



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

(第二版)

复变函数

■ 路见可 钟寿国 刘士强 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

(第二版)

复变函数

■ 路见可 钟寿国 刘士强 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/路见可,钟寿国,刘士强编著. —2版. —武汉:武汉大学出版社,2007.1

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-307-04820-1

I. 复… II. ①路… ②钟… ③刘… III. 复变函数—高等学校—教材 IV. O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 127765 号

责任编辑:顾素萍

责任校对:黄添生

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:787×980 1/16 印张:16.5 字数:269千字 插页:1

版次:1993年12月第1版 2007年1月第2版

2007年1月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-04820-1/O·331

定价:19.00元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

本书根据原国家教委理科数学力学教材编审委员会函数论及泛函分析编审组于1987~1989年期间议定的《复变函数(侧重应用)教材编写提纲》的基础上编写的。全书包括复数及复函数、解析函数基础、积分、级数、留数、解析开拓、共形映照、调和函数、解析函数应用共九章。

作为尝试,本书增添了高阶奇异积分和推广留数定理等具有实用价值的新内容;对教学难点的多值函数作了全新的处理;对柯西定理(同伦形式)、辐角原理、共形映照和解析函数惟一性定理等引进新的证明方法和叙述方式;对传统内容的现代化处理或不同程度的改进涉及全书各章。经过多年教学实践显示它是一本切实可教可学的教材。

本书可供综合大学基础数学、应用数学、计算数学、力学、天文学等专业及师范院校数学专业的本科生及部分工科专业的研究生作为教材,也可供物理专业、工程技术人员及自学者参考。

第 二 版 序

自本书 1993 年第一版以来,不断地纠正印刷错误、欠妥之处、更换图形等,1999 年、2001 年作了两次修订,作为修订版。但总的说来,体系变动不大。本次第二版则有较多的补充和删改。

在第一版中,曾引进我们对本课程改革探索的新内容,这也激发了部分读者对深层次理论问题的诉求。本版试图在这方面作进一步完善和论证,以供读者参考。

关于初等多值函数分枝问题,我们提出了寻常点的概念,明确了枝点的定义,对有理函数的对数和有理函数的方根这两类常见的初等多值函数作了程式化处理的专门讨论,还提出了初等多值函数单值分枝的判定定理(即定理 2.3),其方法简单易行。但其定理的充分性证明不全(证明的全面展开需要足够的篇幅),本版补充了详细的证明(见附录一),专事讨论此问题。

为了介绍武汉大学在复分析积分理论的研究成果之一——推广的留数定理,我们引进了张度(绕度)、边界上关于区域的极点、反常复积分,特别是高阶奇异积分等新概念。在第一版中对二阶奇异积分定义的由来作了详细介绍以阐明 Hadamard 定义发散积分的思想,但读者似乎并不满足。为了解一般的高整数阶奇异积分定义的由来,本版做了彻底释疑,见附录二。还有,在把反常实积分推广到反常复积分的过程中,需要光滑曲线上的弦弧不等式,本版增加了其证明。

以上的增补仅以本书内容需要为度,并不求全。有些好的内容考虑到篇幅也只好割弃。另外,本版对全书内容又作了一些订正和删改。由于水平所限,不当之处在所难免,恳请批评指正。

编 者

2006 年 11 月

第一版序

复变函数是各类高等学校理工科的一门重要的专业基础课，目前国内外已有相当一批优秀的复变函数教材。根据国家教育部理科教材编审委员会的意见，希望再编写一本侧重应用方面的、较现代化的、有我国特色的教材，以适应我国教学的需要。本教材就是在这样的背景下编写的。

我们对“侧重应用”的理解是这样的：在材料的选择上，主要考虑到复变函数作为一种工具，在现代科学技术中有着重要的作用，因此要使学生能掌握其有用的基本理论和计算技巧，而不着重照顾条件不同的专业上需要的特殊内容。否则，内容将非常庞大。另一方面，虽说是“侧重应用”，但我们认为，绝不能削弱基本概念、基本理论的阐述；虽然有些问题提法中的条件在便于应用情况下已适当加强（如只考虑以逐段光滑曲线而不考虑可求长曲线为边界的区域），但在论证中却又不失逻辑的严密性。

