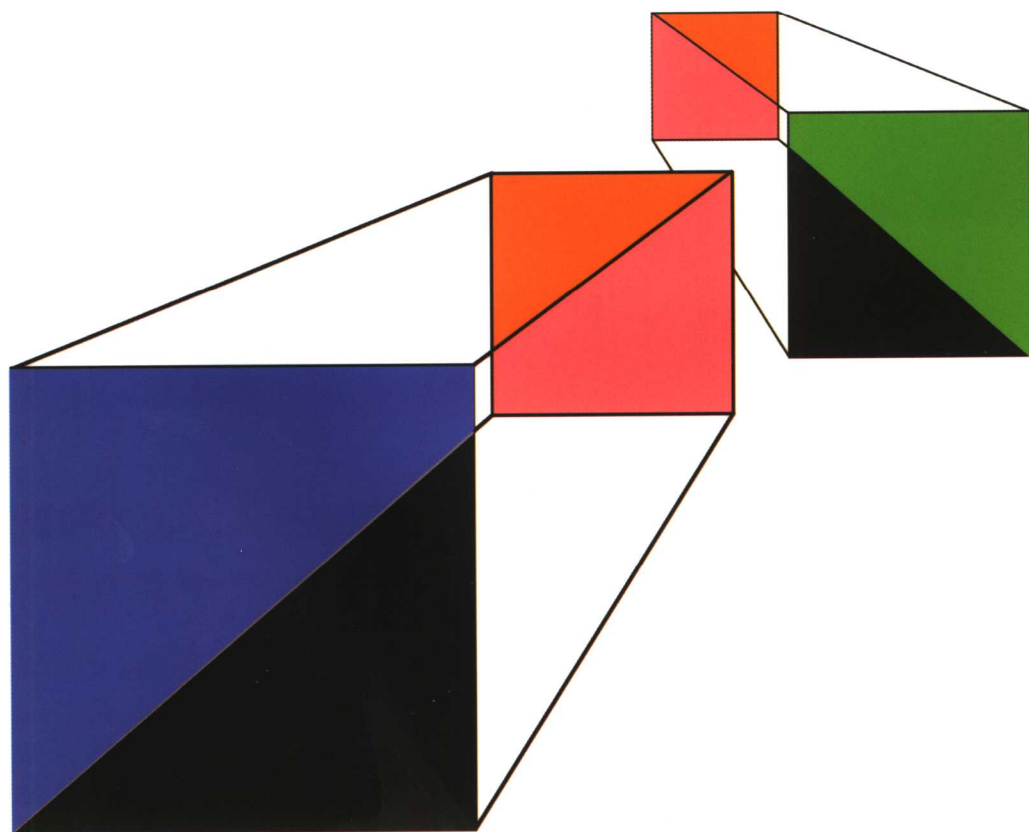


岩土工程并行有限元 程序设计

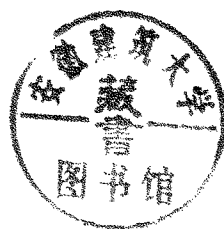
茹忠亮 编著



煤炭工业出版社

岩土工程并行有限元程序设计

茹忠亮 编著



煤炭工业出版社

·北京·

内 容 提 要

本书内容主要包括结构位移法、弹性力学有限元法及变分原理介绍；面向对象有限元程序设计方法；基本的线性代数程序设计；有限元计算中常用的杆件单元、三角形单元、四边形单元计算原理及程序设计；岩土工程并行有限元程序设计基本方法；并行位移反分析计算方法。

本书可作为土木工程、工程力学专业高年级本科生、研究生的教科书及参考书，也可供从事土木工程设计、施工等专业的科研人员及工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

岩土工程并行有限元程序设计/茹忠亮编著. —北京:
煤炭工业出版社, 2007

ISBN 978-7-5020-2926-5

I. 岩… II. 茹… III. 岩土工程-有限元法-程
序设计 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 139136 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址: www.cciph.com.cn
北京玥实印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行

*
开本 787mm × 1092mm^{1/16} 印张 10^{1/2}
字数 240 千字 印数 1—500
2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
社内编号 5725 定价 27.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换

序 言

有限单元法作为工程数值分析中强有力的工具，已经在结构工程、岩土工程分析中得到广泛应用。伴随着计算机技术的发展，出现了许多将计算机技术应用于工程计算的新技术和新方法。本书是作者近年来从事有限元程序开发的成果和教学体验，并综合国内外学者的相关研究编著而成的。

随着信息科学、人工智能科学等新兴学科的发展，岩土力学与其他学科交叉渗透是岩土工程学科发展的一个新方向。作者从程序开发入手对涉及这一领域的知识做了深入浅出的讨论，如线性代数、数值方法、结构力学、弹塑性力学及新发展的并行技术、遗传算法等，将工程计算中所需要的数学模型完整地表达出来，并且直接编成计算机程序。

