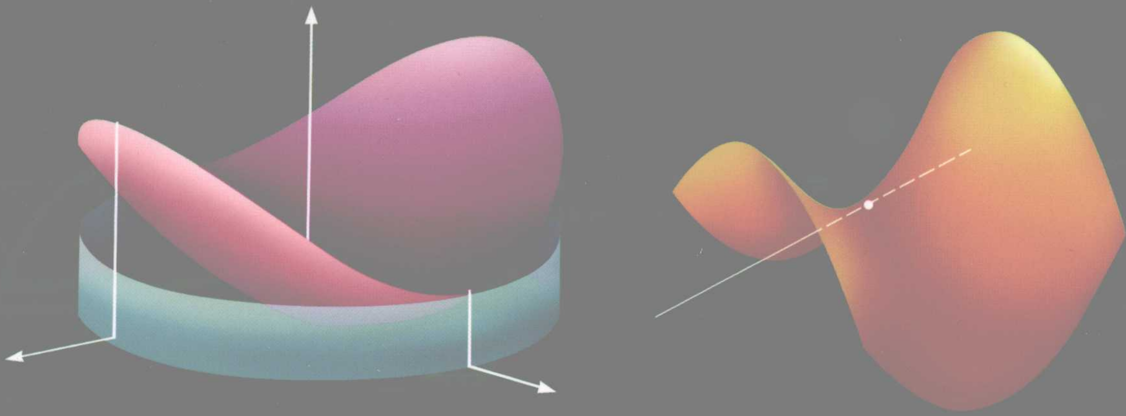

21世纪高职高专数学系列规划教材

高等应用数学

高等应用数学
学习指导与技能训练

翁方愚　何闰丰　主编

本教材特色：

1.编写原则：以应用为目的，必需、够用为度

2.紧密联系生产、生活实践，从生产、生活实例导入数学概念

3.内容简明易懂，注重数学概念、定理和公式的理解、应用

4.加强知识性、趣味性，培养数学思想和数学素养

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高职高专数学系列规划教材

高等应用数学·高等应用数学学习指导与技能训练

主　编　翁方愚　何闰丰
副主编　高玉芹　王　莉　包玉娥　王　清
主　审　彭　涓

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

前　言

本书是与翁方愚、何闰丰主编的主教材《高等应用数学》配套的学习指导与技能训练用书. 目的是使学生通过对教材内容的反思和深化,理清知识脉络,掌握基础知识和常用的数学方法,提高分析问题和应用数学知识解决实际问题的能力.

本书按照教材的顺序,以节为单位进行编写. 每章内容包括本章学习要求、各节重点难点归纳、分节习题、本章小结、本章检测题等组成. 此外,还编有期中、期末测试题、总复习题.

本书所选的习题,突破了过去的纯数学的应试性训练模式. 注重基础知识、基本方法;注重数学在生产、生活中的应用,为学生在专业课程学习和生产实践中应用数学做准备.

本书由中国铁道出版社李小军策划,柳州运输职业技术学院翁方愚、何闰丰任主编,山东服装职业技术学院高玉芹、泰山职业技术学院王莉、内蒙古民族大学包玉娥、泰山医学院王清任副主编. 兰州石化职业技术学院彭涓任主审. 参加编写的还有柳州运输职业技术学院罗柳容.

限于编者水平,书中难免存在各种错误和不足之处,请读者提出宝贵意见和建议.

编　者

2007. 6

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章学习要求

一、概念与理论

1. 函数、极限、连续是本章最重要的概念，也是全书最重要的几个概念中的三个，应尽量深刻理解.

2. 理解：基本初等函数、复合函数、初等函数和分段函数的概念，无穷小与无穷大的概念，无穷小的性质，函数的极限与无穷小的关系.

3. 了解：函数的左、右极限，无穷小量比较的含义.

4. 知道：初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

二、计算与应用

1. 熟练掌握：复合函数的分解，极限的四则运算法则，两个重要极限.

2. 掌握：比较简单问题的函数关系式的建立，利用函数的连续性求函数的极限.

3. 会或能：求无穷递缩等比数列的和.

三、通过函数中常量与变量、极限中有限与无限的学习，培养辩证唯物主义观点.

分节指导及练习

第一节　函数与初等函数

一、函数概念

1. 函数反映了变量间的确定性关系，即对于自变量的每一个值，因变量 y 总有确定的值与之对应.

