

王后雄学案

# 教材完全解读

总策划：熊辉



修订版

## 高二数学(下)

丛书主编：王后雄

本册主编：马春华



中国青年出版社

重点难点

# 教材完全解读

高中数学



必修2

## 第二章(下)

直线与圆的位置关系  
圆与圆的位置关系



江苏教育出版社

王后雄学案

# 教材完全解读

## 高二数学(下)

主编：马春华

编委：郑晓玲 章雄钢

周建国 左建华

吴海林 胡福民

秦俭 程林

马建华 丁仁贵

姚火生 郑祥贵

刘小燕 黄光文

张莹 张新平

肖建章 王新佑



中国青年出版社

**(京)新登字 083 号**

**图书在版编目(CIP)数据**

教材完全解读. 高二数学. 下: 2007 年修订版/马春华主编. —4 版. —北京:  
中国青年出版社, 2006  
ISBN 7-5006-5529-0

I. 教... II. 马... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 113910 号

策 划:熊 辉  
责任编辑:李 扬  
封面设计:小 河

**教材完全解读  
高二数学**

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

编辑部电话:(010)64034328

北京中青人出版物发行有限公司电话:(010)64066441

聚鑫印刷有限责任公司印制 新华书店经销

889×1194 1/16 12 印张 323 千字

2006 年 9 月北京第 4 版 2006 年 10 月第 9 次印刷

印数:143001—163000 册

定价:17.70 元

本书如有任何印装质量问题,请与出版处联系调换

联系电话:(010)84035821

# 学考新捷径：《教材完全解读》

## —— 中学教材诠释学生版

在现行的教育体制下，掌握教材是学习的根本。优秀的成績源于对课堂知识的深入体会；源于对课本内容的理性认识；源于对平常知识的点滴累积。基于这种思想，X导航课研组于2003年7月隆重推出《教材完全解读》。至今已历经数次修订再版，该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

为了让您更充分地理解本书的特点，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。



### 1 重难点聚焦

考点解读——“考试解题思维”、“答题要点”，考试解题、答题技巧尽在其中！



### 2 方法·技巧平台



### 3 综合·创新拓展



### 4 能力·题型设计

掌握考试题型变化趋势，体现实践、综合、创新能力。对考试能力题型设计进行了科学的探索和最新的预测。

### 名师诠释

讲例对照、双栏排版、双色凸现“解题思维”、“解题依据”和“答题要点”，有效地理清解题思路，提高解题效率。

### 点击考点

双色凸现测试要点，方便您查阅解题依据，与讲例相互印证。

当解题无措时，建议您参照提示，在“考点解读”栏中寻找解题依据和思路。

## 教材课后习题解答

详细解答课本课后习题——课后习题完全解密！

## 答案与提示

以高考“标准答案”为准，解题科学、精炼，帮您养成规范答题的良好习惯，使您在考试答题中避免不必要的失分。

## 最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

谨此，预祝您在学习和考试中取得好成绩！

《X导航·教材完全解读》丛书主编 **王后雄**

|   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

# 读者反馈表

您只要如实填写以下几项并寄给我们，将有可能成为最幸运的读者，丰厚的礼品等着您拿，数量有限（每学期50名）一定要快呀！

您最希望得到的**礼品** **200元以下**（请您自行填写）



A



B



C

## 您的个人资料

（请您务必填写详细，否则礼品无法送到您的手中）

|                   |                             |                                                          |
|-------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------|
| 姓名：               | 学校：                         | 联系电话：                                                    |
| 邮编：               | 通讯地址：                       |                                                          |
| 职业：               | 教师 <input type="checkbox"/> | 学生 <input type="checkbox"/> 调研员 <input type="checkbox"/> |
| 您所在学校现使用的教材版本     |                             |                                                          |
| 语文：               | 数学：                         | 英语：                                                      |
| 物理：               | 化学：                         | 生物：                                                      |
| 政治：               | 历史：                         | 地理：                                                      |
| 请在右栏列举3本您喜爱的教辅（参） |                             |                                                          |
| 您发现的本书错误：         |                             |                                                          |
| 您对本书的意见或建议：       |                             |                                                          |

以下为地址，请剪下贴在信封上

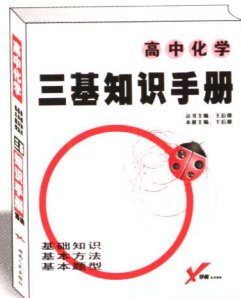
信寄：湖北省武汉市江汉区长江日报路图书大世界湖滨路11号“X导航教育研发中心”收  
邮编：430015