本书在内容安排上突出了以下重点：

(1) 重视理论性。有限元法作为一种数值计算工具，在应用时，应首先掌握该方法的基本理论。本书从结构位移法到弹性力学有限元法的发展过程及变分原理都做了详细的介绍，并且给出了相应的数值算例。

(2) 重视实践性。在掌握基本理论的同时，还需要提高手算和上机操作的能力。本书采用面向对象的方法进行有限元程序开发，从最底层的线性方程组求解到复杂的并行有限元编程技术以及遗传算法位移反分析都给出了较为详细的源程序，有利于读者熟练掌握有限元计算的原理与方法。

(3) 针对岩土力学中出现的计算难题，结合区域分解算法及并行编程方法，对PC机群环境下有限元并行编程技术进行了研究，并取得了相应的成果。

(4) 岩石力学参数的不确定性是岩土工程领域的研究热点，本书采用遗传算法等智能算法结合同行有限元技术对此问题进行了讨论，给出了并行进化有限元算法及算例。

本书是作者在上述方面做出的一个阶段性成果，同时也是一本学习有限元程序设计的好教材。本书可作为土木工程学科本科生、研究生有限元课程的教科书及参考书，同时也可供从事工程设计、施工、教学与研究的有关人员参考。



中国工程院院士

2006年10月15日

前 言

随着计算机技术的发展,有限单元法在岩土工程分析中得到了广泛的应用,同时由于岩土材料本身的复杂性及其参数的不确定性,很多学者将信息科学、智能科学等新兴学科引入了岩土力学的计算中,在此方面作者也进行了尝试。

本书主要包括以下几方面内容:①结构位移法、弹性力学有限元法及变分原理介绍;②面向对象有限元程序设计方法;③基本的线性代数程序设计;④有限元计算中常用的杆件单元、三角形单元、四边形单元计算原理及程序设计;⑤岩土工程并行有限元设计基本方法;⑥并行位移反分析计算方法。

本书中的程序代码全部采用 C++ 语言编制,在 Windows 2000/XP 系统下进行开发调试,其中并行环境为 MPICH1.25。所列举的部分程序代码参考了国内外学者的相关研究。作者在 2002 年读博士学位期间即开始了此程序的开发及调试,期间得到了导师冯夏庭教授的悉心指导,王泳嘉教授、周辉研究员、王水林研究员对程序的开发提供了好的建议,并行有限元程序设计部分得到了张有良博士的帮助与指导,杨成祥博士提供了遗传算法的部分程序,在此作者表示衷心的感谢。

本书的撰写出版过程中,得到了河南理工大学土木工程学院曾宪桃教授、王有凯教授、刘希亮教授、顿志林教授的大力支持和帮助,王敏完成了部分书稿的文字校对工作,河南理工大学重点学科建设基金对本书的出版给予了资助,作者在此一并表示由衷的感谢。

本书可以作为理工院校土木工程、工程力学、岩土工程等相关专业的高年级本科生及研究生有限元课程的教科书及参考书,同时也可作为从事土木工程设计、施工等专业的科研人员及工程技术人员的参考书。

由于编写时间仓促,书中文字及程序代码的错误及疏漏之处在所难免,欢迎广大读者给予批评指正。

作 者

2006 年 10 月于河南理工大学

目 录

第1章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 有限元法的发展历史	1
1.3 有限元法的计算步骤	2
1.4 有限元的常用术语	3
1.5 有限元法程序设计	4
第2章 有限元法的理论基础	6
2.1 引言	6
2.2 矩阵位移法	6
2.3 弹性力学问题的有限元法.....	11
2.4 里兹法.....	16
2.5 迦辽金法.....	17
第3章 面向对象有限元程序设计方法	19
3.1 引言.....	19
3.2 面向对象的基本概念.....	19
3.3 面向对象语言.....	20
3.4 面向对象有限元程序设计.....	21
第4章 矩阵及线性方程组的求解	33
4.1 引言.....	33
4.2 矩阵及相关运算.....	33
4.3 线性方程组的求解.....	40
4.4 刚度矩阵的存储方式.....	47
第5章 杆系结构有限元法	50
5.1 引言.....	50
5.2 一维杆单元.....	50
5.3 二维桁架单元.....	57
5.4 梁单元.....	60
5.5 程序计算举例.....	64

第 6 章 平面问题有限元法	68
6.1 引言	68
6.2 有限元模型的离散	68
6.3 平面问题的三角形单元求解	69
6.4 矩形单元	82
第 7 章 平面等参数单元	84
7.1 引言	84
7.2 平面四结点等参元	84
7.3 高斯积分法	89
7.4 QuadEle 单元类介绍	91
7.5 岩土材料弹塑性理论	96
7.6 程序算例	99
第 8 章 空间问题的有限元法	102
8.1 引言	102
8.2 四面体单元	102
8.3 八结点六面体单元	106
第 9 章 并行有限元法	112
9.1 引言	112
9.2 并行计算机简介	112
9.3 有限元并行计算发展概况	114
9.4 基于 MPI 的网络并行计算	115
9.5 区域分解并行有限单元法	118
9.6 基于区域分解的并行有限元算法	120
9.7 预处理共轭梯度法并行迭代算法	122
9.8 数值算例	125
第 10 章 岩土工程施工过程数值模拟	128
10.1 引言	128
10.2 岩土工程锚固支护计算分析	128
10.3 开挖过程并行计算分析	133
10.4 程序算例	136
第 11 章 岩土工程物性辨识问题的并行求解	141
11.1 引言	141
11.2 反分析方法研究进展	141

