普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等几何

（第二版）

◎ 周兴和 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等几何

(第二版)

周兴和　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者从事高等几何教学20余年经验的结晶，主要内容包括射影平面、射影变换、变换群与几何学、二次曲线理论、几何学寻踪等. 本书科学体系严谨，内容精炼，深入浅出、语言生动，图文并茂，易教易学. 同时，本书还配备了作者授课时使用的多媒体课件，以供广大教师、学生参考.

本书可作为高等院校数学类专业本科生和专科生的教材，亦可供有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等几何/周兴和编著. —2版. —北京：科学出版社，2007

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

ISBN 978-7-03-019657-6

Ⅰ.高… Ⅱ.周… Ⅲ. 高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第126794号

责任编辑：林 鹏 王 静／责任校对：赵桂芬

责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年8月第 二 版 开本：B5(720×1000)

2007年8月第四次印刷 印张：13 1/4

印数：9 001—13 000 字数：250 000

定价：21.00元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

第二版前言

2003 年本教材正式出版以来, 竟然连获殊荣, 2004 年获得南京师范大学优秀教材奖一等奖, 2005 年被评为江苏省普通高等学校精品教材, 2006 年入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材, 同年, 作者主持的南京师范大学高等几何课程又被评为江苏省一类精品课程. 如此荣誉, 从天而降, 接踵而至, 令作者受宠若惊, 无比汗颜, 更感莫大压力. 从读者和专家那里, 作者除了感受到他们对本教材的关爱, 更感受到他们对几何学在大学数学教育中的重要性之强调, 由此又获得了巨大的动力, 投入到新版修订工作之中.

考虑到有的学校可能在大学一年级开设高等几何课程, 作为准备知识, 本次修订增加了 §1.1, 如果在二、三年级讲授, 则该节可供学生自学参考. 本次修订除了对第一版中的某些谬误作了力所能及的改正, 主要工作有两个方面, 第一是在好教易学的前提下, 对一些内容进行了进一步的严格化处理, 比如对拓广平面、齐次坐标、射影平面以及射影仿射平面等内容的修改, 有的章节几乎是全部重新写作. 然而, 就教材而言, 好教易学与严格化是一对矛盾, 要处理好这对矛盾颇不容易. 第二是适当选择增加了一些习题, 其中不乏作者在教学实践中创造的题目. 根据教学实际, 书中加“*”号和用小字排印的部分可以不作要求, 因此所需教学学时不会超过第一版. 为方便阅读, 本次修订增加了前四章的索引.

从本书的讲义到第一版, 再到本次修订, 作者深深地感到, 写好一本教材是多么地困难. 尽管经过第一版使用几年的思考, 加之本次修订切实花了一番功夫, 但是限于水平, 谬误及不当仍在所难免, 敬请读者和同行批评指正, 以期今后继续修订完善.

数十年教学实践的体会使得作者不愿意出版与本教材配套的习题解答. 但是, 与本教材配套, 作者编有《高等几何习题课讲义》、《高等几何试题素材库》等两份资料, 仅向任课教师提供, 老师们可以登录南京师范大学高等几何精品课程网站联系索取事宜.

随同教材出版的光盘是本课程的多媒体教学课件, 经过作者在多年教学实践中不断修改, 针对数学课堂教学的特点, 基本实现了模拟板书的效果, 其中还附有一些供课前演示的有趣动画, 既希望能帮助学生自学, 也希望能为任课教师制作多媒体课件提供一些基础和素材.

在教材第一版正式出版后, 各地高校使用本教材的教师、南京师范大学数学类专业的本科生等都对本教材提出过不少建设性的意见. 特别是上饶师范学院的熊

华平教授、南京师范大学的陈二才、杨明升教授等都曾就教材修改与作者进行过专门的讨论，使作者受益颇深. 作者谨向他们表示衷心的感谢!

教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会的专家们对作者给予过很多的鼓励，科学出版社的林鹏先生、胡华强先生和王静女士对本教材的再版付出了辛勤的劳动，作者谨向他们表示衷心的感谢!

