



21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

XINHAOYUXITONG

信号与系统

第二版

全程导学及习题全解

下册

主 编 李 华
副主编 熊 笑 余成金 张 鹏
主 审 邓 晖

- ◆知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆习题详解 精确解答教材习题
- ◆提高练习 巩固知识迈向更高

1.6-44
5;2



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House



21 世纪高等院校经典教材

ERSHIYISHIJIG AODENGYU ANXIAOJINGDIANJIAOCAI

XINHAOYUXITONG

信号与系统

第二版

全程导学及习题全解

下册

主 编 李 华
副主编 熊 笑 余成金 张 鹏
主 审 邓 晖

- ◆ 知识归纳 梳理主线重点难点
- ◆ 习题详解 (精确解答教材习题)
- ◆ 提高练习 巩固知识迈向更高



中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目 (CIP) 数据

信号与系统全程导学及习题全解. 下册/李华主编. —北京: 中国时代经济出版社, 2007. 2

(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 978-7-80221-243-5

I. 信… II. 李… III. 信号系统—高等学校—教学参考资料 IV. TN911. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 148869 号

信号与系统
全程导学及
习题全解
(下册)

李
华
主
编

出 版 者	中国时代经济出版社
地 址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦东办公区 11 层
邮政编码	100007
电 话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传 真	(010)68320634
发 行	各地新华书店
印 刷	北京市白帆印务有限公司
开 本	787×1092 1/16
版 次	2007 年 2 月第 1 版
印 次	2007 年 2 月第 1 次印刷
印 张	11.125
字 数	220 千字
印 数	1~5000 册
定 价	13.50 元
书 号	ISBN 978-7-80221-243-5

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书主要是根据高教出版社出版、郑君里编写的教材《信号与系统》(第二版)的课后习题解答,分上下册,分别对应教材的上下册。上册共分六章:绪论、连续时间系统的时域分析、傅里叶变换、拉普拉斯变换、滤波、调制与抽样、信号的矢量空间分析;下册也为六章:离散时间系统的时域分析、 Z 变换、离散傅里叶变换、模拟与数字滤波器、反馈系统、状态变量分析。每章分三部分,分别为概要总结、经典例题和教材的详细课后习题解答。本书可以作为电子信息、通信、控制、电气信息专业、自动化、计算机等专业高职高专、函授和成人教育的配套教材,也可供研究生入学考试辅导。

前 言

本书是《信号与系统》(郑君里编著,高等教育出版社第二版)的配套辅导教材。“信号与系统”是一门理论性强、结构严谨、内容广泛的电子信息类专业的基础课程。它不仅与后续课程,如高频电路、通信基础、数字信号处理等有紧密联系,而且在培养学生的创新能力,提高学生的科研素质方面都有着重要作用。为了学好这门课程,首先要对基本概念和基本理论有较好的把握,它不仅需要较强的逻辑推理能力,深入地思考,反复领会,更需要做大量的习题,在解题过程中,一方面提高自己的解题技巧;另一方面,也是更重要的方面,是深化对基本概念和基本理论的认识。所以解题过程就是进一步领悟的过程,深入理解的过程。因此,做大量的习题是学好该门课程的关键之一。而由于“信号与系统”课程的习题对于初学者有一定的难度,初学者面对习题经常会感到无从入手,为了帮助初学者能顺利学好“信号与系统”这门课,并满足报考研究生的需求,我们编写了这本辅导教材。本书分六章,每章由概要总结、经典例题和教材的详细课后习题解答组成。第一部分的概要总结将每章的基本知识点、重要概念、常用的公式变化都列出来,让读者能在较短时间内对整个章节有大致地了解;第二部分是典型例题,每章三~五道题,这些题是结合了基本概念、最经常的题型、往年考研例题而编写出来的,具有很强的代表性,其目的是给初学都提供解题的思路,具有一定的启示作用,帮助初学者提高对基本概念和基本理论的认识,也是该门课程对学生的基本要求;第三部分是郑君里教材的详细课后习题解答。我们希望读者在刚开始做题时,不要忙于去翻阅解答,更不要抄袭解答去应付你的老师。解题是自我提高的过程,思考,思考,再思考;当你经过长时间的思考后,再去参阅习题解答,并举一反三,你就会有所领悟,受益匪浅。本书由李华、熊笑、余成金、张鹏等同志编写,全书由邓晖老师主审。邓晖老师严谨的治学态度,使编者受益匪浅,对此深表感谢。本书编写过程中得到陈晓峰、张景刚等同志的大力协助,并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持,为此表示衷心的感谢!对《信号与系统》教材的作者郑君里老师,表示衷心的感谢!