11.3	遗传算法 (GA) 简介	143
11.4	岩体参数反演的 GA 研究	144
11.5	基于并行有限元的进化位移反分析法	145
11.6	数值算例	149
参考文献		152

第1章 绪 论

1.1 引言

自1946年第一台电子计算机诞生,人类社会便进入了一个计算科学的时代,出现了计算力学、计算物理、计算化学、计算生物学等各类学科。计算在生命科学、天文学、医学、经济学、社会学及其他软科学中发挥的作用日益增大,在气象、核技术、石油勘探、航空航天、金融、交通运输等国民经济与国防建设的许多重要领域已经成为必不可少的手段。著名的计算物理学家、诺贝尔奖获得者 Wilson 教授在20世纪80年代指出:“当今,科学活动可分为三种:理论、试验和计算。实验科学家从事测量和设计科学设备及利用这些设备去进行测量,致力于可控、可重复实验的设计以及分析这些实验的误差;理论科学家研究实验数据之间的关系、这些关系满足的原理以及把这些原理运用到具体特殊情况所需要的数学概念和技术;计算科学家构造求解科学问题的计算方法,把这些方法软件化,设计和进行数值试验,分析这些数值试验的误差,通过计算揭露所求科学问题的基本性质和规律。”我国著名数学家冯康先生在多种场合反复强调与论述科学计算的重要性以及计算已成为第三种方法,他的观点影响日益扩大,得到了越来越多科学家的赞同。在过去的半个多世纪里,计算已经对整个科学技术和人类社会产生了巨大的推动作用。

有限单元法是20世纪中叶电子计算机诞生之后,在计算数学、计算力学和计算工程科学领域里诞生的最有效的计算方法。经过50年的不断发展,理论基础已经相当完善,并应用于航空航天、造船、水利、机械、建筑、石油等部门,在工程设计和分析中得到了越来越广泛的重视,已经成为解决复杂工程计算问题的有效途径。

1.2 有限元法的发展历史

有限单元法(以下简称有限元法)的最初思想来源于飞机结构的矩阵分析。1941年, Hrenikoff 提出了一种解决弹性问题的刚架分析方法;1943年, Courant 采用基于三角形的分段多项式函数和最小势能原理相结合来求解 St. Venant 扭转问题;1955年, Argyris 在航空工程杂志上发表了一组能量原理和结构分析的论文,并将其应用于复杂的杆系结构分析;1956年, Turner 将矩阵位移法推广到求解平面应力问题,把连续几何模型划分成一个个三角形和矩形的“单元”,并为所使用的单元指定近似位移函数,进而求得单元结点力与结点位移关系的单元刚度矩阵;1960年, Clough 进一步求解了平面弹性问题,并发表了题为“The Finite Element in Plane Stress Analysis”的论文,第一次提出了“有限单元法”这一名词,此后被广泛地加以引用。

1955年, Argyris 的著作《利用能量原理和矩阵分析方法》为有限元的发展奠定了基础;1967年, Zienkiewicz 与 Y. K. Cheung 合作,首次出版了有限元专著《结构与连续力学的有限元法》;1972年, Oden 出版了关于固体结构非线性的有限元论著;随后 Crisfield,

Kleiber, Hughes 等都发表了相关的论著。在我国比较有影响的论著有：《变分法和有限元》（钱伟长 1979），《弹性和塑性力学中的有限单元法》（谢贻权 1981），《固体力学有限元理论、方法及程序》（徐次达 1983），《有限单元法》（王勖成、邵敏等 1987）。

半个世纪以来，有限单元法蓬勃发展，不仅成为结构分析中必不可少的工具，而且已成为工程现象分析的一种强有力的手段。其应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、渗流与固结理论、热传导与热应力问题、磁场问题以及建筑声学及噪声问题。不仅涉及稳态场问题，还涵盖材料非线性、几何非线性、时间维问题和断裂力学等。

长期以来，PC 机一直是进行有限元计算的主要手段，然而随着现代科技的发展，科学计算的规模越来越大，计算精度要求越来越高，传统的基于 PC 机有限元计算面临着严峻的挑战。网络技术的发展为解决这一难题提供了一种廉价快捷的方法，即发展基于 PC 机群的有限元并行计算。区域分解法（Domain Decomposed Method）为并行有限元计算奠定了理论基础，康立山教授在利用区域分解法求解数学物理方程方面做了大量的研究，吕涛、石济民在论著《区域分解算法—偏微分方程数值解新技术》中对区域分解算法进行了详细介绍，余天堂，姜弘道等基于 Windows 操作系统的 PVM 并行网络，开展了并行有限元计算的研究工作。