周兴和

2007 年 7 月

于南京师范大学随园

第一版前言

高等几何是高等院校数学类专业的重要基础课之一，与数学分析、高等代数一起，被称为“前三高”．本课程的主旨在于拓展读者的几何空间知识，学习变换群观点，进而达到训练理性思维的能力，增强数学审美意识，提高数学修养的目的，为读者进一步的数学学习和未来的几何学教学与研究打下良好的基础．

编者有着为高校全日制和成人教育数学类专业讲授高等几何 20 余年的经历，在教学中积累了不少收获和体会．本教材的编写动力主要来自两个方面：一是高等学校教育教学改革的需要，多年来，学时越胀越多，教材越写越厚，不同课程之间联系淡薄，这已经成为培养创新人才的一大障碍，必须要精简学时，更新教学内容，让学生有更多的自我学习时间和更大的自我思考空间．学时减下来之后，就必须认真研究教什么和如何教，本教材力图在这方面做些尝试．第二个动力是，在编者多年的教学中，尽管从不少教材中吸取了很多教益，但是对各教材也都有不满足感，因此想对教学内容改革做一些尝试．为此，我重新阅读了每一次的讲稿，从中搜寻闪光点，对内容、材料、例题、习题尤其是科学体系进行重新审视，力求做到理论系统严格而又简洁明快，浅显易懂．

本教材的前四章为课堂教学内容，以平面射影几何为主，同时介绍 Klein 变换群观点．当然，作为高等几何课程，除了系统介绍射影几何知识、变换群思想而外，还应该对非欧几何以及几何基础等作一些介绍．作为这方面的改革尝试，我们增加第五章“几何学寻踪”，既讲述历史、介绍著名数学家，也介绍一些几何学知识，作为学生的课外阅读材料．本教材是南京师范大学“十五”重点建设的教材之一，已在南京师范大学等校经过全日制教学和成人教育教学多次试用，这次出版前又根据试用情况作了一些必要的修订，编者授课用的电子教案也随同教材一并出版发行，希望能够对使用本教材的教师和学生起一定的帮助作用．

任何教材都会不同程度地限制教师和学生的创造力，因此教材只能是一个教学蓝本，是提供教师和学生进行再创造的一个平台．此外，本教材也必然存在一些错误和疏漏之处，恳请读者和使用本教材的教师给予批评指正，以便进一步修改、完善．

编者首先要感谢南京师范大学教学委员会“十五”重点教材评审委员会的专家们，谢谢他们评审中提出的宝贵意见；在本教材编写思想的形成初期，上饶师范学院的熊华平教授、南京师范大学的卞桂云、管义桂教授等曾与编者进行过许多建设性的讨论；在本教材编写过程中，编者曾获得南京师范大学数学与计算机科学学院的

陈怀惠、杨润生、李君华、高洪俊、叶惟寅、涂荣豹教授等给予的帮助, 杨明升副教授使用本教材授课并对编写工作提出了修改建议; 南京师范大学数学与应用数学专业 1999 级、2000 级不少本科生对本教材提出过一些好的意见, 在教材出版之际编者对他们一并表示感谢. 科学出版社的林鹏、杨波等先生对本教材的编写出版给予了热情的关心, 尤其是杨波先生为本教材的出版付出了大量辛勤的劳动并提出了不少有益的建议, 编者谨向他们表示衷心的感谢.

编　者

2003 年 5 月

于南京师范大学随园

目　录

第一章　射影平面

本章首先引入变换的概念, 以概览的方式, 讨论几个基本的几何变换. 然后, 从初等几何平面的拓广开始, 定义射影平面, 引进齐次坐标、对偶原则等概念, 并给出 Desargues 透视定理, 是学习平面射影几何的基础.

§1.1　引　　论

用几何变换的方法研究问题, 是高等几何的基本思想. 作为准备, 本节将简要介绍有关变换的知识, 以正交变换、相似变换、仿射变换等最基本的几何变换为例, 初步体会以变换的观点研究几何学的思想方法. 在本节中, 很多结论都将直接写出而略去证明. 有些结论读者在已有的知识基础上完全可以自行证明, 而有些结论在读完本书后将不证自明.