# X导航丛书最新图书——高考专辑



## 《课标导航·高中基础知识手册》

《语文》 《生物》  
《数学》 《政治》  
《英语》 《历史》  
《物理》 《地理》  
《化学》



## 《三基知识手册》

《语文》 《生物》  
《数学》 《政治》  
《英语语法》 《历史》  
《英语词汇》 《地理》  
《物理》  
《化学》



## 《高考完全解读大纲版》

《语文》 《生物》  
《数学》 《政治》  
《英语》 《历史》  
《物理》 《地理》  
《化学》



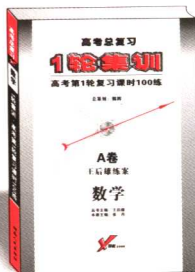
## 《高考完全解读课标版》

《语文》 《生物》  
《数学》 《政治》  
《英语》 《历史》  
《物理》 《地理》  
《化学》



## 《高考完全解读·2轮专题》

《语文》 《化学》  
《数学》文科 《生物》  
《数学》理科 《政治》  
《英语》 《历史》  
《物理》 《地理》



## 《高考总复习·1轮集训》

《语文》AB卷 《生物》AB卷  
《数学》AB卷 《政治》AB卷  
《英语》A卷 《历史》AB卷  
《物理》AB卷 《地理》AB卷  
《化学》AB卷

## 《高考解读·导航7卷》

### 第1辑——真题启航（2月出版）

展现最新高考复习动态及试题测试结果，名校名师专家诊断、科学检测复习效果。

### 第2辑——信息优化（3月出版）

汇集各地最新考试命题信息，由资深命题专家根据高考复习进度与要求，对其进行甄选、优化与重组，去伪存真，传递权威考试资讯。

### 第3辑——聚焦考纲（4月出版）

精选全国各大名校最新优秀试卷，集中展现2006年《考试大纲》继承与创新之精粹。

### 第4辑——专家押题（5月出版）

资深命题专家原创，权威预测高考试题，揭密高考命题思路，为备考提供最具价值的高考信息及科研成果。

## 涵盖以下科目

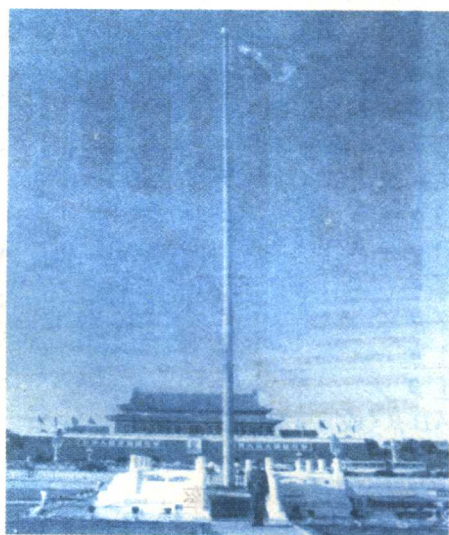
《语文》《数学》《英语》《物理》《化学》《生物》  
《政治》《历史》《地理》《文科综合》《理科综合》  
《文理大综合》



|                    |   |
|--------------------|---|
| 教材知识体系·名师学法指津····· | 1 |
|--------------------|---|

## 第九章 直线、平面、简单几何体

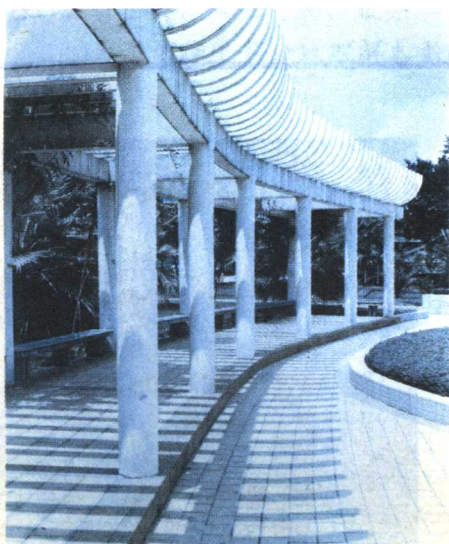
|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 9.1 平面·····                     | 3   |
| 9.2 空间直线·····                   | 8   |
| 9.3 直线与平面平行的判定和性质·····          | 16  |
| 9.4 直线与平面垂直的判定和性质·····          | 22  |
| 9.5 两个平面平行的判定和性质·····           | 30  |
| 9.6 两个平面垂直的判定和性质·····           | 36  |
| 9.7 棱柱·····                     | 47  |
| 9.8 棱锥·····                     | 55  |
| 研究性学习课题：多面体欧拉定理的发现·····         | 63  |
| 9.9 球·····                      | 68  |
| 补充材料1 空间向量及其运算（适用于B版教材读者）·····  | 74  |
| 补充材料2 空间向量的坐标运算（适用于B版教材读者）····· | 83  |
| 单元知识梳理与能力整合·····                | 95  |
| 知识与能力同步测控题·····                 | 103 |



# 目

# 录

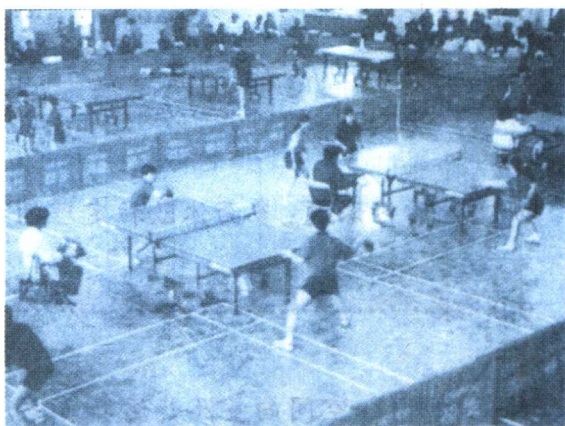
## 第十章 排列、组合和二项式定理



|                    |     |
|--------------------|-----|
| 10.1 分类计数原理与分步计数原理 | 105 |
| 10.2 排列            | 111 |
| 10.3 组合            | 119 |
| 10.4 二项式定理         | 127 |
| 单元知识梳理与能力整合        | 136 |
| 知识与能力同步测控题         | 140 |

## 第十一章 概率

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 11.1 随机事件的概率       | 141 |
| 11.2 互斥事件有一个发生的概率  | 148 |
| 11.3 相互独立事件同时发生的概率 | 153 |
| 单元知识梳理与能力整合        | 160 |
| 知识与能力同步测控题         | 165 |



|       |     |
|-------|-----|
| 期末测试卷 | 166 |
|-------|-----|

|       |     |
|-------|-----|
| 答案与提示 | 167 |
|-------|-----|

# 知识与方法

## 阅读索引

### 第九章 直线、平面、简单几何体

#### 9.1 平面

1. 平面是一个只描述而不定义的原始概念 ... 3
2. 平面的三个基本性质 ... 3
3. 熟练掌握符号语言、文字语言、图形语言的等价转化 ... 3
4. 点线共面、点共线、线共点的证明 ... 4
5. 平面个数的确定及平面把空间分成若干部分 ... 4
6. 识图与读图 ... 5
7. “有且只有”命题的证明及逻辑推理能力的提升 ... 5

