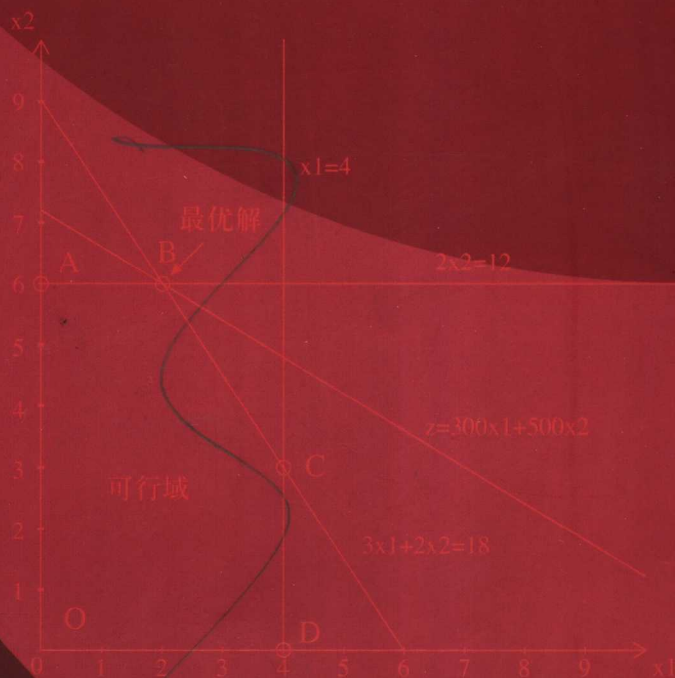


• 经济数学基础 •

实用运筹学

——运用Excel建模和求解

叶 向 编著



022/108

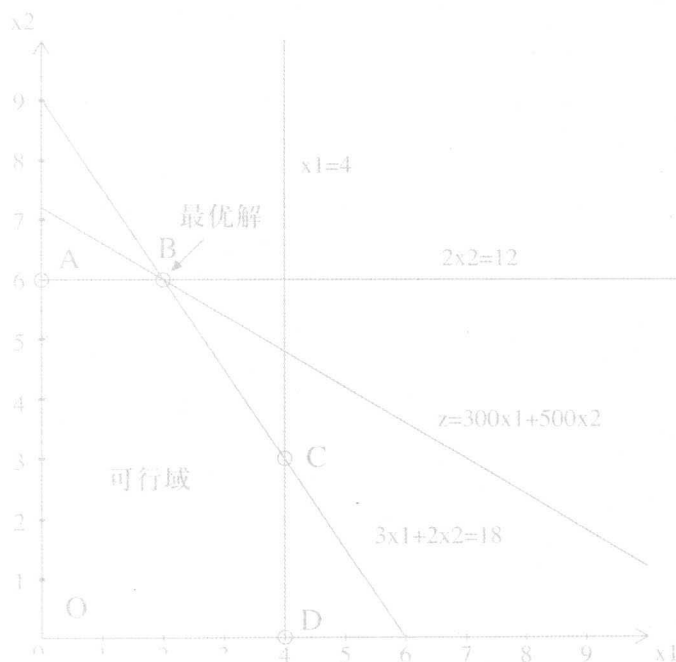
2007

• 经济数学基础 •

实用运筹学

——运用Excel建模和求解

叶 向 编著



图书在版编目 (CIP) 数据

实用运筹学——运用 Excel 建模和求解/叶向编著.

北京: 中国人民大学出版社, 2007

(经济数学基础)

ISBN 978-7-300-08461-9

I. 实…

II. 叶…

III. 运筹学-高等学校-教材

IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 133568 号

经济数学基础

实用运筹学——运用 Excel 建模和求解

叶向 编著

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511398 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com>(人大教研网),

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

规 格 170 mm×228 mm 16 开本

版 次 2007 年 9 月第 1 版

印 张 22.5 插页 1

印 次 2007 年 9 月第 1 次印刷

字 数 413 000

定 价 32.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

内容简介

本书介绍了线性规划、灵敏度分析、运输问题和指派问题、网络最优化问题、整数规划、非线性规划、目标规划和动态规划等运筹学主要分支的基本理论和方法。书中用较多的例题介绍了运筹学在管理、经济等领域中的应用。本书的特点是：(1) 用实际的例子来阐述运筹学的概念、原理和方法，体现了为应用而学习并在应用中学会运筹学的思想；(2) 全面引入电子表格教学法。电子表格教学法是近年来美国各大学全面推广的一种运筹学（管理科学）教学法。它在 Excel 中将需要解决的问题进行描述，然后建立数学模型，并使用 Excel 的命令和功能进行决策和优化。本书的重点不是数学公式的推导与计算，而是注重如何对问题进行描述与建模，并运用计算机求解，使得运筹学（管理科学）的理论方法简明直观、容易理解与应用。本书介绍的方法是管理、经济类专业的学生和研究人員研究实际问题的有效工具。