要写一本“较现代化”切实可教可学的教材实在不是一件易事，对基础课来说尤其如此。我们注意吸收国内外复变函数教材中好的方面，适当引进了一些现代化的术语，而以不超越目前一般师生的条件为前提。此外，对某些重要定理（如柯西定理等）的证明，也参考了新近出现的以及我们的简洁证法。

复变函数中有些内容与数学分析重复较多，它是后者的自然推广，在这方面我们尽量压缩篇幅，而主要让学生总结其间的异同。根据我们的教学经验，初等多值函数是教学中的一个难点，而其困难是由于辐角的多值性而产生的；因此，教材中突出了辐角函数多值性的讨论，这样就为讨论多值的初等函数奠定了基础。在这方面我们还参考了林玉波教授关于多值函数单值分枝连续变化法的内容。这样的处理方法，实践证明是可行的，易于被学生接受。我们还添加了一些通常教材中所见不到的然而在实践中有重要应用的内容（如高阶奇异积分、推广的留数定理及其在计算实积分中的应用等）；有的内容用小字排出，供师生选用。

我们在各节后，常常出一些思考题以启发学生检验对所学内容是否正确

掌握。在习题编排方面分两个层次，每节后的属基本习题，供学生复习巩固所学知识；每章末的习题则有一定综合性和技巧性，可供师生根据实际情况选用。较难的习题注有提示，计算题均有答案。

我们希望本教材适用于广大理工和师范院校本科生或研究生各有关专业。由于我们水平和经验所限，教材中很可能有许多不当和不妥之处，希广大师生和读者不吝指正。

编 者

1993年9月

目 录

第一章 复数和复函数	1
1.1 复数	1
1.1.1 复数域	1
1.1.2 复数的几何表示	2
1.1.3 球极投影、复球面、无穷远点、扩充复平面	5
习题 1.1	6
1.2 复变函数	7
1.2.1 复变函数的概念	7
1.2.2 复变函数的极限与连续性	8
1.2.3 同伦概念和区域的连通性	9
1.2.4 辐角函数	12
习题 1.2	16
1.3 复数列和复级数	17
1.3.1 复数列和复数项级数	17
1.3.2 复函数列和复函数项级数	18
习题 1.3	19
第一章习题	19
第二章 解析函数基础	21
2.1 解析函数	21
2.1.1 导数及其几何意义	21
2.1.2 解析函数概念	24
习题 2.1	26
2.2 一些初等解析函数	27
2.2.1 多项式和有理函数	27
2.2.2 指数函数	27

2.2.3	三角函数和双曲函数	29
2.2.4	对数函数	30
2.2.5	幂函数和根式函数	33
2.2.6	初等多值函数分枝问题	36
2.2.7	有理函数的对数	39
2.2.8	有理函数的方根	42
2.2.9	反三角函数和反双曲函数	44
	习题 2.2	45
	第二章习题	46
	第三章 复积分	48
3.1	复积分概念	48
3.1.1	复积分的定义及计算	48
3.1.2	复积分的基本性质	51
	习题 3.1	52
3.2	基本定理	53
3.2.1	柯西积分定理	53
3.2.2	原函数	58
	习题 3.2	61
3.3	基本公式	62
3.3.1	柯西积分公式	62
3.3.2	柯西导数公式	64
3.3.3	柯西不等式	66
3.3.4	莫瑞勒(Morera) 定理	66
	习题 3.3	67
3.4	反常复积分	68
3.4.1	反常复积分的定义	68
3.4.2	柯西主值积分	71
3.4.3	高阶奇异积分	74
	习题 3.4	75
	第三章习题	76
	第四章 解析函数的级数理论	78
4.1	一般理论	78

4.1.1	复函数项级数的逐项积分和逐项求导	78
4.1.2	幂级数及其和函数	79
习题 4.1		81
4.2	泰勒展式及惟一性定理	82
4.2.1	解析函数的泰勒展式	82
4.2.2	解析函数的惟一性	88
4.2.3	最大模原理	90
习题 4.2		91
4.3	罗朗展式及孤立奇点	93
4.3.1	解析函数的罗朗展式	93
4.3.2	求罗朗展式的方法	96
4.3.3	解析函数的孤立奇点	99
4.3.4	整函数和亚纯函数	105
习题 4.3		106
第四章习题		108
第五章	留数理论	110
5.1	留数及其计算	110
5.1.1	留数概念	111
5.1.2	无穷远点处的留数	114
5.1.3	边界点的情形	115
习题 5.1		117
5.2	留数定理及其推广	117
5.2.1	留数定理	117
5.2.2	推广的留数定理	120
习题 5.2		123
5.3	应用于积分计算	124
5.3.1	单值解析函数的应用	124
5.3.2	多值解析函数的应用	128
习题 5.3		134
5.4	辐角原理和儒歇(Rouché) 定理	136
5.4.1	辐角原理	136
5.4.2	儒歇定理	138