#### 9.2 空间直线

1. 正确理解异面直线的概念是掌握空间两条直线位置关系的核心 ... 8
2. 平行公理、等角定理 ... 9
3. 空间两直线的位置关系的判定 ... 9
4. 异面直线的画法 ... 9
5. 直线平行的证明 ... 10
6. 异面直线的判定方法 ... 10
7. 求异面直线所成的角 ... 10
8. 异面直线的公垂线和距离的探求技巧 ... 12
9. 平移过程中的空间想象能力 ... 13
10. 求异面直线所成角的分析能力和运算能力 ... 13

#### 9.3 直线与平面平行的判定和性质

1. 应用直线和平面平行的判定定理和性质定理时必须具备的三个条件 ... 16
2. 直线与平面平行的判定方法 ... 17
3. 证明线线平行的方法 ... 17
4. 与线面平行相关的“有且只有”命题的证明方法 ... 18
5. “线线平行”与“线面平行”间的综合转化能力 ... 19

#### 9.4 直线与平面垂直的判定和性质

1. 直线与平面垂直的判定定理的证明关键、概念及符号表示 ... 22
2. 斜线在平面上的射影 ... 22
3. 直线和斜线分别与平面所成角  $\theta$  的范围 ... 22
4. 三垂线定理及其逆定理 ... 23
5. 线面垂直的判定方法 ... 23
6. 线线垂直的判定方法 ... 23
7. 求点线、点面、线面距离及斜线与平面所成

角的方法 ... 24

#### 9.5 两个平面平行的判定和性质

1. 两个平面平行的定义和判定定理 ... 30
2. 两个平面平行的性质 ... 31
3. 两个平面平行的判定方法 ... 32
4. 用“面面平行”的性质证明线面平行、线线平行的方法 ... 32
5. 面面距离的求法 ... 32
6. 空间距离的转化能力 ... 33
7. 平行关系的综合转化能力 ... 33

#### 9.6 两个平面垂直的判定和性质

1. 二面角的概念 ... 36
2. 两个平面垂直的判定和性质 ... 36
3. 面面垂直的证明方法 ... 37
4. 面面垂直性质的应用 ... 38
5. 二面角的求法 ... 38
6. 异面直线上两点间的距离公式 ... 40
7. “无棱”二面角的探求 ... 41

#### 9.7 棱柱

1. 棱柱的分类、性质及计算公式 ... 47
2. 直棱柱与正棱柱的直观图的画法 ... 48
3. 利用棱柱的概念和性质判定棱柱的方法 ... 48
4. 特殊四棱柱及其性质的应用 ... 48
5. 棱柱的侧面积、全面积和体积的求法 ... 49
6. 棱柱中的线面关系、表面上两点间距离最短问题的探求 ... 50
7. 棱柱中的截面问题 ... 50

#### 9.8 棱锥

1. 棱锥的分类、性质及计算公式 ... 55
2. 棱锥中相关元素的转换求解 ... 56
3. 棱锥中的面积计算 ... 56
4. 棱锥体积的求法、线面关系的探求 ... 57
5. 利用三棱锥的“等积性”解题 ... 58
6. 棱锥侧面展开图的应用 ... 58

#### 研究性学习课题:多面体欧拉定理的发现

1. 正多面体的性质的应用 ... 64
2. 欧拉公式的应用 ... 64
3. 以多面体为载体的计算问题 ... 65

#### 9.9 球

1. 球的概念和性质、球面距离 ... 68
2. 球的体积和表面积 ... 69
3. 截面圆的性质及其应用 ... 69
4. 球面距离的求法及球面距离的应用 ... 69
5. 球的表面积和体积的求法 ... 70

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 6. 与球相关的组合体问题的处理方法             | 70 |
| 补充材料1 空间向量及其运算(适用于B版教材读者)      |    |
| 1. 空间向量及其加减与数乘运算               | 74 |
| 2. 共线向量、共面向量                   | 74 |
| 3. 空间向量的基本定理                   | 75 |
| 4. 两个向量的数量积                    | 75 |
| 5. 空间向量的运算                     | 75 |
| 6. 点共线和点共面问题的证明方法              | 76 |
| 7. 空间向量的数量积的应用                 | 76 |
| 8. 用空间向量处理空间图形中“平行”“垂直”“求角”等问题 | 77 |
| 补充材料2 空间向量的坐标运算(适用于B版教材读者)     |    |
| 1. 空间直角坐标系、向量的直角坐标运算           | 83 |
| 2. 夹角和距离公式                     | 84 |
| 3. 空间坐标系的建立和空间一点的坐标的确定方法       | 84 |
| 4. 空间向量的坐标运算方法                 | 84 |
| 5. 空间向量的平行与垂直问题的处理方法           | 84 |
| 6. 利用向量的坐标运算求直线的夹角             | 85 |
| 7. 求线段的长度问题                    | 85 |

## 第十章 排列、组合和二项式定理

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 10.1 分类计数原理与分步计数原理     |     |
| 1. 分类计数原理、分步计数原理       | 105 |
| 2. 分类计数原理与分步计数原理的区别    | 106 |
| 3. 分类计数原理的应用           | 106 |
| 4. 分步计数原理的应用和两个原理的综合应用 | 107 |
| 5. 一类允许元素重复选取的计数问题     | 107 |
| 6. 涂色问题                | 108 |
| 10.2 排列                |     |
| 1. 排列的定义、排列数的定义和公式     | 111 |
| 2. 正确理解排列的定义           | 111 |
| 3. 排列数公式的理解            | 111 |
| 4. 简单问题的所有排列——“树型”图法   | 112 |
| 5. 无约束条件的排列应用问题        | 112 |
| 6. 有约束条件的排列应用问题        | 113 |
| 7. 解较复杂限制条件的排列问题       | 114 |
| 10.3 组合                |     |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 1. 组合的概念、组合数的公式和两个性质 | 119 |
| 2. 组合数性质的应用          | 120 |
| 3. 组合应用题             | 121 |
| 4. 几何组合应用题           | 122 |
| 5. 组合应用题中的分组问题和分配问题  | 122 |
| 6. 利用集合解决组合问题        | 123 |
| 7. 排列组合的综合应用题        | 123 |
| 8. 转化思想在排列组合应用题中的应用  | 124 |
| 10.4 二项式定理           |     |
| 1. 二项式定理、二项式系数的性质    | 127 |
| 2. 利用二项式定理的自身特征解题    | 129 |
| 3. 二项展开式的通项公式及应用     | 129 |
| 4. 二项式系数性质的应用        | 129 |
| 5. 二项式定理的应用          | 131 |
| 6. 求三项式的展开式中指定项的系数   | 132 |