限于编者水平,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者指正。

编 者

2007年1月

目 录

第七章 离散时间系统的时域分析	1
本章学习重点	1
典型例题讲解	2
习题全解	3
第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析	25
本章学习重点	25
典型例题讲解	26
习题全解	28
第九章 离散傅里叶变换以及其他离散正交变换	58
本章学习重点	58
典型例题讲解	59
习题全解	61
第十章 模拟与数字滤波器	86
本章学习重点	86
典型例题讲解	87
习题全解	90
第十一章 反馈系统	116
本章学习重点	116
典型例题讲解	118
习题全解	120
第十二章 系统的状态变量分析	145
本章学习重点	145
典型例题讲解	146
习题全解	148

第七章 离散时间系统的时域分析

本章学习重点

(一) 序列

1. 离散时间信号——序列：是一组序列值的集合 $\{x(n)\}$

2. 典型序列

(1) 单位样值信号

(2) 单位阶跃序列

(3) 矩形序列

(4) 斜变序列

(5) 指数序列

(6) 正弦序列

(7) 复指数序列

(二) 离散时间系统

1. 离散时间系统按性能分为线性、非线性、时不变、时变等类型。其中“线性、时不变系统”目前最为常用，线性离散时间系统满足均匀性与叠加性。

2. 离散时间系统的行为可用差分方程来表示，常系数线性差分方程的解法一般有

(1) 迭代法

(2) 时域经典法

(3) 分别求零输入响应与零状态响应

(4) 变换域方法

本章主要用求齐次解和卷积的方法。

3. 离散线性时不变系统作为因果系统的充分必要条件

$$h(n)=0(\text{当 } n<0) \text{ 或 } h(n)=h(n)u(n)$$

4. 离散时间系统稳定的充分必要条件是单位样值响应绝对可积，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M$$

式中 M 为有界正值。

(三) 系统响应与卷积

1. 系统响应 $y(n)$ 与激励 $x(n)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 之间的关系： $y(n)$ 是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积，即

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

2. 解卷积

(1) 给定 $y(n], h(n)$ 求 $x(n)$

$$x(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)]/h(0)$$

(2) 给定 $x(n], y(n)$ 求 $h(n)$

$$h(n) = [y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)]/x(0)$$

典型例题讲解

例 1 判断以下各序列是否为周期性的. 如果是周期性的, 试确定其周期.

(1) $x(n) = A \cos(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8})$;

(2) $x(n) = e^{j(\frac{n}{8} - \pi)}$

解 (1) $\omega_0 = \frac{3\pi}{7}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3\pi/7} = \frac{14}{3}$. 令 $T = \frac{14}{3}m$, 显然, 使 T 为整数的最小整数 m 为 3, 此时 $T = 14$.

$\therefore x(n)$ 为周期序列, 周期为 14.

(2) $\omega_0 = \frac{1}{8}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega_0} = 16\pi$ 是无理数.

$\therefore x(n)$ 是非周期序列.

例 2 已知一线性时不变离散系统, 当激励 $x_1(n) = G_5(n)$ 时, 其零状态响应为 $y_1(n) = (2-2^{-n})u(n) - [2-2^{-(n-5)}]u(n-5)$, 现要设计另一离散系统, 其形式如图 7-1 所示. 若要使其与上述系统等效, 试确定系统中的系数 a .

解 根据系统框图列出差分方程为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

已知 $x_1(n) = G_5(n) = u(n) - u(n-5)$ 时, 零状态响应为

$$y(n) = (2-2^{-n})u(n) - [2-2^{-(n-5)}]u(n-5) \quad ①$$

则差分方程可写成

$$y(n) - ay(n-1) = u(n) - u(n-5) \quad ②$$

由②式和 $y(-1) = 0$ 得 $y(0) = ay(-1) + 1 = 1, y(1) = ay(0) + 1 = a + 1$

由①式得 $y(1) = \frac{3}{2}$,

$$\therefore a + 1 = \frac{3}{2}, \text{ 即 } a = \frac{1}{2}.$$

例 3 已知系统差分方程为:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + x(n-1), y(-1) = 2, y(0) = 0$$

(1) 求系统的零输入响应 $y_z(n)$ 和单位样值响应;

(2) 若 $x(n) = 2^n u(n)$, 求系统的零状态响应.