1.3 有限元法的计算步骤

有限元法的计算可归纳为以下 3 个基本步骤：网格划分、单元分析、整体分析。

1.3.1 网格划分

有限元法的基本做法是用有限个单元体的集合来代替原有的连续体。因此首先要对弹性体进行必要的简化，再将弹性体划分为有限个单元组成的离散体，单元之间通过结点相连接。由单元、结点、结点连线构成的集合称为网格。结构离散时，划分的单元大小和数目应根据计算精度的要求和计算机的容量来决定。通常把三维实体划分成四面体或六面体单元的实体网格，平面问题划分成三角形或四边形单元网格，如图 1-1 ~ 图 1-4 所示。

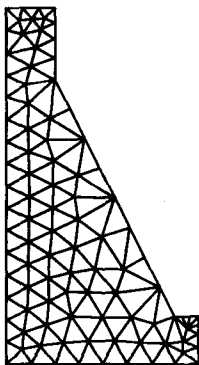


图 1-1 平面问题的三角形单元划分

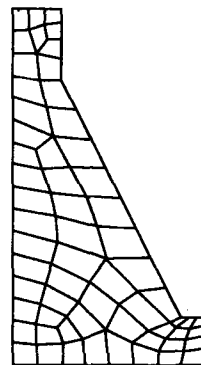


图 1-2 平面问题的四边形单元划分

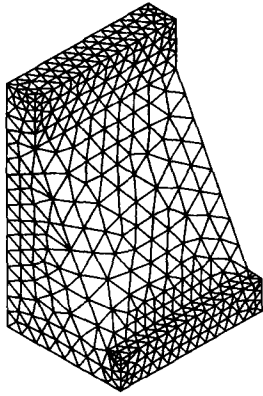


图 1-3 三维实体的四面体单元划分

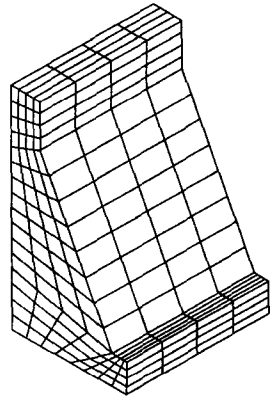


图 1-4 三维实体的六面体单元划分

1.3.2 单元分析

对于弹性力学问题，单元分析就是建立各个单元的结点位移和结点力之间的关系式。由于有限元法将单元的结点位移作为基本变量，故进行单元分析首先要为单元内部的位移确定一个位移插值函数，然后计算单元的应变、应力，再建立单元中结点力与结点位移的关系式，利用几何方程、本构方程和变分原理最终得到单元刚度矩阵。

1.3.3 整体分析

将各个单元刚度矩阵合成整体刚度矩阵，将各单元的等效结点力合成总的荷载列阵，建立整体结构的平衡方程。

1.3.4 方程组求解

由平衡方程组求解未知结点位移，进而计算单元应力、应变。

1.4 有限元的常用术语

1.4.1 单元与结点

对于任何连续体，都可以将其想象成是由有限个简单形状的单元体组成。任何相邻单元只能在结点处相互连接，这些单元的组合被称为实际对象的近似模型。

常用的单元可以分为自然单元和分割单元。一些工程构件（如桁架结构）的连杆在分析时无需再加分割称为自然单元，自然构件能否看作自然单元取决于所研究的范围和构件本身的力学性质；将整体结构和连续体分成许多小单元的组合，这种单元称为分割单元。从理论上讲，单元的分割是任意的，不过在实际计算中必须根据研究对象的特点，使单元分割既能满足力学分析要求，又能使计算简单。

结点是单元与单元之间设置的相互连接点。结点可分为铰接、固接或其他形式的连接。有了结点才可以将实际连续体看成是仅在结点处相互连接的单元群组成的离散性结构，从而使研究的对象转化成可以使用计算机计算的数学模型。

1.4.2 结点力和结点荷载

相邻单元之间的相互作用是通过结点来实现的，这种通过结点的相互作用力就是结点力，也称结点内力。作用在结点上的外荷载称为结点荷载。结点荷载分为两部分：一是原来作用在结点上的外力；二是按静力等效原则将作用在单元上的分布力移植到结点上的结

点荷载。将单元上的实际荷载向结点移植的目的就是简化各单元上的受力情况，以建立单元和系统的平衡方程，也就是建立结点位移和结点荷载之间的关系式。

1.4.3 位移函数

连续体被离散后，需要用一些近似函数来描述单元物理量，如位移、应变的变化情况。用以表示单元内的位移或位移场的近似函数称为位移函数。一般来说都是选取多项式作为位移函数，原因是多项式的数学运算（积分、微分）比较容易，而且在一个单元内适当选取多项式可以得到与真实解较为接近的近似解。