2. 由于函数的独立要素有两个：定义域与对应法则，所以判断两个函数是否是同一个函数，必须从这两方面去考虑. 两方面完全一致才能是同一个函数，即使只有细小差异也不能认为是同一个函数. 比如 $y=f(x)=1$ 与幂函数中 $\alpha=0$ 时的函数 $y=f(x)=x^0=1(x\neq0)$，仅仅相差一个点，就不是一个函数.

3. 对于函数记号 $f(x)$ 初学者可能不习惯，可以把它看作"x 的函数"的符号表示，绝对不能理解为 f 乘以 x.

函数记号 $f(x)$ 有双重意思：可以表示一个函数，也可以表示函数的值.

二、分段函数

分段函数是一个崭新的概念，初次接触应注意以下几点：

1. 分段函数是一个函数，只不过在不同的取值范围有不同的表达式，不能理解为几个函数.

2. 求函数值时应把自变量的值代入相应取值范围的函数表达式进行计算. 作图像时应在定义域的各部分区间上分别画出. 注意各部分区间的端点的情况.

3. 分段函数一般不是初等函数，判断一个分段函数是不是初等函数，就看能不能经过恒等变形后，把这个分段函数用一个式子来表示. 这是一个很不容易的问题，因为你不能转化，不等于别人也不能转化，而要证明不能转化为用一个式子表示，一般来说这是比较困难的. 读者不必在这方面多花时间与精力.

三、基本初等函数

对基本初等函数的定义域、值域、图像和特性应当熟记，它是今后学习的基础.

四、复合函数

1. 在复合函数中最应注意的问题是关于定义域的问题. 设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 D，则必须有 $D_1 \supset D$.

2. 复合函数分解时，分解到何时为止？要拆到每部分都是简单函数，所谓简单函数就是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算构成的函数.

3. 复合函数的复合过程是由里到外，而分解过程则是由外往里.

习题 1-1

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\cos^2(3x+1)$ 的复合过程是(　　)

(A) $y=u^2, u=\cos v, v=3x+1$　　(B) $y=\cos^2 u, u=3x+1$

(C) $y=u^2, u=\cos(3x+1)$　　(D) $y=\cos^2 u, u=\cos v, v=3x+1$

2. 设函数 $f(x)=x^2$，函数 $\varphi(x)=2^x$，则 $f(\varphi(x))=$(　　)

(A) 2^{x^2}　　(B) x^{2x}　　(C) x^{2^x}　　(D) 2^{2^x}

3. $f(x)=\sin x$ 则 $f(-\cos\pi)$ 的值是(　　)

(A) 1　　(B) 0　　(C) $\sin 1$　　(D) $\sin(-1)$

二、填空题

1. 若$f(x)=x(x+2)$，则$f(2)=$______.
2. 若$f(x)=2+x, g(x)=x^3$，则$f(g(x))=$______，$g(f(x))=$______.
3. 设函数$f(x)=\begin{cases} a+x & \text{当 } x<0 \\ 4+x^2 & \text{当 } x\geqslant 0 \end{cases}$，且$f(-2)=6$，则$a=$______.

三、解答题

1. 求函数$y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$的定义域.

2. 求函数$y=\arccos\sqrt{2x}$的定义域.

3. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过50kg时，按基本运费计算，每公斤收费0.30元；当超过50kg时，超过部分按每公斤按0.45元收费. 试求行李费（单位：元）与重量x（单位：kg）之间的函数关系式，并作出该函数的图像.

4. 一架飞机A，中午12时从某地以400km/h的速度朝北飞行. 一小时后，另一架飞机B从同一地点起飞，速度为300km/h，方向朝东. 如果两架飞机飞行高度相同，不考虑地面表面的弧度和阻力，问这两架飞机在时刻t（飞机B起飞的时刻为0）相距多远？

5. 有一边长为a的正方形铁片，从它的四个角截去相等的小正方形，然后折起各边，做成一个无盖的小盒子，求它的容积与截去的小正方形边长之间的函数关系，并指

明定义域.

6. 一个物体作直线运动,已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比,但方向相反.当物体以 1m/s 的速度运动时,阻力为 1.96×10^{-2}N,试建立阻力与速度之间的函数关系.

