽。有限元的作用也从单纯的结构分析发展到结构优化和计算机辅助设计的工具，在工程界流行的简称从 FEM 到 FEA (Analysis)，再到 FES (Simulation) 也从一个侧面反映了它的发展。

有限元最初是在结构分析领域发展的，四十多年来，随着对其理论研究的逐步深入和算法的改进，其技术已从结构静力分析发展到动力问题、稳定问题，由线性问题发展到各种非线性问题，由固体的弹性力学问题发展到其它连续介质问题、各种场问题，如流体力学问题、传热问题、电磁场问题及多物理场耦合问题，有限元法几乎适用于求解所有的连续介质和场问题。

有限元法的主要技术路线是将微分方程所研究的连续空间对象划分为有限个离散的部分——每个部分称之为单元；在每个单元内部所有变量都用结点变量表示；相邻单元之间靠

共同的结点与结点变量相关联，结点变量是待求值；通过正确的理论方法将描述无穷多自由度场问题的偏微分方程转化为在结点上有限个自由度的代数方程（组）问题；最后，用数值方法求解代数方程（组）得到问题的解答。

实用的有限元技术必然包含以下几个方面。

i. 建立离散的有限元模型。这一步就是将所面对的实际问题作“空间离散”，将结构或连续求解区域离散为有限个“单元”的组合物体，形成离散描述的全部数据。这一步骤又称前处理。

ii. 建立有限元方程组。离散后，对每个单元进行分析，假定合适的“形状”函数来近似描述该单元的场变量的变化规律，场函数表示为以结点变量为系数的形状函数的线性组合。从而单元的所有变量都可以用结点变量表示出来。由结点的平衡关系建立所有结点的“平衡”方程组。引入边界条件修改方程组，得到最终可求解的有限元方程组。

iii. 解方程组，求出所有结点变量。

iv. 对结点变量进行再分析，给出所需要的解答。如由求出的结点位移，再利用单元方程求出单元的应力或应变等。

v. 空间划分与结果分析的计算机再现技术。

本书重点是介绍有限元法，对第 i 条所述较少，第 v 条未涉及。有兴趣的读者可参考相关的书籍。

学习有限元法，离不开具体的领域。应用到不同领域的有限元法，其基本变量、控制方程、边界条件各不相同，具体的有限元技术也有较大差异。例如在固体力学中根据基本未知量的不同，有限元法可分为有限元位移法、有限元力法和有限元混合法。在有限元位移法中，基本未知量为结点位移；有限元力法中，以结点力为基本未知量；有限元混合法中，基本未知量既有结点位移，也有结点力。作为入门的课程，本书以弹性力学的有限元位移法为基本对象。为此，在本书的前部扼要地引出了弹性力学的数学提法，这些内容对于没有学过弹性力学而又自学有限元法的读者有可能会过于简略，可能需要补充学习更详细的内容，如 [1]。本书适用于已经学习过高等数学、线性代数、材料力学的读者。

学习有限元技术的人不可避免地要学习掌握一两个通用程序，特别是那些得到业界认可的软件。书中用部分篇幅介绍了目前在国内外很多行业都有着广泛应用的分析软件 ANSYS。

有限元法既然是一种技术，就必然带有技术的各种特征。学习者必须通过实践，通过解决一个又一个具体问题才能掌握有限元法，因此书中给出了一些算例。由于应用软件的内容无论从哪方面来说都极其丰富，以本书之浅薄只能给学生做小小的入门引导，而对于那些对计算技术极感兴趣的学生来说，这本书是不够的，有很多好书可以读。今天，新的大量包含有限元法的专用软件的蓬勃发展，也显示出学习有限元基本方法的重要性，本书企图通过介绍有限元法最基本的内容使学生掌握有限元技术的主要内核。

1 弹性力学的基础知识

弹性力学是固体力学最基本也是最主要的内容。它从宏观现象规律的角度，利用连续数学的工具研究任意形状的弹性物体受力后的变形、各点位移，内部的应变与应力。

与主要研究杆状结构的材料力学相比，弹性力学有很大的不同，这些不同的根源是它所研究的物体形状是任意的。由于研究对象形状的任意性，弹性力学研究任意微团受力、变形所遵从的规律，研究物体边界的正确描述（边界条件）以及整个问题的数学提法与解的问题。弹性力学问题的一般数学提法是偏微分方程的边值问题。