1.5 有限元法程序设计

一个完整的有限元计算过程主要包括前处理、分析计算、后处理三大部分（图 1-5）。

前处理阶段主要完成模型的建立、有限元网格的剖分、结点坐标的生成、单元信息、荷载信息、材料信息、约束信息的整理等。

分析计算阶段是有限元计算的核心内容，其主要内容包括单元刚度矩阵的计算、整体刚度矩阵的叠加、约束信息的处理、荷载向量的计算、整体方程组的求解，以及单元应力、应变的计算等。

后处理阶段主要是指将有限元计算结果以图形的形式直观地表现出来，如构件的变形图、弯矩图、剪力图、轴力图，应力分布图等。

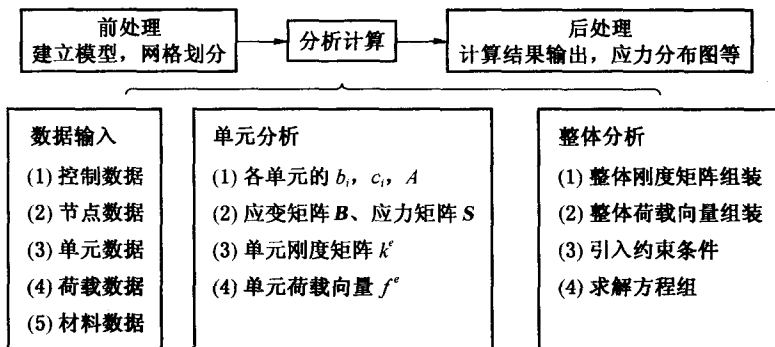


图 1-5 有限元计算过程示意图

本书主要针对有限元分析计算阶段的程序设计方法进行讨论。

Fortran 语言作为最早出现的高级程序设计语言，在工程数值计算领域发挥了巨大的作用，同样有很多有限元计算程序是采用 Fortran 语言编写的。但是 Fortran 语言作为一种面向过程的语言，尤其是有限元程序中，计算程序包含有很多复杂的数据结构，因此对现有的 Fortran 程序进行修改或扩充以满足不同的计算需要，往往要进行大量繁琐的工作。Fortran 程序的局限性主要表现在以下几个方面：

(1) 对程序的使用者要求高。尤其是有限元计算过程中，单元信息、结点信息、约束条件等，都要对总体方程组的求解产生影响，即使要对程序进行很小部分的修改，也需要对整个程序的数据结构和流程有详细的了解。

(2) 程序的重复利用率低。一个 Fortran 程序的数据结构是与其本身的计算功能密切相关的, 如果数据结构发生变化, 整个程序的计算功能就会产生问题。

(3) 小的修改会影响整个程序的很多部分, 即所谓的“牵一发而动全身”。

(4) 程序连接复杂。Fortran 程序主要采用子程序来实现模块化的设计思想, 但是所有子程序都可以对一些公用数据进行操作, 因此, 在进行程序修改或扩充时, 很难确定哪一部分对数据进行了修改。

(5) 数据的完整性不好保障。

以上 Fortran 有限元程序中存在的缺陷与不足, 阻碍了不同工程进行有限元分析的灵活性, 因此本书采用面向对象的思想, 介绍了 C++ 语言在有限元程序开发中的应用。

面向对象的程序设计方法作为一种流行的方法, 已被证明能够开发出更高效的、灵活性强的程序, 其基本思想是采用抽象的方法, 对问题域中客观存在的事物进行抽象, 形成一系列的对象, 这些对象是一组属性和在这些属性上操作的封装体, 是以面向对象方法构造系统的基本单位。一方面, 对象作为一个封装的整体, 对象以外的部分不能随意存取对象的内部属性, 从而有效地避免了外部错误对它的影响, 大大减小了查错和排错的难度; 另一方面, 当进行修改对象内部属性操作时, 由于只有少量的外部接口对外提供服务, 因此同样可减少内部的修改对外部的影响。

面向对象的设计思想主要引入了对象、类、继承以及多态等一些概念, 整个软件由一系列对象来构建, 与面向过程的程序设计方法中分离数据和函数操作不同, 对象包含了它们两者, 而类为这些对象集合的抽象, 规定了这些对象的公共状态与行为的特征。继承性与多态性是面向对象设计的另外两个重要特征, 继承性是指特殊类的对象拥有其一般类的属性和行为的类与类之间层次关系的特征。多态性是指不同对象收到相同消息时可以产生多种不同的行为方式的特征。

面向对象技术具有程序结构清晰, 自动生成程序框架, 实现简单, 可有效地减少程序的维护工作量, 代码重用率高, 软件开发效率高等优点。与面向过程程序设计方法相比具有以下一些区别:

(1) 面向过程程序设计方法采用函数(或过程)来描述对数据的操作, 但又将函数与其操作的数据分离开来; 面向对象程序设计方法将数据和对数据的操作封装在一起, 并尽可能隐藏对象的内部细节特征, 作为一个整体来处理。