一、变换

定义 1.1　设 A, B 为两个集合. 称形如 (a,b) 的有序偶的集合为集合 A 与 B 的**笛卡儿积**或简称**积**, 记作 $A\times B$, 其中 $a\in A, b\in B$. 即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}.$$

集合 A 与自身的积也记作 A^2.

比如, 平面上全体点的笛卡儿坐标即为实数集与其自身的积 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

定义 1.2　设 A,B 为集合, $R\subseteq A\times B$. 则称 R 为从集合 A 到集合 B 的一个**二元关系**简称**关系**.

若 $(a,b)\in R$, 则称 B 中的元素 b 为 A 中的元素 a 在关系 R 下的**像**, 而 a 称为 b 在 R 下的一个**原像**.

将关系 R 中的所有有序偶的两元素颠倒次序, 则得到 R 的**逆关系**R^{-1}, $R^{-1}\subseteq B\times A$ 为从 B 到 A 的一个关系.

定义 1.3　设 A,B,C 为集合, $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$. 则由此可确定一个从 A 到 C 的关系 T, 称为 R 与 S 的**乘积**(或合成) 关系, 记作 $T=S\circ R$, 定义为

$$T=S\circ R=\{(a,c)|存在b\in B使得(a,b)\in R且(b,c)\in S\}.$$

对于乘积 $T=S\circ R$, 我们经常略去 “$\circ$” 而直接写为 $T=SR$. 显然, 关系的乘法满足结合律, 但是一般不满足交换律.

设 $R \subseteq A^2$. 则 R 与自身的乘积 RR 记作 R^2, 类似地, $R^3 = RR^2$, $\cdots$, $R^n = RR^{n-1}$.

定义 1.4 设 R 为集合 A 到自身的一个关系.

(1) 若 $\forall a \in A$, 总有 $(a,a) \in R$, 则称关系 R 是**自反的**, 或称 R 满足**反身性**.

(2) 对于 $a,b \in A$, 若 $(a,b) \in R$ 就必有 $(b,a) \in R$, 则称关系 R 是**对称的**, 或称 R 满足**对称性**.

(3) 对于 $a,b,c \in A$, 若 $(a,b) \in R$ 且 $(b,c) \in R$ 就必有 $(a,c) \in R$, 则称关系 R 是**传递的**, 或称 R 满足**传递性**.

若 R 同时满足上述三个条件, 则称 R 为集合 A 上的一个**等价关系**.

若 R 为集合 A 上的一个等价关系, 则 R 就将 A 中的元素划分为**等价类**. 不难体会到, 集合 A 上的等价关系将 A 的元素划分为等价类的这种划分是完全的划分, 这些等价类是 A 的互不相交的子集.

比如, 集合中元素的等于关系 “=” 就是一个等价关系. 再如, 设 T 为通常的平面上所有三角形的集合. 则 “全等”、“相似” 均为 T 上的等价关系, T 中的三角形分别被依据 “全等”、“相似” 分成了等价类.

定义 1.5 设集合 A 到 B 的一个关系 R 能够使得 A 中的每个元素 a, 都属于其唯一有序偶 (a,b), 则称 R 为从集合 A 到集合 B 的一个**对应**, 也称为从集合 A 到集合 B 的一个**映射**, 或称为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**.

习惯上, 我们常用小写英文或希腊字母等来表示对应. 比如, 记 f 表示集合 A 到 B 的一个对应, 并表示为

$$f:\ A \to B.$$

若 $b \in B$ 是 $a \in A$ 在 f 下的像, 则记为

$$f:\ a \mapsto b \text{ 或 } f(a) = b.$$

由定义 1.5, 集合 A 到 B 的一个对应 f 给集合 A 中的每一个元素 a 都唯一地分配了 B 中的一个元素.

定义 1.6 设 f 为集合 A 到 B 的一个对应. 若 $\forall a,b \in A$, 只要 $a \neq b$, 就必有 $f(a) \neq f(b)$. 则称 f 为一个**单射**(injection), 或称 f 为一个从集合 A **到**集合 B **内**的对应.