习题 5.4	139
第五章习题	140
第六章 解析开拓	143
6.1 解析开拓的概念和方法	143
6.1.1 基本概念	143
6.1.2 透弧开拓	144
6.1.3 幂级数开拓	147
习题 6.1	150
6.2 完全解析函数及单值性定理	150
6.2.1 完全解析函数和黎曼面	151
6.2.2 单值性定理	152
习题 6.2	156
第六章习题	156
第七章 共形映照	157
7.1 分式线性映照	157
7.1.1 共形性	158
7.1.2 映照群、不动点	159
7.1.3 三对对应点决定分式线性映照	160
7.1.4 保圆周及侧	161
7.1.5 保对称点	163
7.1.6 三个特殊的分式线性映照	165
习题 7.1	168
7.2 共形映照的一般理论	169
7.2.1 单叶解析函数的性质	169
7.2.2 黎曼映照定理	171
7.2.3 边界对应定理	174
习题 7.2	176
7.3 几个初等函数的映照	176
7.3.1 指数与对数函数映照	177
7.3.2 幂函数映照	178
7.3.3 儒可夫斯基(ЖУКОВСКИЙ)函数映照	180
7.3.4 余弦函数映照	182

习题 7.3	183
7.4 综合实例	184
7.4.1 已知函数求映照区域	184
7.4.2 已知对应区域求映照函数	185
习题 7.4	194
第七章习题	195
第八章 调和函数	198
8.1 调和函数的概念及其性质	198
8.1.1 调和函数与解析函数的关系	198
8.1.2 极值原理	201
8.1.3 波阿松(Poisson) 公式及均值公式	202
习题 8.1	203
8.2 狄里克来(Dirichlet) 问题	204
8.2.1 一般狄里克来问题	204
8.2.2 波阿松积分的性质	205
8.2.3 圆域上的狄里克来问题	207
8.2.4 上半平面的狄里克来问题	208
习题 8.2	209
8.3 许瓦兹(Schwarz)- 克里斯多菲(Christoffel) 公式	209
8.3.1 一般公式	209
8.3.2 例	213
习题 8.3	216
第八章习题	217
第九章 解析函数在平面场中的应用	219
9.1 解析函数的流体力学意义	219
9.1.1 复环流	219
9.1.2 复势	221
9.1.3 源(汇) 点、涡点	222
9.1.4 偶极子	223
习题 9.1	224
9.2 柱面绕流与机翼升力计算	224
9.2.1 圆盘绕流	224

9.2.2 一般截面绕流	226
9.2.3 机翼升力计算	228
习题 9.2	229
附录一 初等多值函数单值分枝判定定理充分性之证明	230
附录二 高(整数)阶奇异积分定义由来详述	239
习题答案或提示	242

第一章 复数和复函数

1.1 复数

1.1.1 复数域

读者已熟悉了实数域 $\mathbf{R}$. 在历史上, 求解最简单的二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 便遇到了困难, 它在 $\mathbf{R}$ 中显然无根, 为此就想象有一种新的数, $i = \sqrt{-1}$ 为其根, 因此 $-i$ 也是它的根. 这样, $x^2 + 1 = 0$ 就也有两个根 $\pm i$. 如果允许 i 参加四则运算, 并服从实数的通常运算法则, 就像一个代数文字那样, 但遇到 i^2 则可改为 -1 . 这样, 如读者所知, 一般的二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 也就总有两个根. 然而在很长时间内, 人们怀疑是否真的有这种数存在, 因而把 i 起名为“虚数”, 意即假想的数. 直到后来发现它有非常现实的意义(见 1.1.2 小节), 并依靠它可以解决不少过去不能解决的问题, 还发现它有十分广泛的应用, 才得到普遍的承认.