7. 已知水渠的横断面为等腰梯形,倾斜角 $\varphi=40°$(如图 1-1),$ABCD$ 叫做过水断面(即垂直于水流的断面),$L=AB+BC+CD$ 叫做水渠的湿周.当过水断面的面积为定值 S_0 时,求湿周 L 与水渠深 h 之间的函数关系式,并指明定义域.

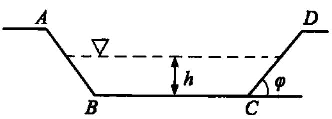

图 1-1

8. 设商品的需求量与价格之间的关系为线性关系,当 $p=2$ 时 $Q=3$;当 $p=4$ 时 $Q=34$. 求该商品的需求函数.

9. 某市某天对鸡蛋的需求函数为 $Q=65-9p$,供给函数为 $Q=5p-5$(单位:Q 为 t,p 为元/kg)

求出均衡价格,并求出此时的需求量.

第二节 极 限

极限是高等数学的基础，微积分的很多内容如导数、定积分等都是特定意义下的极限，因此必须很好理解和掌握这个概念.

一、极限的概念

1. 数列的极限

(1)数列极限是研究数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时，x_n的变化趋势，因此，它的极限状况与数列的前面有限项的取值情况无关，也与x_n是否等于a无关.

(2)从图像上看，数列的极限就是看数轴上代表数列每一项的点，最终能否“聚集”到一个定点a的附近，并且与a的距离要多小有多小. 如果能，则是有极限；如果不能，则是极限不存在. 由此也可看到极限不存在的两种情况，一种是虽然有很多点“聚集”到a的附近，但不论n多大，总还有点x_n与a的距离不能任意小；另一种是点x_n越走越远，最后无影无踪.

2. 函数的极限

(1)由于自变量x的变化方式一般可分为两种即：$x\to\infty$和$x\to x_0$，所以函数的极限也有两种类型：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(2)在研究函数$f(x)$在$x\to x_0$时的极限时，与函数$f(x)$在x_0的值无关，甚至$f(x)$可以在x_0无定义.

(3)掌握函数极限与函数左、右极限的关系，即：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A$$

(4)函数的极限与自变量的趋向密切相关，即使同一个函数在自变量的不同趋向下，也往往有不同的极限或者极限不存在，例如$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to1}e^x=e$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$

二、求极限的方法

基本方法是运用极限的运算法则，特别方法有下面一些：

1. 利用函数的连续性求极限.

设$f(x)$是初等函数，定义域为(a,b)，若$x_0\in(a,b)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

由于求函数值一般不需要技巧，因此，这种求极限方法非常容易掌握，它是求极限的首选方法.

2. 利用无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小性质求极限.

3. 利用无穷小量与无穷大量的倒数关系求极限.

4. 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$求极限.

5. 计算分式的极限时，如果分子与分母的极限都为 0，则基本方法是：①考虑运用 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 来求极限；②采用分解因式以后约分的方法；③分子与分母同乘以分子（或分母）的有理化根式以后，再求极限.

6. 当 $x\to\infty$ 对于有理分式的极限有下面的结论（$a_0\neq 0, b_0\neq 0$）：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

记住几个常用的基本极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$（$C$ 为常数）；$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0.$（$\alpha>0$）

习题 1-2(1)

一、选择题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$ 等于（　　）（$q\in\mathbf{R}$）

（A）0　　（B）1　　（C）0 或者 1

（D）极限是否存在由 q 的值确定

2. 数列 $1,\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\cdots$ 的前 n 项和的极限是（　　）

（A）1　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）2　　（D）不存在

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　　）

（A）必有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$　　（B）没有定义

（C）必有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不一定等于 $f(x_0)$　　（D）可以没有定义

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ 是（　　）

（A）-1　　（B）1　　（C）-1　　（D）不存在

二、填空题

1. 设 $f(x)=\ln(1+\mathrm{e})$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 1-0}\arcsin x=$______；$\lim\limits_{x\to -1+0}\arccos x=$______；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\arctan x=$______；

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{arccot} x =$ ______.

3. 若 $f(x)=\begin{cases} -x & 当 x<0 \\ 0 & 当 x=0 \\ x^2 & 当 x>0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to -0} f(x) =$ ______，$\lim\limits_{x\to +0} f(x) =$ ______，于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ______.