定义 1.7 设 f 为集合 A 到 B 的一个对应. 若 $\forall b \in B$, 都存在 $a \in A$, 满足 $f(a) = b$. 则称 f 为一个**满射**(surjection), 或称 f 为一个从集合 A **到**集合 B **上**的对应.

定义 1.8 设 f 为集合 A 到 B 的一个对应. 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为一个**双射**(bijection), 或称 f 为集合 A 到 B 上的一个**一一对应**.

比如, 在通常的平面 π 上建立的一个笛卡儿直角坐标系 (简称笛氏直角坐标系)$O\text{-}e_xe_y$ 就是 (或者说就确定了) 一个从 π 上点的集合到实数集 $\mathbf{R}$ 与自身的积 $\mathbf{R}^2$ 的一个双射 φ

$$\varphi:\ \pi \to \mathbf{R}^2,$$

满足 $\forall P \in \pi, \varphi(P) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. 称为平面上的一个**笛卡儿坐标映射**. 所以, 说在平面上建立了一个笛氏直角坐标系, 实际上是定义了平面上点集的一个坐标映射, 或者说坐标系是一个坐标映射的具体实现. 同样地, 直线上的数轴构造 (一维笛卡儿坐标系) 是直线上点的集合到实数集 $\mathbf{R}$ 的双射.

定义 1.9 集合 A 到自身的对应 f 称为集合 A 中的一个**变换**. 如果 f 是双射, 则称 f 为集合 A 上的一个**一一变换**.

在任一个集合 A 上, 都有一个特殊的一一变换 i, 满足 $\forall a \in A$, $i(a) = a$. 称 i 为集合 A 上的**恒同变换**.

对于集合 A 上的一一变换, 显然有下列结论成立.

定理 1.1 (1) 两个一一变换的乘积是一个一一变换, 从而任意有限多个一一变换的乘积是一个一一变换.

(2) 恒同变换 i 是一个一一变换.

(3) 任一个一一变换 f 都存在逆变换 f^{-1}, f^{-1} 是一个一一变换, 且 $ff^{-1} = f^{-1}f = i$.

定义 1.10 设 f 为集合 A 上的一个一一变换. 若存在 $a \in A$, 满足 $f(a) = a$, 则称 a 为变换 f 的一个**不变元素**. 设 P 为集合 A 中的元素或子集所带有的某种性质 (或数量). 若这些元素或子集在 f 下的像仍然带有性质 (或数量)P, 则称 P 为变换 f 的一个**不变性质**(或**不变数量**), f 的不变性质和数量统称为 f 的**不变性**.

高等几何将以变换的观点讨论问题, 主要研究空间中的几何元素和几何图形在某些一一变换下的不变性.

二、正交变换

以下我们将简要介绍一些基本的几何变换.

记 π 表示初等几何中的平面也表示这个平面上全体点的集合. 我们来在点集 π 上建立变换, 通常称为**点变换**.

定义 1.11 保持平面 π 上任意两点间的距离不变的点变换 φ 称为平面 π 上的一个**正交变换**.

即若 A, B 为平面上的两个点, 且 $\varphi(A) = A', \varphi(B) = B'$, 则有 $|AB| = |A'B'|$.

我们有下面的定理.

定理 1.2 正交变换是平面 π 上的一个双射. 而且有下述结论成立.

(1) 平面上任意两个正交变换的积是一个正交变换.

(2) 平面上的恒同变换是一个正交变换.

(3) 任一正交变换的逆变换存在, 也是 π 上的一个正交变换.

于是, 正交变换不仅是 π 上的双射, 还以两点间的距离为其不变性. 由此还可以推出正交变换的其他不变性.

定理 1.3　正交变换使得平面上的共线三点变为共线三点, 不共线三点变为不共线三点, 而且保持两直线的夹角不变.

证明　设 A,B,C 为平面 π 上的三个点, φ 为平面 π 上的一个正交变换, 而且有 $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$.

若 A,B,C 共线, 且不妨假设 B 在 A,C 之间, 则有 $|AB|+|BC|=|AC|$. 由定义 1.11, 有 $|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$. 于是, A',B',C' 共线, 而且继续保持 B' 在 A',C' 之间.