下面我们从逻辑上定义由实数域 $\mathbf{R}$ 添加 i 后生成的复数域 $\mathbf{C}$. 在实数域 $\mathbf{R}$ 上面, 添加一个新的形式的数 i , 此数称为虚数单位, 并允许它可以和实数一起进行加法、减法、乘法的运算($1 \cdot i$ 仍记为 i , $(-1) \cdot i$ 记为 $-i$, $0 \cdot i$ 记为 0), 并假定它们仍服从交换律、结合律、分配律; 此外还规定 $i \cdot i = i^2 = -1$ (可以证明, 这样一些规定是和谐的, 即不会导致矛盾). 于是, 这样的数一般可写成 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 称为复数. 称 $\bar{z} = a - bi$ 为 z 的共轭复数.

我们有

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

当且仅当 $a = b = 0$ 时, 才称 $a + bi = 0$; 故 $a + bi \neq 0$ 就意味着 a, b 中至少有一个不为零. 除法也就可自然地作出如下:

$$\begin{aligned}\frac{c+di}{a+bi} &= \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i \quad (a+bi \neq 0).\end{aligned}$$

换句话说,只要在上式左端分子、分母中各乘以分母($\neq 0$)的共轭复数便可计算除法.这样,复数的四则运算可完全遵循实数的类似运算进行.

所有复数的集合按照以上运算法则并遵从 $i^2 = -1$ 的规则,构成一域,称为**复数域**,并记为 $\mathbf{C}$.

复数 $z = a + bi$ 中的 a 称为 z 的实部,记作 $\operatorname{Re} z$; b 称为 z 的虚部,记作 $\operatorname{Im} z$ (两复数当且仅当它们的实、虚部分别相等时才称为相等).当 $b = 0$ 时 $z = a + 0i = a$ 就是**实数**;当 $a = 0$ 时 $z = 0 + bi = bi$ 称为**纯虚数**.注意 $0 = 0 + 0i$ 既是实数,也是纯虚数^①.因为 $z = a + bi$ 的共轭复数 $\bar{z} = a - bi$,显然 $\bar{\bar{z}} = z$,即 z 和 $\bar{z}$ 互为共轭复数.此外,我们有明显的等式:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 即 $z = \bar{z}$ 时 z 是实数,而当 $\operatorname{Re} z = 0$ 即 $z = -\bar{z}$ 时 z 是纯虚数.

我们熟知,实数间有大小的区别,但复数间不能比较大小,这是复数域和实数域的一个重要不同,需特别注意.

1.1.2 复数的几何表示

在平面解析几何中,取定一直角坐标系 Oxy 后,可用一有序实数对 (a, b) 表示平面中任何一点 P ,称 (a, b) 为 P 的坐标, a 为横坐标, b 为纵坐标(图 1-1).

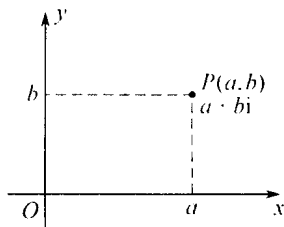


图 1-1

如果我们用复数 $a + bi$ 来表示 P 的位置显然也是可以的,也就是说,取定一直角坐标系 Oxy 后,就可建立复数 $a + bi$ 和点 $P(a, b)$ 之间的一个一一对应的关系.这时我们称这个取定直角坐标系的平面为**复平面**,仍用 $\mathbf{C}$ 表示; $a + bi$ 称为 P 点的**复坐标**或**复数表示**.这是复数的一种几何表

示法. x 轴上的点的复坐标是实数,因此 x 轴也称为**实轴**; y 轴上点的复坐标

^① 有的作者把 $z = bi$ 仅当 $b \neq 0$ 时才称作纯虚数;这样, 0 不算作纯虚数.但这样做是不方便的,我们不采用这种说法.

是纯虚数, 因此 y 轴也称为虚轴.

复数还可用来表示平面向量. 如图 1-2, 由复数 $a+bi$ 决定了点 P (如前), 因此也决定了一向量 $\overrightarrow{OP}$; 反之向量 $\overrightarrow{OP}$ 决定一复数: P 的复坐标. 当然, 复数 0 和零向量相对应. 向量的这种复数表示也很有用. 例如, 向量的加减法和复数的加减法是等价的. 即, 设

$$\overrightarrow{OP} = a+bi, \quad \overrightarrow{OQ} = c+di,$$

按平行四边形规则, 如 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, 正好有

$$\overrightarrow{OR} = (a+c) + (b+d)i$$

(图 1-3). 这在几何上立即可以证明.