为了使广大读者更好地掌握本教材的内容，加深理解并增强处理问题的能力，我们将本书所有例题的 Excel 电子表格模型放在中国人民大学出版社的网站 (www.crup.com.cn) 的资源中心处，读者可以登录该网站免费下载；为支持教师的教学，本书的作者还把她多年教学中积累的教学课件奉献给广大读者，特别是老师们，需要的老师，请与本书作者或中国人民大学出版社编辑部联系，电子邮箱：yexiang@ruc.edu.cn 或 panxy@crup.com.cn。

为方便教师教学和学生自学，我们还将出版本教材的同步配套辅导书《实用运筹学——上机实验指导及习题解答》。

本书可作为管理、经济类各本科专业运筹学教材，也可用于研究生的教学，以及其他本科、研究生专业的教材或教学参考书。对于希望了解、认识和应用运筹学的各类人员都有一定的参考价值。

总 序

随着教学改革的不深入和办学规模的扩大,我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化,教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时,全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大,其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言,经过多年调整,实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化,适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点:作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程,《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲,融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围;突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练;内容完整紧凑,难度适中,便于组织教学,能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求 and 分级教学的需要,本套教材推出了《高级经济数学教程》分册,该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外,作为高等数学知识的进一步延伸和扩展,本套教材同时推出了《实用运筹学》分册,该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识,并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是,基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题,对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑,其中包括对教材中多数习题提供解答,以便于学生自习。另一方面,《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充,增加相当数量的研究生入学考试试题题型,力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面,帮助学生实现跨越,达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此,这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的功能。

能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有 20 年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006 年 10 月

前 言

运筹学是一门基础性的应用学科，主要研究系统最优化的问题，通过建立实际问题的数学模型并求解，为决策者进行决策提供科学依据。运筹学的英文名称是 Operations Research（美）或 Operational Research（英），缩写为 OR，直译是运作研究或作战研究，运筹学是 OR 的意译，取自成语“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”，具有运用筹划，出谋献策，以策略取胜等内涵。目前国外的管理科学（Management Science，MS）与运筹学的内容基本相同。

运筹学在自然科学、社会科学、工程技术生产实践、经济建设及现代化管理中有着重要的意义。随着科学技术和社会经济建设的不断发展进步，运筹学得到迅速的发展和广泛的应用。作为运筹学的重要组成部分——线性规划、灵敏度分析、运输问题和指派问题、网络最优化问题、整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划等内容成为管理、经济类本科生所应掌握的必要知识和学习其他相应课程的重要基础。本书根据管理、经济类本科生知识结构的需要，系统地介绍了上述内容的基本理论及应用方法，内容尽力体现新颖、实用，力求跟上时代步伐。

在管理、经济类本科专业，运筹学课程的地位越来越重要。然而，在我国运筹学的教学过程中，教师往往比较侧重基本原理和算法的讲授，过于强调数学公式及其推导，较少使用计算机，与现代化管理不相适应。

近年来，美国高校“运筹学（管理科学）”教学的思想、内容、方法和手段有了根本的转变，主要表现在美国各大学已普遍采用“电子表格”这一全新的教学方法，运筹学（管理科学）已日益成为管理、经济类学生最重要和最受欢迎的课程之一。

在教学中使用电子表格软件已经成为运筹学和管理科学教学的一个明显的新潮流。无论是学生还是经理人都已经广泛地应用电子表格软件，这为我们进行相应的教学提供了一个舒适而愉快的环境。

自从 2003 年以来，作者一直在对中国人民大学信息学院的信息管理与信息系统 2000 级至 2004 级本科专业的运筹学的教学进行改革。其间，作者选用了国外的最新教材《数据、模型与决策——运用电子表格建模与案例研究》（翻译