本章简要介绍弹性力学的一些基本概念。

1.1 弹性力学中的基本假设

为了便于建立弹性力学的数学提法，在弹性力学里对材料的性质作了某些假设。引用这些假设在于突出矛盾的主要方面，忽略一些次要因素。弹性力学有如下基本假设。

(1) 连续性假设

假设物体所占据的全部几何空间都被组成该物体的介质所充满，没有任何空隙。这样，物体中的应力、应变和位移等物理量都是连续变化的，可以用坐标的连续函数进行描述，并可用微积分方法来分析物体受力后各物理量的变化。实际上，所有物体都是由微小颗粒组成的，它们之间存在着空隙。但是，微粒的尺寸以及它们之间的空隙相对于宏观物体是微小的，因而宏观上可将物体看作连续体。

(2) 均匀性假设

假设组成物体的材料在物体空间是均匀分布。这样，物体内的各部分具有相同的力学性能，物体的弹性常数（杨氏模量和泊松比等）与坐标位置无关。这一假设对于许多固体材料，特别是金属材料是成立的。

(3) 各向同性假设

假设组成物体的材料在物体空间内每一点沿不同方向的力学性能相同。这样，物体的弹性常数与方向无关。对工程上常用的金属及其它合金材料，它们所含的晶粒是各向异性的。但是，由于晶粒相对于物体的几何尺寸来说非常微小且杂乱排列，物体的性质表现为无数晶粒的平均性质，可认为这些材料是宏观各向同性的。一些工程材料，例如木材、竹材等是各向异性的。

(4) 完全弹性假设

假设物体在外部因素作用下引起的变形，当外部因素除去后能完全恢复而没有任何残余变形，同时假设材料服从胡克定律，即应力与应变成正比。这就保证了应力与应变之间的一

一对应关系。对于工程上的大多数材料，当应力不超过某一限度时，这个假设与实际情况基本相符。

(5) 小变形假设

假设物体在载荷或温度变化等因素作用下各点所产生的位移都很小，使得各点的应变分量和转角都远小于1。这样，在建立物体微团的平衡方程时，可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸，使得到的基本方程为线性方程，从而大大降低了求解难度。并且可以应用叠加原理。

在上述基本假设中，前4个属于物理方面的假设，满足这些假设的材料通常称为理想弹性体，第5个假设为几何方面的假设。

以上述基本假设为基础的弹性力学称为线弹性力学，在工程实际中得到广泛应用。本书所研究的问题限于线弹性范围。

1.2 弹性力学中的基本量

针对工程构件所提出的弹性力学问题常常没有解析解，就不得不依靠数值解答，如有限元解。这就要求建模工程师掌握弹性力学的基本概念。首先要能正确地提出问题（建模正确），同时对计算结果的认识、分析利用、选择正确的算法也都需要一定的科学水平。大量事实证明，许多错误的性质都是属于科学性而非纯技术性。

由于物体是三维的，所以弹性力学问题本质都是三维的，笛卡儿坐标系是基本坐标系。除非特别说明，本书总是采用空间直角坐标系，所有变量均是点 (x, y, z) 的函数，矢量也在直角坐标下分解或解析表示。下面介绍弹性力学最基本的变量。

(1) 位移

物体的变形由点的位移来描写。每点的位移矢量可以记为

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k} \quad (1.1)$$

任一点的位移 \mathbf{u} 可以用它在三个坐标轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示，称为该点的位移分量，记为矩阵形式

$$\mathbf{u} = (u \quad v \quad w)^T \quad (1.1a)$$

位移沿坐标轴正方向时为正，沿坐标轴负方向时为负。位移的量纲是[长度]。

(2) 应变

在弹性力学中讲的点，一般指围绕这点的一个物质微团。当物体变形时，组成物体的各微团，一般会发生“运动”与“变形”。“微团”的“运动”用点的位移来描述，而“微团”的变形用点的应变来描述。通常说的“一点的应变”就是用来描述一个无限小微团的变形。定义应变从而描述微团变形的量有多种方式，本书采用工程应变。

一点的工程应变有6个分量，分别是 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 。其中 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 分别表示 x 、 y 、 z 方向的微小线段在变形后的相对伸长，称为工程线应变；而 γ_{xy} 则表示由 x 方向微线段与 y 方向微线段所夹的直角在变形后的改变量， γ_{yz} 、 γ_{zx} 与 γ_{xy} 类似，称为工程切