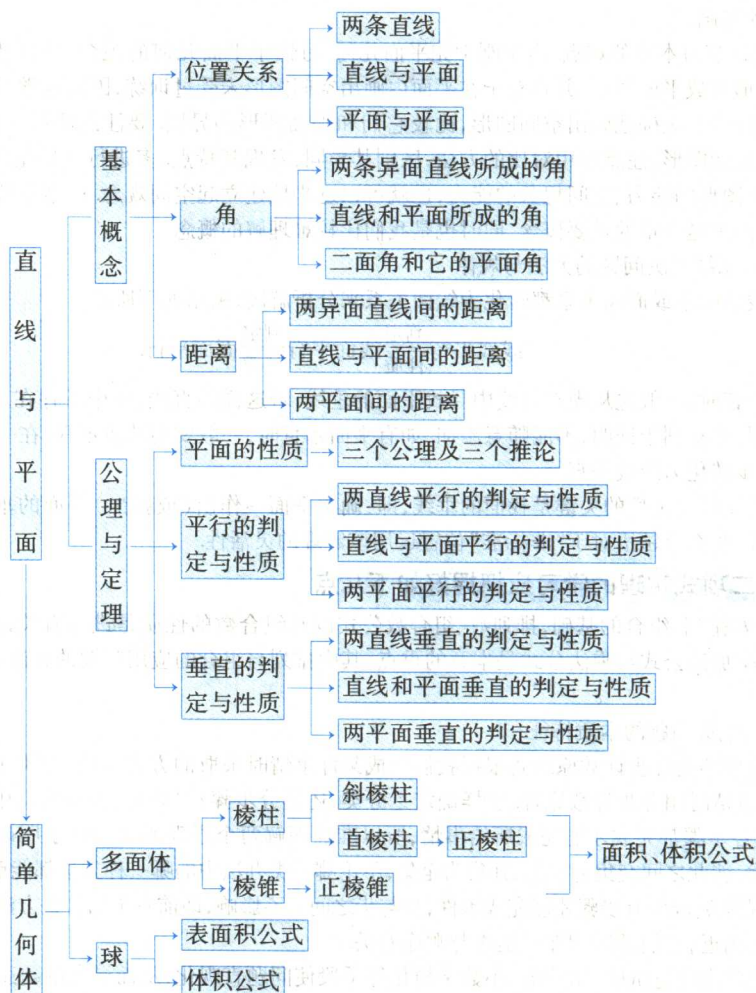
## 第十一章 概率

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 11.1 随机事件的概率                    |     |
| 1. 随机事件的基本概念、概率                 | 141 |
| 2. 等可能事件的概率                     | 142 |
| 3. 利用基本概念判断事件问题                 | 142 |
| 4. 随机事件概率和等可能事件概率的求法            | 143 |
| 5. 利用随机事件的概率解决实际问题的能力           | 144 |
| 6. 简化基本事件的方法                    | 144 |
| 11.2 互斥事件有一个发生的概率               |     |
| 1. 互斥事件的基本概念                    | 148 |
| 2. 事件 $A+B$ 的意义及其概率运算公式         | 148 |
| 3. 互斥事件, 对立事件的判定方法              | 149 |
| 4. 互斥事件的概率加法公式的应用               | 149 |
| 5. 非互斥事件和事件发生的概率                | 149 |
| 6. 利用对立事件概率公式解题                 | 150 |
| 7. 较复杂事件概率的求法                   | 150 |
| 11.3 相互独立事件同时发生的概率              |     |
| 1. 相互独立事件的相关概念                  | 153 |
| 2. 独立重复试验                       | 153 |
| 3. 基本概念的应用                      | 154 |
| 4. 相互独立事件同时发生的概率的求法             | 154 |
| 5. $n$ 次独立重复试验中某事件恰好 $k$ 次发生的概率 | 154 |
| 6. 求复杂事件概率的方法                   | 155 |

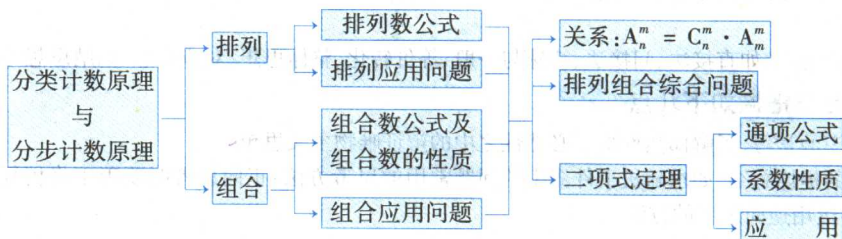
## 教材知识体系·名师学法指津

## 一、全书知识结构图解

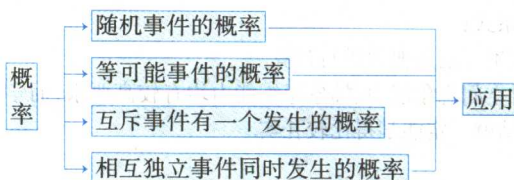
## 1. 直线与平面、简单几何知识结构图解



## 2. 排列组合二项式定理知识结构图解



## 3. 概率知识结构图解



## 二、学法指导

### 1. 对直线、平面和简单几何体的学习应把握好如下几点

(1) 本章教材的重点是平面的基本性质,空间两直线、直线与平面、平面与平面间的平行和垂直关系. 其中平面的基本性质和平面的确定,是学习本章的基础,因为当判定一个空间图形是一个平面图形后,就可以运用平面几何知识进行研究. 所以学好本章第一节是学好整章的基础.