(2) 面向过程程序设计方法以功能为中心来设计功能模块, 难于维护; 而面向对象程序设计方法以数据为中心来描述系统, 数据相对于功能而言具有较强的稳定性, 因此更易于维护。

(3) 面向过程程序的控制流程由程序中预定顺序来决定; 面向对象程序的控制流程由运行时各种事件的实际发生来触发, 而不再由预定顺序来决定, 更符合实际需要。

(4) 面向对象程序设计方法可以利用框架产品(如 MFC, Microsoft Foundation Classes)进行编程。

第2章 有限元法的理论基础

2.1 引言

自然界中的许多力学问题和物理现象在很多情况下都可以用偏微分方程来描述。科学计算的核心就是如何求解这些偏微分方程，但是对于绝大多数实际问题，因为定解区域和边值条件复杂，其解析解极难寻找。有限单元法根据变分原理将定解问题转化为变分问题，利用函数分片多项式插值方法对求解区域进行离散化求解其数值解，是逼近论、微分方程和泛函分析等的巧妙结合。自20世纪60年代诞生以来，伴随着计算机技术的发展，有限元法取得了巨大的进步，在求解各种实际问题方面表现出极大的优越性和生命力。本章从矩阵位移法开始，通过对变分法和加权残值法的介绍，帮助读者更进一步地理解有限元法的基本原理和计算步骤，对后面的程序设计奠定理论基础。

2.2 矩阵位移法

2.2.1 位移法的基本原理

位移法是计算超静定结构的基本方法，其基本思想是将结构拆成杆件，以杆件的内力和位移关系作为计算的基础，再把杆件组装成结构，通过各杆件在结点处力的平衡和变形的协调来建立总体平衡方程。

位移法的基本未知量为结构结点处独立的角位移和线位移，与超静定次数无关，因此位移法也可解静定结构。杆件自由端和滑动支承端的线位移及铰接端的角位移不作为基本未知量，组合结点（半铰）处的角位移应视为基本未知量，刚性梁结点处转角视为已知位移。待求结构中若有静定部分，其内力可用平衡方程直接获得，其位移不作为基本未知量考虑，但弹性支座处位移要作为基本未知量。为了减少基本未知量，受弯杆件一般不考虑轴向变形。

位移法基本体系的建立采用在原结构刚结点上附加刚臂，在独立线位移方向上附加链杆的方法，从而将结构离散成具有已知形常数和载常数的单根固端杆件处理，以形成更高次超静定的位移法基本体系，附加约束数与基本未知量数相等。要恢复原结构，附加约束上的总反力应等于零，据此建立位移法典型方程，求出结点位移。

以图2-1a所示刚架为例。此刚架有一个独立的结点角位移 Z_1 和一个独立的结点线位移 Z_2 ，共两个基本未知量。在结点1处加一个刚臂，在结点2处加一个水平支撑链杆，便得到其基本结构（图2-1b）。基本结构由于加入了附加刚臂和链杆，阻止了结点1的转角和结点2的线位移，而原结构在这两点处是有位移的。因此，基本结构除了承受荷载 P 外，还应令其附加刚臂发生与原结构相同的转角 Z_1 ，同时令附加链杆发生与原结构相同的线位移 Z_2 ，这样二者的位移就完全一致了。由此可见，基本结构在结点位移 Z_1 、 Z_2 和荷载 P 的共同作用下，刚臂上的附加反力矩 R_1 和链杆上的附加反力 R_2 都应等于零。设

由 Z_1 , Z_2 和荷载 P 所引起的刚臂上的反力矩分别为 R_{11} , R_{12} 和 R_{1P} , 所引起的链杆上的反力分别为 R_{21} , R_{22} 和 R_{2P} , 根据叠加原理, 上述条件可写为

$$\begin{cases} R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

再设以 r_{11} 和 r_{12} 分别表示由单位位移 $\bar{Z}_1 = 1$ 和 $\bar{Z}_2 = 1$ 所引起的刚臂上的反力矩, 以 r_{21} 和 r_{22} 分别表示由单位位移 $\bar{Z}_1 = 1$ 和 $\bar{Z}_2 = 1$ 所引起的链杆上的反力, 则式 (2-1) 又可写为

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

此方程称为位移法基本方程, 也叫位移法的典型方程, 它实质上反映了原结构的平衡条件, 求解此方程组, 就可得到结点 1 的转角 Z_1 和结点 2 的线位移 Z_2 。