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+3}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2^{x+1}}{3\cdot 2^x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-4x^2-3x-1}{2+3x-x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小与无穷大的概念中，注意无穷小与绝对值很小的量的区别，无穷大与绝对值很大的量的区间.

2. 无穷小与无穷大之间有倒数关系.

3. 掌握具有极限的函数等于它的极限 A 与一个无穷小量之和,即 $f(x)=A+\alpha$.

4. 在极限计算中,等价无穷小可以互相替代,以简化计算.

习题 1-2(2)

一、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时,下列变量为无穷小量的是(　　)

(A) $\sin x$　　(B) $\tan(x+1)$　　(C) $\ln x$　　(D) $\dfrac{1}{e^x}$

2. 要使 $\dfrac{1}{2x+1}$ 为无穷大量,自变量 x 的变化趋势是(　　)

(A) $x\to -\dfrac{1}{2}$　　(B) $x\to\infty$　　(C) $x\to 0$　　(D) x 可任意变化

3. 当 $x\to 0$ 时,比 x 较高阶的无穷小量是(　　)

(A) $\dfrac{x}{10^{10}}$　　(B) $3x$　　(C) $\sqrt{x}$　　(D) x^2

4. 当 $x\to\infty$ 时,下列变量中为无穷小量的是(　　)

(A) x^2-2x　　(B) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$　　(C) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(D) $x+3$

二、填空题

1. 函数 $y=1+3x$,当 $x\to$______时是无穷小量,当 $x\to$______时是无穷大量.

2. 函数 $y=x^2+4x+3$,当 $x\to$______时和 $x\to$______时是无穷小量.

3. 函数 $y=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$,当 $x\to$______时和 $x\to$______时是无穷大量.

4. 当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\dfrac{2x}{1-x^2}$ 都是无穷______量,而 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1-x^2}\right)=$______.

5. 当 $x\to\infty$ 时,3^x 和 5^x 都是无穷______量,而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{5^x}=$______.

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\arctan x}{x}$

4. 已知 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，利用等价无穷小，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sin x}{x + \sin x}$.

四、两个重要极限

对于两个重要极限的学习要求是能够熟练地运用它们来求极限，为此要把它们作为求极限的方法之一，默记在心. 如果某道题形式上接近这两个重要极限，就要有意识地试一试. 下面两点对于解题是有帮助的：(1) 为突出两个重要极限的特点，把它们写成下面的形式：$\lim\limits_{\square \to 0} \dfrac{\sin \square}{\square} = 1$，其中□表示的变量相同，且趋向于零. $\lim\limits_{\square \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\square}\right)^{\square} = e$，其中□表示的变量相同且趋向于∞.

(2) 一般来说含有三角函数的 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限可考虑运用 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ 来求；对于 1^{∞} 型的幂指数函数的极限，通常可运用 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ 来求.

习题 1-2(3)

一、选择题

1. 下列等式成立的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^3}{x^3} = 1$　　(B) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin e^x}{e^x} = 1$

(C) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$　　(D) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\arccos x)}{\arccos x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3\sec x}$ 的值是(　　)

(A) e　　(B) e^{-1}　　(C) e^3　　(D) e^{-3}

二、填空题

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2t}=$______；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=$______；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin x}=$______；$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\ln x)}{2\ln x}=$______

2. $\lim\limits_{y\to 0}(1-y)^{\frac{1}{y}}=$______；$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=$______；$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=$______；$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$______.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

第三节　初等函数的连续性

一、本节主要应掌握函数在点 x_0 连续的两个等价定义．函数在点 x_0 连续和在该点极限存在的关系；初等函数的连续性.

二、直观地说，连续就是当 Δx 很小时，Δy 也很小，这就是定义 1. 而定义 2 则是把 $x\to x_0$ 时，相应的函数值与 $f(x_0)$ 联系起来. 表面上看两者考虑问题的角度不同，但根据 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 两者就统一起来了. 这两个定义是等价的. 在以后学习导数概念时，定义 1 具有重要的作用，在判断函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性时则用定义 2 比较方便.

三、函数连续性与函数极限的关系

函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，仅研究函数在点 x_0 附近的变化趋势，与 $f(x)$ 在该点的函数值无关，甚至可以在该点无定义，也就是即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，函数在该点也可能有极限，反过来即使 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，也可能在该点极限不存在.