(2) 建立空间观念是学习本章的难点. 由于刚学完平面几何,习惯于平面几何的观念,往往从平面几何的角度来理解空间图形的问题,常把空间图形看成平面图形,并且对于在平面内画出空间图形未受过训练,因而在学习中要多结合我们熟悉的事例. 要多运用模型进行分析和画图,正确地画出空间图形,比较它们和平面图形的异同. 要注意联系平面几何知识,逐步从已知引到未知,对于一些类似的性质和图形,注意应用对比的方法,区别其异同,发现其特点. 多进行从模型到图形,再从图形到模型的训练,逐步提高我们认识空间图形的能力、空间想象的能力,也就可以逐步地建立起空间观念. 就本章教材具体而言,异面直线的概念和所成的角,二面角的平面角是本章的重要概念,同时也是我们比较难理解的概念.

(3) 构建知识网络,总结解决问题的方法与规律

如:①一般来说,线线关系或面面关系都转化为线面关系来分析解决,关系如下所示:

$$\text{线线平行} \xrightarrow[\text{性质}]{\text{判定}} \text{线面平行} \xrightarrow[\text{性质}]{\text{判定}} \text{面面平行}.$$

②在证明两平面垂直时,一般先从现有直线中寻找平面的垂线,若这样的直线,图中不存在,则可通过作辅助线来解决,而作辅助线则应有理论根据,并有利于证明,不能随意添加. 如有平面垂直时,一般要用性质定理,在一个面内作交线的垂线,使之转化为线面垂直,然后进一步转化为线线垂直.

③应用三垂线定理及其逆定理的关键是找面的垂线,即:确定平面→作出(或找出)平面的垂线→找到斜线→连成射影→查找与之垂直的面内直线. 要充分领悟对于“非标准”位置运用该定理的灵活性.

### 2. 对排列组合二项式定理的学习应把握好如下几点

(1) 两个原理是学好排列、组合的基础,排列数、组合数公式以及组合数的性质是进行有关计算和论证的关键. 排列、组合与二项式定理的应用,概率加法公式与乘法公式是本章的重点,其中排列与组合的应用问题的解法、概率加法、乘法公式的使用是本章的难点.

(2) 善于思维理性,吃透问题的本质特征

①使用分类计数原理还是分步计数原理要根据我们完成某件事情时采取的方式而定,分类来完成这件事情时用分类计数原理,分步骤来完成这件事情时用分步计数原理. 怎样确定是分类,还是分步骤?“分类”表现为其中任何一类均可独立完成所给事情,而“分步骤”必须把各步骤都完成才能完成所给事情,所以准确理解两个原理的关键在于明确分类计数原理强调完成一件事情的几类办法互不干扰,彼此之间交集为空集,并集为全集,不论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成事件. 分步计数原理强调各步骤缺一不可,需要依次完成所有步骤才能完成事件,步与步之间互不影响,即前一步用什么方法不影响后一步采取什么方法.

②排列与组合定义相近,它们的区别在于是否与顺序有关.

③复杂的排列问题常常通过试验、画简图、小数字简化等手段使问题直观化,从而寻求解题途径,由于结果的正确性难以直接检验,因而常需要用不同的方法求解来获得检验.

④按元素的性质进行分类、按事件发生的连续过程分步,是处理组合问题的基本思想方法,要注意题设中“至少”、“至多”等限制词的意义.

(3) 注重数学思想的运用,如直接法、间接法、特殊与一般、等价转化、整体思想、对应思想、归纳思想等.

### 3. 对概率的学习应把握如下几点

(1) 通过对概率知识的学习,了解偶然性寓于必然性之中的辩证唯物主义思想.

(2) 注重通解通法的提炼总结. 如求随机事件概率的问题常用的思考方法:正向思考时要善于将稍复杂的问题进行分解,解决有些问题时还要学会运用逆向思考的方法.

求复杂事件的概率一般可分三步进行:

①列出题中涉及的各个事件,并用适当符号表示它们;

②理清各事件之间的关系,列出关系式;

③根据事件的属性及之间的关系准确地运用概率进行计算.

总之,本书知识板块跨度比较大,对空间想象能力、抽象思维能力均有较高要求,而学无定法,在学习过程中,只要注重基础、强化联系、构建网络、善于提炼、乐于总结就一定能够学得比较扎实.

## 第九章

## 直线、平面、简单几何体

## 9.1 平面

## 重难点聚焦

## 1. 平面的概念

(1) 平面和点、直线一样是构成空间图形的基本要素之一,是一个只描述而不定义的原始概念.

(2) 平面概念是较抽象概念,可借助于直线的概念来理解和掌握.对平面概念,抓住平面的基本特征:无限延展性,无厚度性来掌握学习.

## 2. 平面的三个基本性质

(1) 公理1反映了平面与曲面的区别,通过直线的“直”和“无限延伸”的特性,揭示了平面的“平”和“无限延伸”的特性,它是判断直线在平面内的依据,符号表示为: $A \in \alpha$  且  $B \in \alpha$ , 则直线  $AB \subset \alpha$ .

(2) 公理2说明了若两个平面相交,必交于一条直线,这是由平面的无限延展性决定的,它是确定两平面交线的依据,即先找两平面的两个公共点,再作连线.公理2也是判定两平面相交的依据,符号表示为: $A \in \alpha$  且  $A \in \beta$ , 则  $\alpha \cap \beta = a$  且  $A \in a$ , 从而可得  $A \in \alpha$ 、 $A \in \beta$  且  $\alpha \cap \beta = a$ , 则  $A \in a$ , 从而可证“点共线”“线共点”.