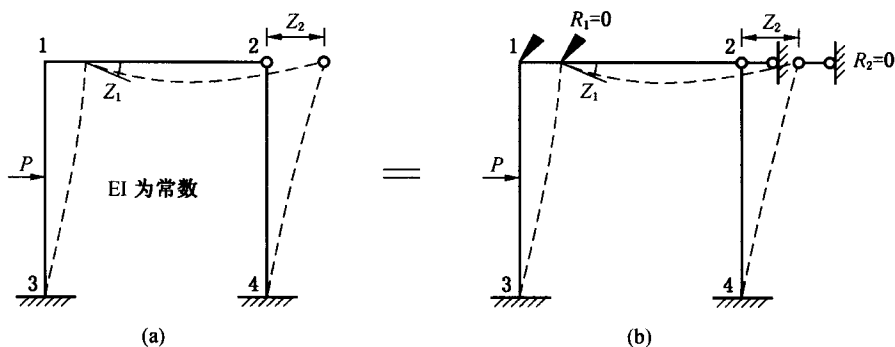


图 2-1 简单刚架示意图

对于具有 n 个独立结点位移的刚架, 相应的在基本结构中需加入 n 个附加连接, 根据每个附加连接的附加反力矩或附加反力为零的平衡条件, 同样可以建立 n 个方程。

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + \cdots + r_{1i}Z_i + \cdots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ r_{i1}Z_1 + \cdots + r_{ii}Z_i + \cdots + r_{in}Z_n + R_{iP} = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ r_{n1}Z_1 + \cdots + r_{ni}Z_i + \cdots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

其中, r_{ii} 为刚度系数; R_{iP} 为自由项; Z_i 为未知量。

写成矩阵形式:

$$K\Delta = P \quad (2-4)$$

式中, K 为结构刚度矩阵; Δ 为未知位移列阵; P 为广义荷载反力列阵。

位移法方程实际上是每个刚结点处与转角相应的力矩平衡方程和与独立结点线位移相应的截面平衡方程 (力的投影方程), 平衡方程的个数与基本未知量的个数相等, 可解出全部基本未知量。

[例 2-1] 用位移法计算图 2-1 所示刚架, 并绘制弯矩图, $E =$ 常数。

解

(1) 取基本体系。如图 2-1a、图 2-1b 所示, 设结点 1 转角为 \bar{Z}_1 , 结点 2 水平位移

为 Z_2 , 分别作 $Z_1=1, Z_2=1$ 以及荷载 P 作用下的 \bar{M}_1 图、 \bar{M}_2 图、 M_p 图 (图 2-2a, b, c)。

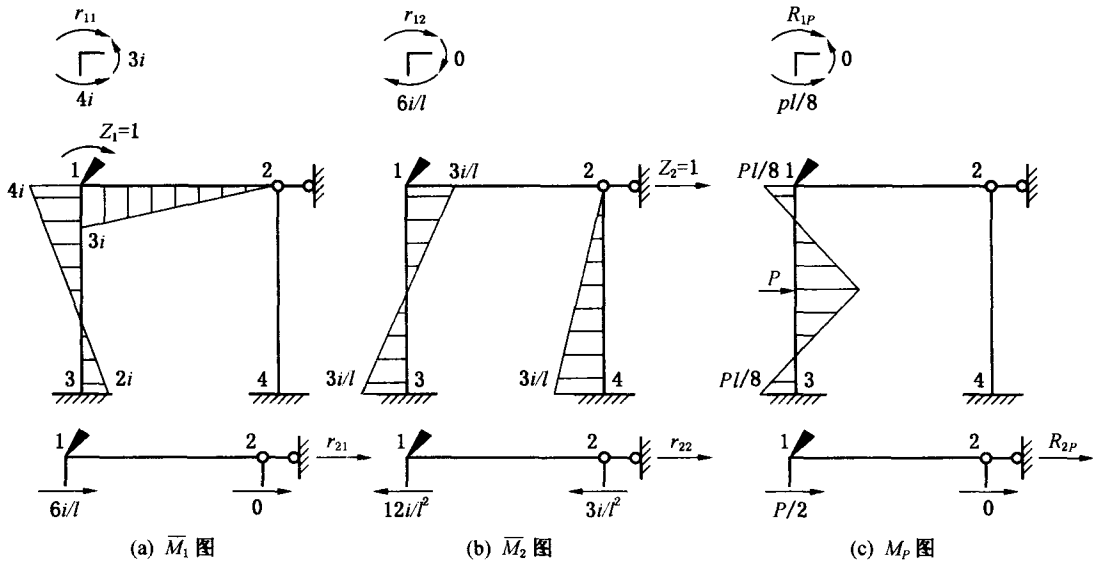


图 2-2 \bar{M}_1 图、 \bar{M}_2 图、 M_p 图

(2) 计算系数及自由项。取结点 1 为隔离体, 由力矩平衡方程 $\sum M_1 = 0$, 可得

$$r_{11} = 4i + 3i = 7i, \quad r_{12} = -\frac{6i}{l}, \quad R_{1P} = \frac{Pl}{8}$$

对于链杆反力, 可取两柱顶端截面以上的横梁为隔离体, 由 $\sum F_x = 0$, 可得

$$r_{22} = \frac{12i}{l^2} + \frac{3i}{l^2} = \frac{15i}{l^2}, \quad r_{21} = -\frac{6i}{l}, \quad R_{2P} = -\frac{P}{2}$$