版),该书详细介绍了各种运筹学模型及其在 Excel 软件中的实现方法,与其他教材的不同之处在于,该书不要求学生拥有深厚的数学功底,而是运用功能强大的 Excel 软件来完成模型的建立、求解最优化方案。作者利用这本国外教材(从开始的第 1 版到现在的第 2 版),从 2003 年起到现在,在中国人民大学信息学院讲授了 5 次,教学效果不错,得到了学生们的普遍好评。

但国外教材的例子取自国外,在教学过程中,学生也在问是否可有中国的案例,所以本人在教学过程中,也非常注意参考国内运筹学教材,试图用 Excel 方法去求解问题,并介绍给学生,这样积累了不少素材,从而为编写本书打下了很好的基础。应该说,本书是“教学相长”的结果。

本书部分例题参考了美国高校普遍选用的运筹学和管理科学参考书;还有部分例题选自我国已经出版的书籍,但本书运用电子表格新方法对这些例题重新进行了求解,以便读者通过比较更易于了解电子表格方法的原理和功能。

本书的编写由多人协作完成,特别要感谢我的研究生们,他们曾是我运筹学课程的学生。参与本书编写的研究生有:翁清明、李坤、袁少璋、王舒、陈斐斐、王锐、王琪伟、朱琳、李梦莎等。信息学院数学系的魏二玲老师认真审阅了本书稿,在此表示衷心的感谢。

本书是中国人民大学第三批本科教学改革项目“运筹学课程的全面改革与建设(教材、课件、实验等)”的成果之一,受到中国人民大学教务处的资助。

这里要特别感谢负责本书出版的中国人民大学出版社的编辑潘旭燕老师,她非常热心,工作认真负责,一直鼓励我将最新的运筹学(管理科学)教学方法写出来,也告诉我很多怎么写好书的方法。此外,还要感谢中国人民大学信息学院的陈禹教授、方美琪教授、蒋洪迅老师以及有关同志,他们在本书的策划、编写过程中给予了大力的支持和帮助。我们在编写过程中还参考了大量的国内外有关文献书籍,它们对本书的成文起了重要作用。在此对一切给予我们支持和帮助的朋友、同事、同学、有关人员以及参考文献书籍的作者一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中错误和不当之处在所难免,恳请广大读者给予指正,欢迎相互交流讨论并提出建议。编著者电子邮箱为: yexiang@ruc.edu.cn。

叶 向

2007 年 5 月

目 录

第 1 章 线性规划	1
1.1 线性规划问题及其数学模型	1
1.2 线性规划问题的图解法	6
1.3 用 Excel“规划求解”功能求解线性规划问题	8
1.4 线性规划问题求解的几种可能结果	21
习题	25
第 2 章 线性规划灵敏度分析	28
2.1 线性规划灵敏度分析	28
2.2 单个目标函数系数变动	30
2.3 多个目标函数系数同时变动	34
2.4 单个约束右端值变动	38
2.5 多个约束右端值同时变动	42
2.6 约束条件系数变化	44
2.7 增加一个新变量	44
2.8 增加一个约束条件	46
2.9 影子价格	47
习题	50
第 3 章 线性规划的建模与应用	54
3.1 资源分配问题	54
3.2 成本收益平衡问题	58
3.3 网络配送问题	63
3.4 混合问题	66
3.5 线性规划模型的应用	71
习题	97
第 4 章 运输问题和指派问题	104
4.1 运输问题基本概念	104
4.2 运输问题数学模型和电子表格模型	105

4.3 各种变形的运输问题建模	114
4.4 运输问题应用举例	119
4.5 指派问题	126
4.6 各种变形的指派问题建模	129
习题	141
第5章 网络最优化问题	148
5.1 网络最优化问题的基本概念	148
5.2 最小费用流问题	150
5.3 最大流问题	154
5.4 最短路问题	167
5.5 最小支撑树问题	179
5.6 货郎担问题和中国邮路问题	183
习题	190
第6章 整数规划	199
6.1 整数规划基本概念、分类与解的特点	199
6.2 整数规划电子表格模型	202
6.3 0—1 整数规划	204
6.4 整数规划应用举例	219
习题	227
第7章 非线性规划	235
7.1 非线性规划基本概念	235
7.2 二次规划	237
7.3 可分离规划	255
习题	258
第8章 目标规划	264
8.1 目标规划数学模型	264
8.2 优先目标规划	268
8.3 加权目标规划	281
习题	286
第9章 动态规划	289
9.1 背包问题	290