解 (1) 系统的特征方程为 $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$, 特征根为 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$.

故设 $y_z(n) = C_1 + C_2 2^n$

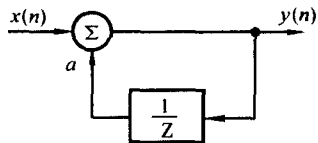


图 7-1

将 $y(-1)=2, y(0)=0$ 代入上式, 得 $C_1=4, C_2=-4$.

则 $y_{zs}(n)=4-4 \times 2^n=4-2^{n+2}$

对于单位样值响应, 其差分方程为

$$h(n)-3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n)+\delta(n-1)$$

$\therefore$ 当 $n < 0$ 时, $h(n)=0$;

当 $n=0$ 时, $h(0)=1$;

当 $n=1$ 时, $h(1)=4$;

当 $n > 1$ 时, $h(n)-3h(n-1)+2h(n-2)=0$.

由系统特征方程, 设 $h(n)=D_1+D_2 2^n$,

将 $h(0)=1, h(1)=4$ 代入得, $D_1=-2, D_2=3$

$\therefore h(n)=(-2+3 \times 2^n)u(n)$

(2) 其零状态响应为输入与单位样值响应的卷积, 即

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m u(m) [-2+3 \times 2^{n-m}] u(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^n (-2 \times 2^m + 3 \times 2^n) = [(3n-1) \times 2^n + 2] u(n) \end{aligned}$$

习题全解

7-1 分别绘出以下各序列的图形.

(1) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(2) $x(n) = 2^n u(n)$

(3) $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(4) $x(n] = (-2)^n u(n)$

(5) $x(n) = 2^{n-1} u(n-1)$

(6) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n)$

解 (1) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(a);

(2) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(b);

(3) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(c);

(4) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(d);

(5) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(e);

(6) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-1(f).

7-2 分别绘出以下各序列的图形.

(1) $x(n) = nu(n)$

(2) $x(n) = -nu(-n)$

(3) $x(n) = 2^{-n} u(n)$

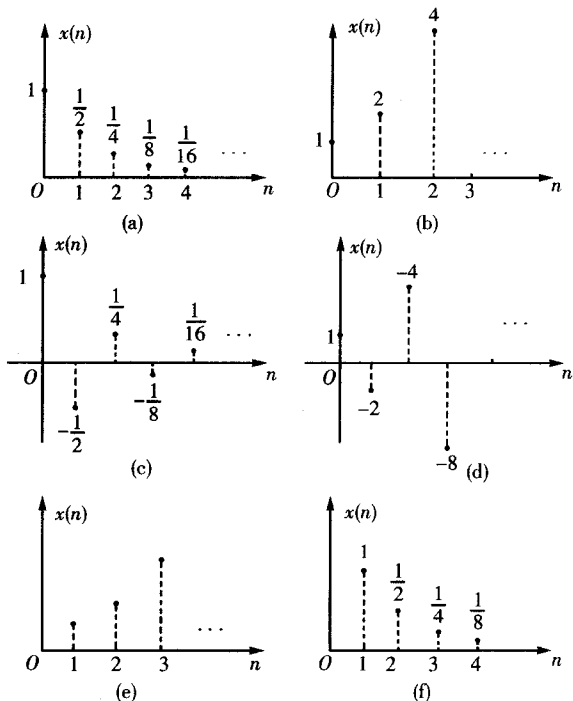


图 7-1

$$(4) x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} u(n)$$

$$(5) x(n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$$

$$(6) x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1)$$

解 (1) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(a);

(2) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(b);

(3) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(c);

(4) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(d);

(5) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(e);

(6) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-2(f).