若 A,B,C 不共线, 则有 $|AB|+|BC|>|AC|$, 由定义 1.11 立刻得 $|A'B'|+|B'C'|>|A'C'|$. 于是 A',B',C' 也不共线.

现在假设 A,C 在 $\angle B$ 的两边上而且异于 B. 则 A',C' 分别在 $\angle B'$ 的两边上且异于 B', 同时有 $|AB|=|A'B'|$, $|BC|=|B'C'|$, $|CA|=|C'A'|$, 即 $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$. 于是 $\angle B=\angle B'$, 即正交变换保持两直线的夹角不变. 证毕.

由上述证明还可以得到

推论 1.1　正交变换使得平面上的一个三角形变为与其全等的三角形. 进而, 正交变换使得任何平面图形变成一个可以与其完全叠合的平面图形.

所谓能够完全叠合, 在几何中我们经常使用术语“**合同**”来称呼. 推论 1.1 还说明, 正交变换将平面上的全体三角形的集合按“全等”关系划分为等价类, 进而将平面上的图形按合同关系划分为等价类.

设 $O\text{-}e_xe_y$ 为平面 π 上的一个笛氏直角坐标系. 则其本身也是一个平面图形, 显然它的像图形 $O'\text{-}e_x'e_y'$ 还是 π 上的一个笛氏直角坐标系. 所以有

推论 1.2　正交变换使得平面上的一个笛氏直角坐标系变为一个笛氏直角坐标系.

但是, 正交变换可能将一个右手系变为左手系, 因为正交变换使得两点间的距离与其对应两点间的距离相等, 并不保证在变换过程中对图形不作“**翻转**”.

定理 1.4　设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$. 则 π 上的一个点变换 φ 是正交变换 $\Leftrightarrow$ φ 具有表达式

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{cases} \text{或} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

其中 (x,y) 与 (x',y') 为 π 上任一点 P 及其在 φ 下的像点 P' 在 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标,

矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是一个二阶正交阵, 称为 φ 的矩阵.

如图 1.1 所示, 注意到点 P' 在作为坐标系 $O\text{-}e_xe_y$ 的像坐标系 $O'\text{-}e'_xe'_y$ 下的坐标仍然为 (x,y), 再设 O' 以及单位向量 e'_x,e'_y 在坐标系 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标分别为 $(a_{13},a_{23}),(a_{11},a_{21})$ 和 (a_{12},a_{22}), 利用向量知识很容易得到定理 1.4 的证明. 图 1.1 中, 左图表示右手系变为右手系, 而右图则表示右手系变为左手系.

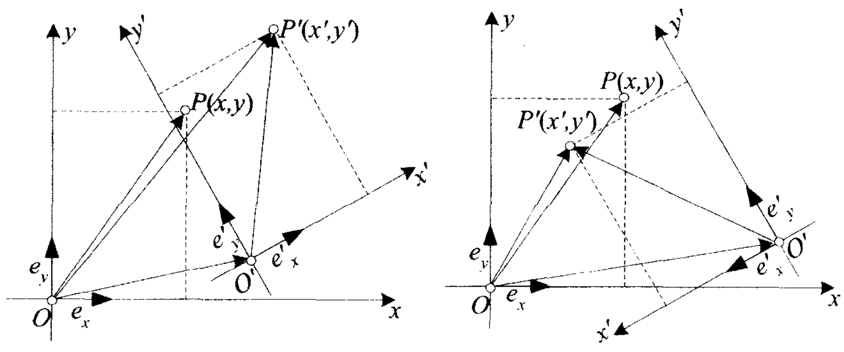

图 1.1

对于矩阵 A, 由正交阵的性质有 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$①, 于是 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$ 且 $|A|=\pm1$. 容易验证, 当 $|A|=1$ 时, φ 把一个右手系变为右手系, 而当 $|A|=-1$ 时, φ 把一个右手系变为左手系.

当然, 我们还必须证明变换 (1.1) 能够保持平面上任意两点间的距离不变, 留给读者.