9.2 生产经营问题	292
9.3 资金管理问题	304
9.4 资源分配问题	332
习题.....	340
参考文献.....	349

第 1 章 线性规划

本章内容要点

- 线性规划问题及其数学模型
- 线性规划的电子表格建模
- 线性规划的多解分析

线性规划是运筹学中研究较早,理论和算法比较成熟的重要分支之一,它主要研究在线性等式(或不等式)的限制条件下,使某一线性目标函数取得最大值(或最小值)的问题。

自 1947 年美国的丹齐格(G. B. Dantzig)提出解线性规划的单纯形法后,线性规划的理论体系和计算方法日趋系统和完善。随着计算机的发展,线性规划已经广泛应用于商业、工业和军事等方面,例如生产计划、投资分析、人力资源规划、选址问题、库存管理和营销决策等。

1.1 线性规划问题及其数学模型

在实践中,根据实际问题的要求,常常可以建立线性规划问题的数学模型。

1.1.1 线性规划问题的提出

例 1.1 某工厂要生产两种新产品:门和窗。经测算,每生产一扇门需要在车间 1 加工 1 小时、在车间 3 加工 3 小时;每生产一扇窗需要在车间 2 和车间 3 各加工 2 小时。而车间 1 每周可用于生产这两种新产品的时间为 4 小时、车间 2 为 12 小时、车间 3 为 18 小时。已知每扇门的利润为 300 元,每扇窗的利润为 500 元。而且根据经市场调查得到的这两种新产品的市场需求状况可以确定,按当前的定价可确保所有新产品均能销售出去。问该工厂如何安排这两种新产品的生产计划,才能使总利润最大?

在该问题中,目标是总利润最大化,所要决策的变量是新产品的产量,而新

且生产一扇窗需要在车间 2 加工 2 小时，所以生产 x_2 扇窗所用的工时为 $2x_2$ 。由题意，车间 2 每周可用工时为 12 小时。由此可得第二个约束：

$$2x_2 \leq 12$$

第三个约束是车间 3 每周可用工时限制。生产一扇门需要在车间 3 加工 3 小时，而生产一扇窗则需要在车间 3 加工 2 小时，所以生产 x_1 扇门和 x_2 扇窗所用的工时为 $3x_1 + 2x_2$ 。由题意，车间 3 每周可用工时为 18 小时。由此可得第三个约束：

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

第四个约束是决策变量的非负约束。这个约束通常会被遗漏。由于产量不可能为负值。所以第四个约束为：

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

由上述分析可建立本问题的线性规划模型：

$$\text{Max } z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

这是一个典型的利润最大化的生产计划问题。其中，“Max”是英文单词“Maximize”的缩写，含义为“最大化”；“s. t.”是“subject to”的缩写，表示“满足于……”。因此，上述模型的含义是：在给定的条件限制下，求使得目标函数 z 达到最大时 x_1, x_2 的取值。

本章讨论的问题均为线性规划问题。所谓“线性”规划，是指如果目标函数是关于决策变量的线性函数，而且约束条件也都是关于决策变量的线性等式或线性不等式，则相应的规划问题就称为线性规划问题。

例 1.2 某公司有 100 万元的资金可供投资。该公司有六个可选的投资项目，其各种数据如表 1—2 所示。

表 1—2 六个可选投资项目的有关数据

投资项目	风险 (%)	红利 (%)	增长率 (%)	信用度
1	18	4	22	4
2	6	5	7	10
3	10	9	12	2

续前表

投资项目	风险 (%)	红利 (%)	增长率 (%)	信用度
4	4	7	8	10
5	12	6	15	4
6	8	8	8	6

该公司想达到的目标为：投资风险最小，每年红利至少为 6.5 万元，最低平均增长率为 12%，最低平均信用度为 7。请用线性规划方法求解该问题。

解：

(1) 决策变量

本问题的决策变量是在每种投资项目上的投资额。设 x_i 为项目 i 的投资额 (万元) ($i=1, 2, \dots, 6$)。

(2) 目标函数

本问题的目标为总投资风险最小，即

$$\text{Min } z = 0.18x_1 + 0.06x_2 + 0.10x_3 + 0.04x_4 + 0.12x_5 + 0.08x_6$$

(3) 约束条件

本问题共有五个约束条件。这些约束可表示为：

① 各项目投资总和为 100 万元：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

② 每年红利至少为 6.5 万元：

$$0.04x_1 + 0.05x_2 + 0.09x_3 + 0.07x_4 + 0.06x_5 + 0.08x_6 \geq 6.5$$

③ 最低平均增长率为 12% (在这里增加额应不低于 $100 \times 12\% = 12$ (万元))：

$$0.22x_1 + 0.07x_2 + 0.12x_3 + 0.08x_4 + 0.15x_5 + 0.08x_6 \geq 100 \times 12\%$$