7-3 分别绘出以下各序列的图形.

$$(1) x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

$$(2) x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$(3) x(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

解 (1) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-3(a);

(2) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-3(b);

(3) 序列 $x(n]$ 的图形见图 7-3(c);

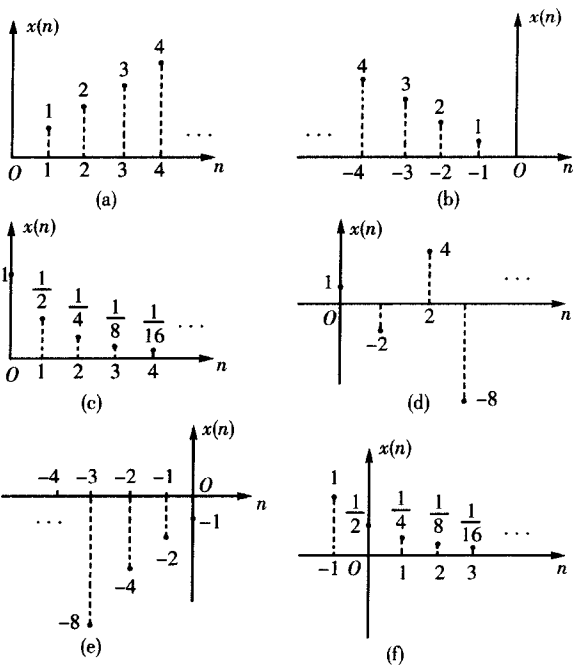


图 7-2

题 7-1 至 7-3 旨在考查不同形式的离散时间序列, 加深对基础概念的理解和认识.

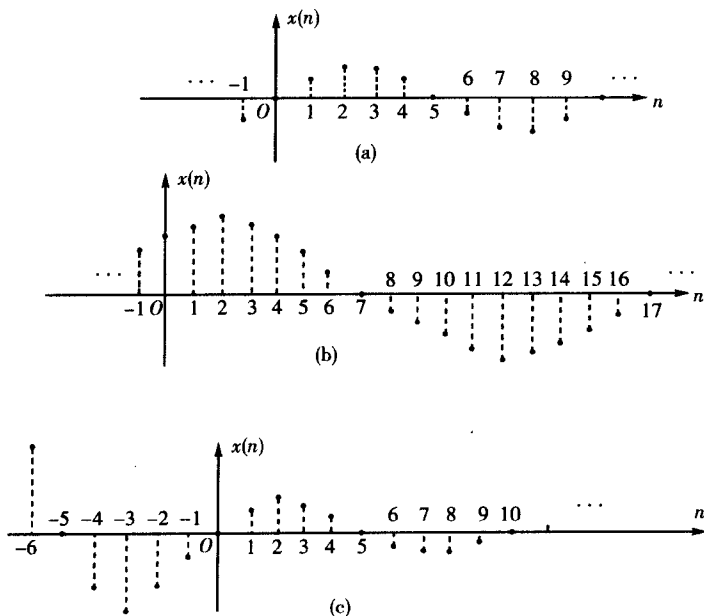


图 7-3

7-4 判断以下各序列是否周期性的,如果是周期性的,试确定其周期。

$$(1) x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$$

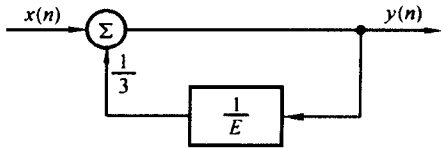
$$(2) x(n) = e^{j\left(\frac{\pi}{8} - \pi\right)}$$

解 若对于整数 N , 有 $x(n+N) = x(n)$, 则 $x(n)$ 是周期序列。设序列的频率为 ω_0 (存在的话), 则如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是有理数, $x(n)$ 是周期性的; 如果 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是无理数, $x(n)$ 就是非周期性的。

(1) 由于 $\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{7}} = \frac{14}{3}$ 是有理数, 所以 $x(n)$ 是周期性的, 周期为 14。

(2) 由于 $\frac{2\pi}{\frac{1}{8}} = 16\pi$ 是无理数, 所以 $x(n)$ 是非周期性的。

7-5 列出题图 7-5 所示系统的差分方程, 已知边界条件 $y(-1) = 0$ 。分别求以下输入序列时的输出 $y(n]$, 并绘出其图形(用逐次迭代方法求)。