(3) 公理3及其三个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据,是证点、线共面的依据,也是作截面、辅助平面的依据,作辅助平面和平面几何中作辅助直线的作用是一样的,可以为解题开拓思路.

平面的基本性质是立体几何的基础内容,正确理解并熟练掌握平面的基本性质是学好立体几何的第一步,这三条基本性质是研究空间图形的理论依据.

3. 在立体几何中,常把点看做元素,直线和平面看做点集,符号“ $\in$ ”“ $\cap$ ”“ $\subset$ ”等表示点、直线、平面间的关系,与代数中意义相同,但在立体几何中,读的方法与代数中有所不同,如:“ $A \in a$ ”用数学语言表达为“点A在直线a上”;“ $A \notin a$ ”用数学语言表达为“点A在直线a外”;“ $a \subset \alpha$ ”用数学语言表达为“直线a在平面 $\alpha$ 内”;“ $a \cap b = A$ ”用数学语言表述为“直线a和b相交于点A”.要熟练掌握符号语言、文字语言、图形语言的等价转化

(1) 文字语言比较自然、生动,它能把问题所研究的对象的含义更加明确地叙述出来,我们教科书上的概念、定理等多以文字语言叙述.

## 名师诠释

◆ [考题1] 若点Q在直线b上,b在平面 $\beta$ 内,则Q、b、 $\beta$ 之间的关系可记作( ).

- A.  $Q \in b \in \beta$     B.  $Q \in b \subset \beta$     C.  $Q \subset b \subset \beta$     D.  $Q \subset b \in \beta$

[解析] 本题考查用符号表示点、线、面之间的关系,关键是弄清点与直线是元素与集合的关系,直线与平面是集合与集合之间的关系.

解法一(直接法): $\because$  点Q在直线b上, $\therefore Q \in b$ .

又 $\because$  直线b在平面 $\beta$ 内, $\therefore b \subset \beta$ ,  $\therefore Q \in b \subset \beta$ . 答案为B.

解法二(排除法): $\because$  点Q与直线b的关系是元素与集合之间的关系, $\therefore$  只能用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示,

$\therefore$  排除C和D(容易出现  $Q \subset b$  或  $b \in \beta$  等此类错误).

又 $\because$  b与 $\beta$ 是集合与集合之间的关系,

$\therefore$  应该用符号“ $\subset$ ”或“ $\supset$ ”来表示.

$\therefore$  A应该予以排除. 答案为B.

◆ [考题2] 根据下列条件画出图形:平面 $\alpha \cap \beta = AB$ , 直线  $a \subset \alpha$ , 直线  $b \subset \beta$ ,  $a \parallel AB$ ,  $b \parallel AB$ .

[解析] 学会利用平面的基本性质来作出较简单的空间图形,逐步建立和培养立体结构即空间想象能力.

图9-1-3是立体几何中常用的满足条件的图形.

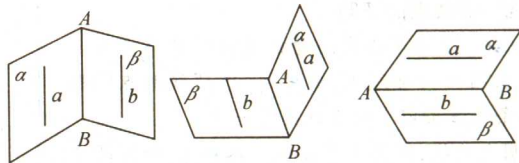


图9-1-3

◆ [考题3] 已知一条直线与三条平行直线都相交,求证这四条直线共面.

[解析] 已知  $a \parallel b \parallel c$ ,  $l \cap a = A$ ,  $l \cap b = B$ ,  $l \cap c = C$ ,

求证: $a, b, c, l$  共面.

证明: $\because a \parallel b$ ,  $\therefore a, b$  确定一个平面 $\alpha$ .

$\because l \cap a = A$ ,  $l \cap b = B$ ,  $\therefore A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ , 故  $l \subset \alpha$ .

又 $\because a \parallel c$ ,  $\therefore a, c$  确定一个平面 $\beta$ .

同理可证: $l \subset \beta$ ,  $\therefore \alpha \cap \beta = a$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ ,

$\therefore$  过两条相交直线有且只有一个平面,

$\therefore \alpha$  与  $\beta$  重合, 即直线  $a, b, c, l$  共面.

[点评] 确定平面时,用到公理3及三个推论的“存在性”.证明两平面重合时,用到公理3及三个推论的“惟一性”.要注意区别运用.

证明直线共面的一般方法有三种:一是先由两条平行或相交直线确定一个平面,再依据平面的基本性质证明其他直线在此平面内;二是先分别确定两个平面,再依据平面的基本性质证明两个平面是同一个平面(即两平面重合);三是反证法.

(2) 图形语言, 易引起清晰的视觉形象, 它能直观地表达概念、定理的本质以及相互关系, 在抽象的数学思维面前起着具体化和加深理解的作用.

(3) 各种数学语言形态间的互译可为我们在更广阔的思维领域里寻找解决问题的途径. 有利于培养我们思维的广阔性.



### 方法·技巧·平台

#### 4. 点线共面的证明

所谓点线共面问题就是指结论是几个点或几条直线在同一平面内的问题.

(1) 证明一个图形是平面图形的依据: ①如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内(公理1). ②经过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面(公理3), 及其推论.

(2) 证明一个图形是平面图形的常用的方法: ①先确定一个平面, 再证明有关点、线在此平面内. 这种方法俗称“落法”. ②过有关的点、线分别作多个平面, 再证明这些平面重合. 这种方法称为“重合法”. ③反证法.

(3) 具体操作方法:

①证明几点共面的问题可先取三点(不共线的三点), 确定一个平面再证明其他各点都在这个平面内. ②证明空间几条直线共面问题可先取两条(相交或平行)直线确定在一个平面, 再证明其余直线均在这个平面内.

#### 5. 点共线、线共点的证明

(1) 点共线: 所谓点共线问题就是证明三个点或三个以上的点在同一条直线上; 线共点: 所谓线共点问题就是证明三条或三条以上的直线交于一点.