(3) 构造平衡方程。将以上系数代入位移法典型方程, 得

$$\left. \begin{aligned} 7iZ_1 - \frac{6i}{l}Z_2 + \frac{Pl}{8} &= 0 \\ -\frac{6i}{l}Z_1 + \frac{15i}{l^2}Z_2 - \frac{P}{2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解以上方程组可得

$$Z_1 = \frac{9Pl}{552i}, \quad Z_2 = \frac{22Pl^2}{552i}$$

(4) 绘制弯矩图。结构最终弯矩图可由叠加法按下式计算:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p$$

绘制结构在荷载作用下的弯矩图 (图 2-3)。

综上所述, 位移法的解题步骤可概括如下:

(1) 确定基本未知量, 即独立的结点角位移和线位移数目, 加上附加约束形成基本结构;

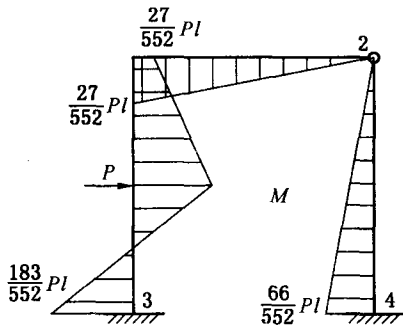


图 2-3 弯矩图

(2) 令各附加联系发生与原结构相同的结点位移，根据基本结构在荷载和各结点位移共同作用下各附加联系上的反力矩和反力均等于零的原则，建立位移法基本方程；

(3) 绘制基本结构的 \overline{M}_i 图、 M_p 图，由平衡条件求各系数和自由项；

(4) 解位移法方程，求结点位移 Z_i ；

(5) 按 $M = \sum \overline{M}_i Z_i + M_p$ 计算杆端弯矩，叠加得最后弯矩图。

2.2.2 矩阵位移法的计算过程

结构矩阵分析方法是电子计算机进入结构力学领域而产生的一种方法，它是以传统结构力学作为理论基础，以矩阵作为数学表达形式，以电子计算机作为计算手段，三位一体的方法。即

矩阵位移法 = 位移法（原理）+ 矩阵（表达）+ 电算（程序）

矩阵位移法是有限单元法的雏形，因此结构矩阵分析也称为杆件结构的有限元法，它的基本思想是；先把整体结构拆开，分解成若干个单元，即离散化，对于杆件结构一般可以把每个杆件取做一个单元。然后再将这些单元按照一定的条件集成整体。从 [例 2-1] 可以看出，矩阵位移法的计算主要包含两个环节：一是单元分析；二是整体分析。

单元分析的任务是建立单元的刚度方程，形成单元的刚度矩阵；整体分析的主要任务是将单元集成整体，由单元刚度矩阵按照集成规则形成整体刚度矩阵，建立整个结构的位移法基本方程，从而解出基本未知量。

1) 局部坐标系下单元刚度矩阵

对于平面刚架结构中的杆件一般都处理成单跨超静定梁，因此也称为梁单元。如图 2-4 所示，取局部坐标 $\overline{x}\overline{y}$ ，其中 \overline{x} 轴与杆轴线重合，在局部坐标系中，单元的每个结点有 3 个杆端位移，因此梁单元有 6 个杆端位移量 $\overline{\Delta}^e$ ，即 6 个自由度；与位移对应，每个梁单元也有 6 个杆端力分量 \overline{F}^e 。

$$\overline{\Delta}^e = (\overline{u}_1 \quad \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_2)^{eT} \quad (2-5)$$

$$\overline{F}^e = (\overline{F}_{x1} \quad \overline{F}_{y1} \quad \overline{M}_1 \quad \overline{F}_{x2} \quad \overline{F}_{y2} \quad \overline{M}_2)^{eT} \quad (2-6)$$

式中， \overline{F}_{xi} 为 i 节点在 x 方向的杆端力； \overline{F}_{yi} 为 i 节点在 y 方向的杆端力； \overline{M}_i 为 i 节点处的弯矩； \overline{u}_i 为 i 节点在 x 方向的线位移； \overline{v}_i 为 i 节点在 y 方向的线位移； $\overline{\theta}$ 为 i 节点处的转角 ($i=1, 2$)。

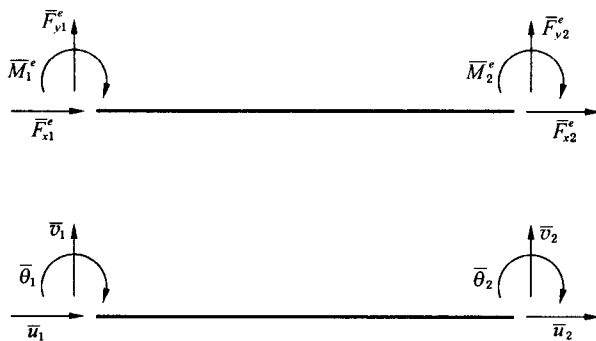


图 2-4 梁单元