题图 7-5

$$(1) x(n) = \delta(n)$$

$$(2) x(n) = u(n)$$

$$(3) x(n) = u(n) - u(n-5)$$

解 根据题图 7-5 可列出该系统的差分方程为

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n-1), \text{边界条件 } y(-1) = 0$$

(1) 当 $x(n) = \delta(n)$ 时, 进行迭代求解如下:

$$y(0) = x(0) + \frac{1}{3}y(-1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0 = 1$$

$$y(1) = x(1) + \frac{1}{3}y(0) = 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$y(2) = x(2) + \frac{1}{3}y(1) = 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

⋮

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

所以 $y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ 或 $y(n) = 3^{-n}u(n)$

其图形见图 7-5(a)。

(2) 当 $x(n) = u(n)$ 时, 进行迭代求解如下:

$$y(0) = x(0) + \frac{1}{3}y(-1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0 = 1 = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0}{2}$$

$$y(1) = x(1) + \frac{1}{3}y(0) = 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{4}{3} = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^1}{2}$$

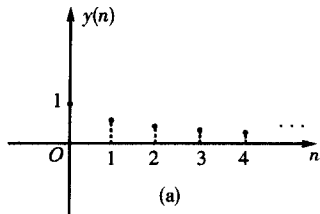


图 7-5

$$y(2) = x(2) + \frac{1}{3}y(1) = 1 + \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{13}{3^2} = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

$$\text{所以 } y(n) = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] u(n) = \frac{3 - 3^{-n}}{2} u(n)$$

其图形见图 7-5(b)。

(3) 当 $x(n] = u(n) - u(n-5)$ 时, 进行迭代求解如下:

$$y(0) = x(0) + \frac{1}{3}y(-1) = 1 = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0}{2}$$

$$y(1) = x(1) + \frac{1}{3}y(0) = \frac{4}{3} = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^1}{2}$$

$$y(2) = x(2) + \frac{1}{3}y(1) = \frac{13}{3^2} = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2}$$

$$y(3) = x(3) + \frac{1}{3}y(2) = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3}{2}$$

$$y(4) = x(4) + \frac{1}{3}y(3) = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}{2}$$

$$y(5) = x(5) + \frac{1}{3}y(4) = 0 + \frac{1}{3}y(4) = \frac{1}{3} \times \frac{121}{3^4} = \frac{121}{3^5}$$

$$y(6) = x(6) + \frac{1}{3}y(5) = 0 + \frac{1}{3}y(5) = \frac{121}{3^6}$$

$$\vdots$$

$$y(n) = \frac{121}{3^n} (n \geq 5 \text{ 时})$$

$$\text{所以 } y(n) = \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] [u(n) - u(n-5)] + \frac{121}{3^n} u(n-5)$$

其图形见图 7-5(c)。

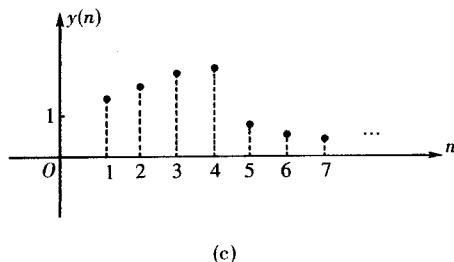
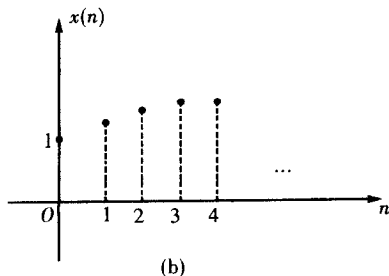
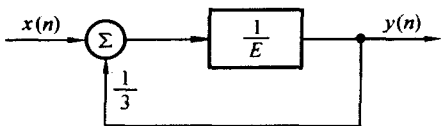


图 7-5

7-6 列出题图 7-6 所示系统的差分方程, 已知边界条件 $y(-1)=0$ 并限定当 $n<0$ 时, 全部 $y(n)=0$, 若 $x(n)=\delta(n)$, 求 $y(n)$. 比较本题与 7-5 题相应的结果.