(2) 证明点共线、线共点的依据是公理2: 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线, 也就是说一个点若是两个平面的公共点, 则这个点在这两个平面的交线上. 对于这个公理应进一步理解下面三点: ①如果两个相交平面有两个公共点, 那么过这两点的直线就是它们的交线; ②如果两个相交平面有三个公共点, 那么这三点共线; ③如果两个平面相交, 那么一个平面内的直线和另一个平面的交点必在这两个平面的交线上.

(3) 证明多点共线, 通常是过其中两点作一直线, 然后证明其他的点在这条直线上, 或者根据已知条件设法证明这些点在两个相交平面内, 然后根据公理2就得到这些点在两个平面的交线上. 证明三线共点问题可把其中一条作为分别过其余两条的两个平面的交线, 然后再证另两条直线的交点在此直线上. 此外还可先将其中一条直线看做某两个平面的交线. 证明该交线与另两直线分别交于两点, 再证这两点重合, 从而得三线共点.

#### 6. 平面个数的确定及平面把空间分成若干部分

公理3及三个推论是用来确定平面的, 对于确定平

◆【考题4】 将下面用符号语言表示的关系改用文字语言予以叙述, 并用图形语言予以表示:

$$\alpha \cap \beta = l, A \in l, AB \subset \alpha, AC \subset \beta.$$

【解析】 本题的实质是对数学三种语言——符号语言、文字语言、图形语言的互译.

文字语言叙述为: 点A在平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 的交线l上, AB、AC分别在 $\alpha$ 、 $\beta$ 内. 图形语言表示为图9-1-4.

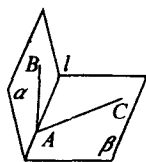


图 9-1-4

◆【考题5】 已知如图9-1-5,  $a \parallel b \parallel c, l \cap a = A, l \cap b = B, l \cap c = C$ .

求证:  $a, b, c, l$  共面.

【解析】 解法一: 先由  $a \parallel b$  确定一个平面, 然后, 证  $l, c$  都在这个平面内.

$\because a \parallel b, \therefore a, b$  确定平面  $\alpha$ .

又  $\because l \cap a = A, l \cap b = B,$

$\therefore l$  上有两点 A、B 在  $\alpha$  内, 即直线  $l \subset \alpha$ .

于是  $a, b, l$  共面.

换句话说, 若  $a, l$  确定平面  $\alpha$ , 过  $l$  上一点 B, 作  $b \parallel a$ , 则  $b \subset \alpha$ .

同理, 过  $l$  上一点 C 作  $c \parallel a$ , 则  $c$  也在  $a, l$  确定的平面内.

故  $a, b, c, l$  共面.

解法二:  $\because a \parallel b, \therefore$  过  $a, b$  确定平面  $\alpha$ .

又  $A \in a, B \in b, \therefore AB \subset \alpha$ , 即  $l \subset \alpha$ .

又  $\because b \parallel c, \therefore$  过  $b, c$  确定平面  $\beta$ ,

而  $B \in b, C \in c, \therefore BC \subset \beta$ , 即  $l \subset \beta$ .

于是  $b, l \subset \alpha, b, l \subset \beta$ , 而  $b \cap l = B$ ,

$\therefore \alpha$  与  $\beta$  重合, 故  $a, b, c, l$  共面.

解法三:  $\because a \parallel b, \therefore$  过  $a, b$  确定平面  $\alpha$ .

又  $\because A \in a, B \in b, \therefore AB \subset \alpha$ , 即  $l \subset \alpha$ .

设  $c \not\subset \alpha$  过 C 在平面  $\alpha$  内作  $c' \parallel b$ , 则  $c' \cap c = C$ .

又  $b \parallel c, \therefore c \parallel c'$  与  $c' \cap c = C$  矛盾,  $\therefore c \subset \alpha$ , 故  $a, b, c, l$  共面.

◆【考题6】 已知  $\triangle ABC$  在平面  $\alpha$  外,  $AB \cap \alpha = P, AC \cap \alpha = R, BC \cap \alpha = Q$ , 如图9-1-6. 求证:  $P, Q, R$  三点共线.

【解析】 应用公理2, 选择恰当的平面, 只要证明点都是某两个平面的公共点, 即可推出三点在两个平面的交线上.

$\because AB \cap \alpha = P,$

$\therefore P \in AB, P \in$  平面  $\alpha$ .

又  $AB \subset$  平面  $ABC$ ,

$\therefore P \in$  平面  $ABC$ .

$\therefore$  由公理2可知: 点P在平面ABC与平面 $\alpha$ 的交线上.

同理可证Q、R也在平面ABC与平面 $\alpha$ 的交线上.

$\therefore P, Q, R$  三点共线.

【点评】 证明若干点共线问题, 找出相关的平面与平面的交线, 由公理2, 说明这些点都在这两个平面的交线上即可.

◆【考题7】 如图9-1-7所示, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $B_1D$  与平面  $ACD_1$  交于O,  $BD$  与平面  $ACD_1$  交于M, 求证:  $M, O, D_1$  三点共线.

【解析】 连结  $MD_1$ , 要证O在  $MD_1$  上.

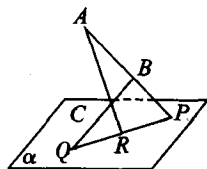


图 9-1-6

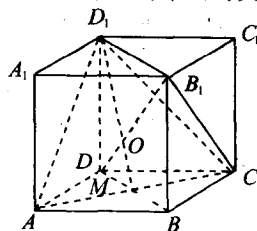


图 9-1-7

面的个数问题,这四种方法可以交互使用.如:四条线段首尾相接,它们最多可以确定多少个平面?

由推论2知,两条相交直线确定一个平面,四条线段首尾相接,最多可产生四对相交线段,因此,最多可确定4个平面.