当 $|A|=1$ 时, 称 (1.1) 为一个**第一类正交变换**, 也称为**刚体运动**; 当 $|A|=-1$ 时, 称 (1.1) 为一个**第二类正交变换**. 容易看出, 两个第一类正交变换的积是一个第一类正交变换; 两个第二类正交变换的积是一个第一类正交变换; 一个第二类正交变换与一个第一类正交变换的积是一个第二类正交变换.

注意到 e'_x,e'_y 仍为单位正交向量, 若设 e'_x 与 e_x 的夹角为 ϑ, 则 e'_y 与 e_y 的夹角为 $\vartheta\pm\dfrac{\pi}{2}$, 正、负号分别对应着图 1.1 的左、右图. 于是, (1.1) 可以改写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varepsilon\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \varepsilon\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},\quad \text{其中}\varepsilon=\pm1. \tag{1.2}$$

定义 1.12　将平面 π 上的每个点都沿着同一个方向平行移动相同的距离的点变换称为 π 上的一个**平移变换**, 简称**平移**.

①为避免记号混淆, 本书使用上标 T 表示向量、矩阵、行列式的转置, 而 E 表示单位矩阵.

定理 1.5 设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$, 并取定向量 $c(a_{13}, a_{23})$. 则 π 上的一个点变换 φ 为平移 $\Leftrightarrow \varphi$ 可表示为

$$\begin{cases} x' = x + a_{13}, \\ y' = y + a_{23} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

其中 $(x, y), (x', y')$ 为 π 上任一点 P 及其在 φ 下的像点 P' 在 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标.

如图 1.2, 很容易给出定理 1.5 的证明. 由定理 1.4, 1.5, 平移变换显然属于第一类正交变换.

定义 1.13 在平面 π 上取定一点 O, 将 π 上每一点都绕 O 向同一个方向旋转相同的角度的点变换称为 π 上以 O 为旋转中心的一个**旋转变换**, 简称**旋转**.

如图 1.3, 考察以坐标原点为旋转中心, 旋转角为 ϑ 的旋转变换, 利用三角函数知识, 不难得到下述结论.

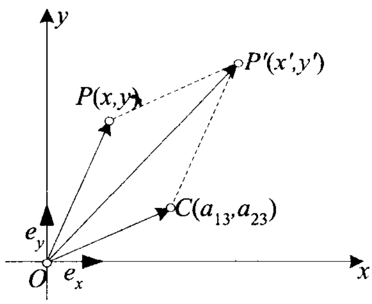

图 1.2

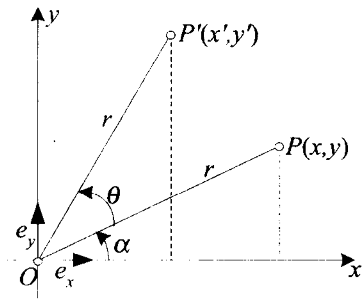

图 1.3

定理 1.6 设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$. 则 π 上一个点变换 φ 是以 O 为旋转中心, 转角为 ϑ 的旋转变换 $\Leftrightarrow \varphi$ 可表示为

$$\begin{cases} x' = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, \\ y' = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

其中 $(x, y), (x', y')$ 为 π 上任一点 P 及其在 φ 下的像点 P' 在 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标.

显然, 旋转变换属于第一类正交变换, 而且容易看出下面的结论成立.

定理 1.7 平面上的一个平移和一个旋转的积是一个第一类正交变换.

定义 1.14 设 l 为平面 π 上取定的一条直线. 将 π 上的每个点变为关于直线 l 的对称点的点变换称为 π 上的一个以 l 为反射轴的**轴反射变换**, 简称**轴反射**.

我们来考虑以坐标轴为反射轴的轴反射变换.

定理 1.8 设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$. 则一个点变换 φ 是以 x 轴为反射轴的轴反射 $\Leftrightarrow$ φ 可表示为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

一个点变换 φ 是以 y 轴为反射轴的轴反射 $\Leftrightarrow$ φ 可表示为

$$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=y \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

其中 $(x,y),(x',y')$ 为 π 上任一点 P 及其在 φ 下的像点 P' 在 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标.