题图 7-6

解 根据题图 7-6 可列出该系统的差分方程

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + x(n-1), \text{ 边界条件 } y(-1)=0.$$

当 $x(n)=\delta(n)$ 时,

$$y(0) = x(-1) + \frac{1}{3}y(-1) = 0 + \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

$$y(1) = x(0) + \frac{1}{3}y(0) = 1 + 0 = 1$$

$$y(2) = x(1) + \frac{1}{3}y(1) = 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$y(3) = x(2) + \frac{1}{3}y(2) = 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\vdots$

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

与题 7-5(1) 比较, 本题中, 当 $n=1$ 时, $y(n)$ 为第一个非零值. 而题 7-5(1) 中, 当 $n=0$ 时, $y(n)$ 取第一个非零值. 本题结果是题 7-5(1) 向右移一个单位的结果.

7-7 在题 7-5 中, 若限定当 $n>0$, 全部 $y(n)=0$, 以 $y(1)=0$ 为边界条件, 求当 $x(n)=\delta(n)$ 时的响应 $y(n)$, 这时, 可以得到一个左边序列, 试解释为什么会出现这种结果.

解 由题 7-5 知

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

所以 $y(n-1) = 3[y(n) - x(n)]$, 且当 $n>0$ 时, $y(n)=0$, $y(1)=0$,

迭代时分别令 $n=1, 0, -1, -2, \dots$. 于是

$$y(0) = 3[y(1) - x(1)] = 0 - 0 = 0$$

$$y(-1) = 3y(0) - 3x(0) = 0 - 3 = -3$$

$$y(-2) = 3y(-1) - 3x(-1) = -3^2$$

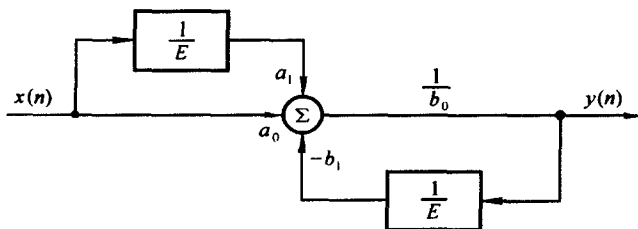
$\vdots$

$$y(n) = -3^{-n}$$

所以 $y(n) = -3^{-n}u(-n-1)$ 为一个左边序列.

之所以得到一个左边序列, 是因为限定了 $n>0$ 时, $y(n)=0$, 所以 $y(n)$ 的非零值只可能出现在 $n<0$ 范围内. 从离散系统的记忆性来看, 由于 $x(n)=\delta(n)$, 当 $n=0$ 时有 1 的输入, 若 $n<0$ 时, $y(n)=0$, 则不可能满足边界条件 $y(1)=0$.

7-8 列出题图 7-8 所示系统的差分方程,指出其阶次.



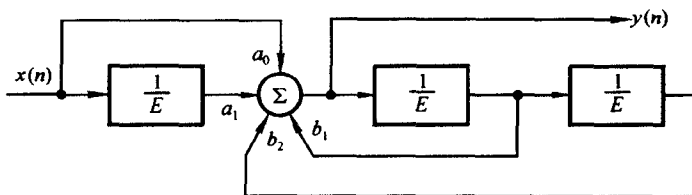
题图 7-8

解 题图 7-8 所示系统的差分方程为

$$b_0 y[n] + b_1 y[n-1] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$$

是一阶差分方程.

7-9 列出题图 7-9 所示系统的差分方程,指出其阶次.



题图 7-9

解 题图 7-9 所示系统的差分方程为

$$y[n] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1]$$

是二阶差分方程.

7-10 已知描述系统的差分方程表示式为

$$y[n] = \sum_{r=0}^7 b_r x[n-r]$$

试画出此离散系统的方框图. 如果 $y[-1]=0, x[n]=\delta[n]$, 试求 $y[n]$, 指出此时 $y[n]$ 有何特点, 这种特点与系统的结构有何关系.

解 此离散系统的方框图见图 7-10 所示.