④ 最低平均信用度为 7：

$$4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 6x_6 \geq 7 \times 100$$

⑤ 非负约束：

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

得到的线性规划数学模型为：

$$\text{Min } z = 0.18x_1 + 0.06x_2 + 0.10x_3 + 0.04x_4 + 0.12x_5 + 0.08x_6$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100 \\ 0.04x_1 + 0.05x_2 + 0.09x_3 + 0.07x_4 + 0.06x_5 + 0.08x_6 \geq 6.5 \\ 0.22x_1 + 0.07x_2 + 0.12x_3 + 0.08x_4 + 0.15x_5 + 0.08x_6 \geq 12 \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 6x_6 \geq 700 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

这是一个典型的成本（或风险）最小化问题。其中，“Min”是英文单词“Minimize”的缩写，含义为“最小化”。因此，上述模型的含义是：在给定的条件限制下，求使得目标函数 z 达到最小时 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的取值。

1.1.2 线性规划的模型结构

从以上两个例子中可以归纳出线性规划问题的一般形式：

对于一组决策变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，取

$$\text{Max}(\text{Min}) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1-1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \vdots \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\begin{cases} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

这是线性规划数学模型的一般形式。其中，式（1—1）称为目标函数，它只有两种形式：Max 或 Min；式（1—2）称为函数约束条件，它们表示问题所受到的各种约束，一般有三种形式：“小于等于”、“大于等于”（这两种情况又称为不等式约束）或“等于”（又称等式约束）；式（1—3）称为非负约束条件，很多情况下决策变量都蕴含了这个条件，它们在表述问题时常常不一定明确指出，建模时应该注意这个情况。在实际应用中，有些决策变量允许取任何实数，如温度变量、资金变量等，这时不能人为地强行限制其非负。

在线性规划模型中，也直接称 z 为目标函数；称 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为决策变量；称 $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为目标函数系数或价值系数或费用系数；称 $b_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为函数约束右端常数或简称右端值，也称资源常数；称 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 为约束系数或技术系数或工艺系数。这里， c_j, b_i, a_{ij} 均为常数。

线性规划的数学模型可以表示为如下简洁的形式：

$$\begin{aligned} \text{Max}(\text{Min})z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

可以看出，线性规划模型有如下特点：

- (1) 决策变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 表示要寻求的方案，每一组值就是一个方案；
- (2) 约束条件是用等式或不等式表述的限制条件；
- (3) 一定有一个追求目标，或希望最大或希望最小；
- (4) 所有函数都是线性的。

1.2 线性规划问题的图解法

对于只有两个变量的线性规划问题，可以在二维直角坐标平面上作图求解。

1.2.1 可行域与最优解

在例 1.1 中所要寻求的解是每周门和窗的产量组合。实际上，给出门和窗的任意一组产量组合，就可以得到该问题的一个解，因此可以得到无穷多个解，但是其中只有满足所有约束条件的解才符合题意。满足所有约束条件的解称为该线性规划问题的可行解，全体可行解组成的集合称为该线性规划问题的可行域。其中，使得目标函数达到最优的可行解称为最优解。在例 1.1 中，如果可以找到一组能够满足所有约束条件的产量组合，则这个产量组合就是一个可行解；如果这个可行的产量组合能够使得总利润最大，则这个产量组合便是所求的最优解。

1.2.2 线性规划问题的图解法

线性规划问题一般都由计算机进行求解。现在有许多线性规划软件包，比如电子表格和其他软件中的线性规划模块。大多数软件都使用“单纯形法”来求解线性规划问题。

对于只有两个变量的线性规划问题，可以在二维直角坐标平面上作图表示线性规划问题的有关概念，并求解。图解法求解线性规划问题的步骤如下：

第一步：分别取决策变量 x_1, x_2 为坐标向量建立直角坐标系。