显然, 轴反射变换是第二类正交变换. 轴反射使得平面上一个图形在变成其像图形的过程中作了"翻转", 因此正交变换可以把平面上的直角坐标系从右手系变为左手系.

定理 1.9 平面上的一个轴反射与一个第一类正交变换的积是一个第二类正交变换.

事实上, 从几何变换的观点来看, 欧氏几何就是研究正交变换不变性的科学.

三、相似变换

定义 1.15 设 P_1,P_2,P 为平面上共线三点. 记 (P_1P_2P) 表示由此三点构成的一个以 P_1,P_2 为**基点**, P 为**分点**的**简单比**, 定义为两个有向线段 P_1P, P_2P 的比, 即

$$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P}. \tag{1.7}$$

简单比也称为**单比**、**简比**或**仿射比**.

定义 1.16 设 O 为平面 π 上取定的一点, φ 为 π 上的一个点变换. 满足

(1) $\varphi(O)=O$;

(2) 对于 π 上异于 O 的任一点 P, φ 将 P 变为直线 OP 上一点 P', 使得 $(P'PO)=k$, 其中 $0<k\in\mathbf{R}$ 为常数,

则称 φ 为 π 上的一个以 O 为**位似中心**, 以 k 为**位似比**的**位似变换**.

定理 1.10 设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$, $k>0$ 为任意取定的实常数. 则 π 上的一个点变换 φ 是以 O 为位似中心, k 为位似比的位似变换 $\Leftrightarrow$ φ 可表示为

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=ky \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

其中 $(x,y),(x',y')$ 为 π 上任一点 P 及其在 φ 下的像点 P' 在 $O\text{-}e_xe_y$ 下的坐标.

一般地, 若位似中心不是坐标原点 O 而是平面上的一个点 $C(a_{13},a_{23})$, 则位似变换的表达式为

$$\left\{\begin{array}{l} x'=kx+a_{13}, \\ y'=ky+a_{23} \end{array}\right. \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

显然, 这是一个平移与一个以原点为位似中心的位似变换的积, 当 $k=1$ 时成为平移.

易见, 位似变换是一个双射, 但是平面上两个一般的位似变换的积不一定还是一个位似变换. 位似变换一般不再保持平面上两点之间的距离不变, 但是保持共线三点的简单比不变, 也保持任何两条线段的比值不变. 而且, 对于异于位似中心的任何两点, 位似变换使得这两点的连线与其像点的连线平行, 并使得这两线段的比值等于位似比, 从而位似变换可以保持两直线的夹角不变.

定义 1.17 设 φ 为平面 π 上的一个点变换, π 上任意的相异二点 P,Q 在 φ 下的像分别为 P',Q'. 满足

$$\frac{P'Q'}{PQ}=k \quad (0<k\in\mathbf{R}\text{为常数}) \tag{1.10}$$

则称 φ 为 π 上的一个以 k 为**相似比**的**相似变换**.

定理 1.11 相似变换是平面 π 上的一个双射, 而且以下结论成立.

(1) π 上的两个相似变换的积是一个相似变换.

(2) π 上的恒同变换是一个相似变换.

(3) π 上的任一个相似变换的逆变换存在, 仍然是一个相似变换.

当一个相似变换恰好使得其对应点的连线都经过平面上的一个定点时, 它就成为一个位似变换, 所以位似变换是相似变换的特例. 当相似比 $k=1$ 时, 相似变换成为正交变换. 因此, 若记 M, S 分别表示平面 π 上全体正交变换与全体相似变换的集合, 则 $M\subset S$.

比较相似变换与正交变换的定义可以看出下述结论成立.

定理 1.12 设在平面 π 上取定了一个笛氏直角坐标系 $O\text{-}e_xe_y$, $k>0$ 为任意取定的实常数. 则 π 上的一个点变换 φ 为相似变换 $\Leftrightarrow$ φ 具有表达式

$$\left\{\begin{array}{l} x'=k(a_{11}x+a_{12}y)+a_{13}, \\ y'=k(a_{21}x+a_{22}y)+a_{23} \end{array}\right.$$

或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$