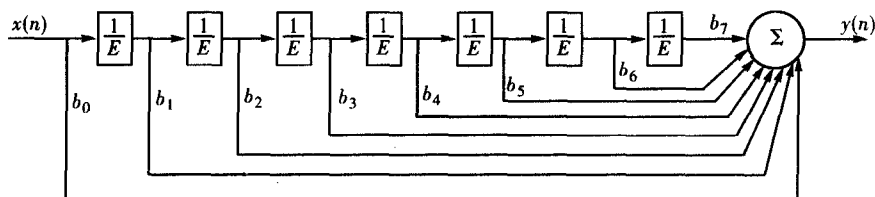


图 7-10

$$x[n]=\delta[n], \text{ 则 } y[n] = \sum_{r=0}^7 b_r \delta[n-r]$$

所以 $y[0]=b_0, y[1]=b_1, y[2]=b_2, y[3]=b_3, y[4]=b_4, y[5]=b_5, y[6]=b_6, y[7]=b_7$

当 $n < 0$ 或 $n > 7$ 时 $y[n]=0$.

此时 $y(n)$ 为有限长序列, 在非零值区间内的值为 $b_r (r=0, \dots, 7)$ 正好是各前向支路的增益, 而与过去的响应无关, 这种特点取决于系统中没有反馈支路, 只有前向支路。

7-11 解差分方程.

$$(1) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0, y(0) = 1$$

$$(2) y(n) - 2y(n-1) = 0, y(0) = \frac{1}{2}$$

$$(3) y(n) + 3y(n-1) = 0, y(1) = 1$$

$$(4) y(n) + \frac{2}{3}y(n-1) = 0, y(0) = 1$$

解 (1) 特征方程 $\alpha - \frac{1}{2} = 0$

所以特征根 $\alpha = \frac{1}{2}$

故齐次解为 $y(n) = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

将 $y(0) = 1$ 代入上式, 得 $C = 1$

所以 $y(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) 特征方程 $\alpha - 2 = 0$

所以特征根 $\alpha = 2$

故齐次解为 $y(n) = C \cdot 2^n$

将 $y(0) = \frac{1}{2}$ 代入上式, 得 $C = \frac{1}{2}$

所以 $y(n) = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$

(3) 特征方程 $\alpha + 3 = 0$

所以特征根 $\alpha = -3$

故齐次解为 $y(n) = C \cdot (-3)^n$

将 $y(1) = 1$ 代入上式, 得 $C = -\frac{1}{3}$

所以 $y(n) = -\frac{1}{3} \cdot (-3)^n = (-3)^{n-1}$

(4) 特征方程 $\alpha + \frac{2}{3} = 0$

所以特征根 $\alpha = -\frac{2}{3}$

故齐次解为 $y(n) = C \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

将 $y(0) = 1$ 代入上式, 得 $C = 1$

所以 $y(n) = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

7-12 解差分方程.

$$(1) y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0, y(-1) = 2, y(-2) = 1$$

$$(2) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 0, y(0) = y(-1) = 1$$

$$(3) y(n) + y(n-2) = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$$

解 (1) 特征方程 $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$, 解得特征根 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$.

齐次解 $y(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$

将 $y(-1) = 2, y(-2) = 1$ 代入上式, 得方程组

$$\begin{cases} -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 2 \\ C_1 + \frac{1}{4}C_2 = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -12 \end{cases}$$

所以 $y(n) = 4(-1)^n - 12(-2)^n$

(2) 特征方程 $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$, 解得特征根 $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$

齐次解 $y(n) = (C_1 n + C_2)(-1)^n$

将 $y(0) = y(-1) = 1$ 代入上式, 得方程组

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ -(-C_1 + C_2) = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

所以 $y(n) = (2n + 1)(-1)^n$

(3) 特征方程 $\alpha^2 + 1 = 0$, 解得特征根 $\alpha_1 = j, \alpha_2 = -j$

齐次解 $y(n) = C_1(j)^n + C_2(-j)^n$

将 $y(0) = 1, y(1) = 2$ 代入上式, 得方程组

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 2j \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} - j \\ C_2 = \frac{1}{2} + j \end{cases}$$

所以 $y(n) = (\frac{1}{2} - j) \cdot (j)^n + (\frac{1}{2} + j) \cdot (-j)^n$

$$\begin{aligned} &= (\frac{1}{2} - j)e^{j\frac{n\pi}{2}} + (\frac{1}{2} + j)e^{-j\frac{n\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(e^{j\frac{n\pi}{2}} + e^{-j\frac{n\pi}{2}}) - j(e^{j\frac{n\pi}{2}} - e^{-j\frac{n\pi}{2}}) \\ &= \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2\sin(\frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