向量的数乘仍与复数和实数的乘法一致: 如 $\overrightarrow{OP} = a+bi$, λ 为实数, 则

$$\lambda \overrightarrow{OP} = \lambda(a+bi) = \lambda a + \lambda bi.$$

但向量的内积和外积就与复数的乘法间没有自然的一致性了, 这也是应引起注意的.

还应注意, 若 P 和 Q 的复坐标分别为 $a+bi$ 和 $c+di$, 它们分别表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$, 则

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$$

(图 1-4); 另一方面, $\overrightarrow{QP}$ 作为一自由向量, 当把起点 Q 移到原点 O 时, 它所对应的复数正好是

$$(a-c) + (b-d)i = (a+bi) - (c+di).$$

我们不妨仍记 $\overrightarrow{QP} = (a-c) + (b-d)i$. 这在以后的计算中也是非常有用的.

称 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $z = a+bi$ 的模或绝对值, 记为 $|z|$. 由平行四边形法则, 容易导出复数加减法的重要三角不等式, 即若 z_1, z_2 都是复数, 则

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

我们已看到, 复数 $a+bi$ 可看做向量 $\overrightarrow{OP}$ (图 1-5); 另一方面, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 可由其大小和方向决定: $\overrightarrow{OP}$ 的大小为 $|\overrightarrow{OP}| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$, 其方向可由 $\overrightarrow{OP}$

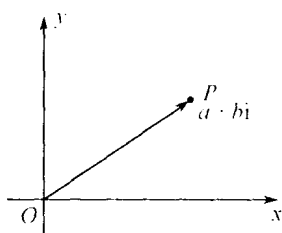


图 1-2

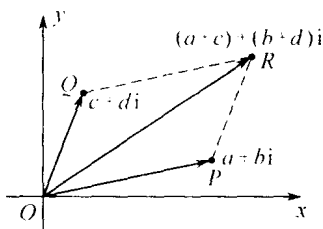


图 1-3

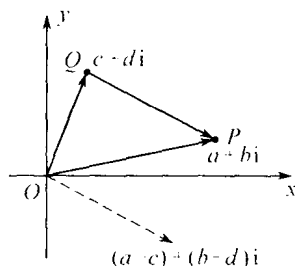


图 1-4

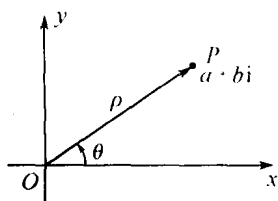


图 1-5

的倾角 θ 来决定 (θ 可加减 2π 的整数倍). ① 这也相当于 P 点的极坐标表示 (把 O 点作为极点, x 轴作为极轴). 这样, 对于复数 $a+bi$ 来说, 它也可由 ρ, θ 决定, 其中 ρ 为复数 $a+bi$ 的绝对值, 也可写为 $|a+bi|$, 而 θ (可加减 2π 的整数倍) 称为它的辐角, 记为 $\text{Arg}(a+bi)$. 亦即, 如果 $z = a+bi$, 则

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\text{Arg } z = \text{Arg}(a+bi) = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

复数的这种表示法称为极坐标表示. 由于 k 可以取任何整数, 因此 $\text{Arg } z$ 是多值的.

当然, 以上的讨论已默认了 $z \neq 0$. 若 $z = 0$, 当然有 $|z| = 0$, 但 $\text{Arg } 0$ 没有意义.

注意, $|z_1 - z_2|$ 恰好是 z_1, z_2 之间的距离, 而 $\text{Arg}(z_2 - z_1)$ 是从 z_1 到 z_2 的向量的倾角.

由极坐标和直角坐标的关系 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 立即可知一个复数 $x+yi$ 也可写成

$$x+yi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

复数的这种表示称为三角表示. 记 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

利用复数的三角表示法可以讨论复数之积、商、幂、方根的运算法则. 例如, 如果

$$x_1 + y_1 i = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$x_2 + y_2 i = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

则有

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

由此可见, 两复数相乘(除), 其乘积(商)的模为模的乘积(商), 而乘积(商)的辐角为辐角的和(差)②(都可相差 2π 的整数倍). 同理, 如果

$$x+yi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

则当 n 为正整数时, 有

① 注意, 零向量没有确定的方向或倾角.

② 两复数相除时, 需分母不为零.