7-13 解差分方程.

$$y(n) - 7y(n-1) + 16y(n-2) - 12y(n-3) = 0,$$

$$y(1) = -1, y(2) = -3, y(3) = -5$$

解 特征方程 $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 16\alpha - 12 = 0$

$$(\alpha^3 - 7\alpha^2 + 12\alpha) + 4(\alpha - 3) = 0$$

$$(\alpha - 3)(\alpha - 2)^2 = 0$$

所以特征根 $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = \alpha_3 = 2$

齐次解 $y(n) = C_1 3^n + (C_2 \cdot n + C_3) 2^n$

将 $y(1) = -1, y(2) = -3, y(3) = -5$ 代入上式, 得方程组

$$\begin{cases} 3C_1 + 2(C_2 + C_3) = -1 \\ 9C_1 + 4(2C_2 + C_3) = -3 \\ 27C_1 + 8(3C_2 + C_3) = -5 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = -1 \end{cases}$$

所以 $y(n)=3^n-(n+1)2^n$

7-14 解差分方程 $y(n)=-5y(n-1)+n$, 已知边界条件 $y(-1)=0$.

解 特征方程 $\alpha+5=0$, 特征根 $\alpha=-5$

所以齐次解为 $C(-5)^n$, 令特解为 D_1n+D_2 , 代入原方程

$$D_1n+D_2+5[D_1(n-1)+D_2]=n$$

比较上式两边得 $D_1=\frac{1}{6}, D_2=\frac{5}{36}$

则全解 $y(n)=C(-5)^n+\frac{1}{6}n+\frac{5}{36}$

将 $y(-1)=0$ 代入上式, 得 $C=-\frac{5}{36}$

所以 $y(n)=\frac{1}{36}[(-5)^{n+1}+6n+5]$

7-15 解差分方程 $y(n)+2y(n-1)=n-2$, 已知 $y(0)=1$.

解 由差分方程知, 齐次解为 $C(-2)^n$. 令特解为 D_1n+D_2 代入原方程

$$D_1n+D_2+2D_1(n-1)+2D_2=n-2$$

比较上式两边得 $D_1=\frac{1}{3}, D_2=-\frac{4}{9}$

则全解 $y(n)=C(-2)^n+\frac{1}{3}n-\frac{4}{9}$

将 $y(0)=1$ 代入上式, 得 $C=\frac{13}{9}$

所以 $y(n)=\frac{1}{9}[13(-2)^n+3n-4]$

7-16 解差分方程 $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=3^n$, 已知 $y(-1)=0, y(0)=0$.

解 特征方程 $\alpha^2+2\alpha+1=0$, 特征根 $\alpha_1=\alpha_2=-1$

齐次解为 $(C_1n+C_2)(-1)^n$. 令特解为 $D3^n$, 代入原方程

$$D \cdot 3^n + 2D \cdot 3^{n-1} + D \cdot 3^{n-2} = 3^n$$

比较上式两边, 得 $D=\frac{9}{16}$

则全解 $y(n)=(C_1n+C_2)(-1)^n+\frac{9}{16} \cdot 3^n$

将 $y(-1)=0, y(0)=0$ 代入上式, 得方程组

$$\begin{cases} -(-C_1+C_2)+\frac{9}{16} \times \frac{1}{3}=0 \\ C_2+\frac{9}{16}=0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} C_1=-\frac{3}{4} \\ C_2=-\frac{9}{16} \end{cases}$$

所以 $y(n)=(\frac{3}{4}n+\frac{9}{16})(-1)^{n+1}+\frac{1}{16} \cdot 3^{n+2}$

7-17 解差分方程 $y(n)+y(n-2)=\sin n$, 已知 $y(-1)=0, y(-2)=0$.

解 特征方程 $\alpha^2+1=0$, 特征根 $\alpha_1=j, \alpha_2=-j$

齐次解为 $C_1j^n+C_2(-j)^n=C_1e^{j\frac{n\pi}{2}}+C_2e^{-j\frac{n\pi}{2}}=A_1\cos\frac{n\pi}{2}+A_2\sin\frac{n\pi}{2}$