由于平面是无限延伸的,因此一个平面可以把空间分成两个部分,两个平面可以把空间分成4个部分(两个平面相交),也可以分成3个部分(平行),三个平面可以把空间分成4个部分,也可以分成6、7、8个部分.(如图9-1-1)

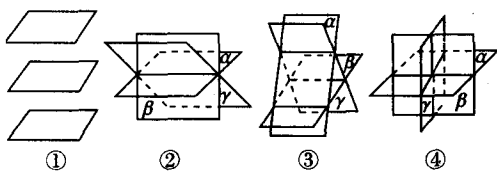


图9-1-1



### 综合·创新拓展

#### 7. 识图与读图

(1)学习立体几何开始要建立好空间概念,首先是会识图,正确的识图可以帮助我们想象各部分元素之间的位置关系.画直观图要注意虚实线,它是正确表示空间位置的关键.

(2)掌握正方形、正三角形、圆的水平放置的直观图,是今后识图、画图的基础.

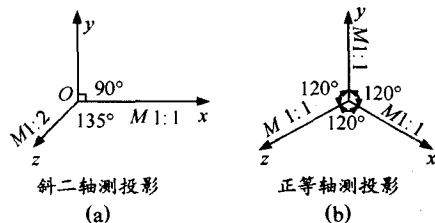


图9-1-2

(3)平面的画法是学习立体几何的最初知识,也是最基本知识.平面的画法的掌握程度影响学生对空间结构的认识,影响对空间图形的分析,也就对立体几何的今后学习产生影响,因此对平面的画法要放在重要位置上,多画一些基本的常见的空间图形的直观图,如立方体、长方体、三棱锥等,来加强画法的训练.

(4)在立体几何中应加强空间想象能力的逐步培养,学会从不同层面解决问题.

(5)平面概念的理解与深化是建立空间概念的基础,善于找到分析问题的角度是解决问题的关键.

#### 8. “有且只有”命题的证明及逻辑推理能力的提升

(1)①“有”表示存在,“只有”表示“惟一”;“且”表示联立命题,所以此类问题的证明既要证明“存在性”又要证明“惟一性”.②“存在性”的证明一般由公理或推论作出题设要求的要素即可.③证明“惟一性”通常采用

$\because MD_1$  是平面  $ACD_1$  和平面  $BB_1D_1D$  的交线,

$\therefore$  只要证  $O$  点既在平面  $ACD_1$  上,

又在平面  $BB_1D_1D$  上.

$\because O \in B_1D, B_1D \subset \text{面 } BB_1D_1D,$

$\therefore O \in \text{平面 } BB_1D_1D$ . 又  $O \in \text{面 } ACD_1,$

$\therefore O \in MD_1$ , 即  $M、O、D_1$  三点共线.

◆【考题8】如图9-1-8,在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ,  $E$  为  $AB$  中点,  $F$  为  $AA_1$  中点. 求证:  $CE、D_1F、DA$  三线共点.

【解析】  $\because EF \parallel \frac{1}{2}CD_1,$

$\therefore$  直线  $D_1F$  和  $CE$  必相交.

设  $D_1F \cap CE = P$ .

$\because D_1F \subset \text{平面 } AA_1D_1D, P \in D_1F,$

$\therefore P \in \text{平面 } AA_1D_1D$ .

又  $CE \subset \text{平面 } ABCD, P \in EC,$

$\therefore P \in \text{平面 } ABCD$ .

即  $P$  是平面  $ABCD$  与平面  $AA_1D_1D$  的公共点.

又平面  $ABCD \cap \text{平面 } AA_1D_1D = AD, \therefore P \in AD$  (公理2),

$\therefore CE、D_1F、DA$  三线共点.

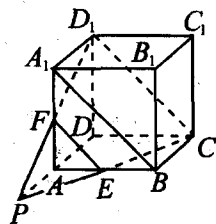


图9-1-8

◆【考题9】已知:  $a、b、c、d$  是两两平行的四条直线.

试求:由  $a、b、c、d$  四直线确定平面的个数.

【解析】应分三种情况进行讨论:①四线共面;②四线不共面,但四线中存在三线共面;③四线中无三线共面的情况.然后再利用推论3进行求解.于是:①当这四条两两平行的直线共面时,仅确定一个平面;②当这两两平行的直线中存在着三条共面,而四条不共面时,不妨设  $a、b、c$  共面,而  $d$  分别与  $a、b、c$  各确定一个平面,再加上  $a、b、c$  确定的平面,共确定四个平面;③当这四条两两平行的直线无三线共面时,  $a$  与  $b、a$  与  $c、a$  与  $d、b$  与  $c、b$  与  $d、c$  与  $d$  为六对平行直线,确定六个面.

【点评】对这类问题,要注意使用模型和用穷举法,全面考虑每一种可能情况,做到无遗漏.

◆【考题10】说出下面图形的不同之处.

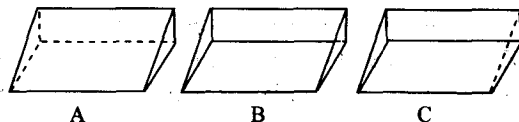


图9-1-9

【解析】图中三个图形中每个图形都是由九条线段组成的,但由于虚实线的表示不同,则反映了不同的几何体. A图是体,是三棱柱; B图是面,是矩形; C图可以看成翻转的 A图. 本题易将三个图表示的几何图形看作同一个几何体,其原因是对虚实线的意义不明确. 在立体几何中,实线表示看到的部分,虚线表示被挡住的部分.

◆【考题11】如图9-1-10,已知直线  $a \parallel$  直线  $b$ , 直线  $m$  与  $a、b$  分别交于点  $A、B$ . 求证:过  $a、b、m$  有且只有一个平面.

【解析】证明过  $a、b、m$  的三条直线有且只有一个平面,须证两个问题,其一是存在性即“有”,其二是惟一性即“只有”.

证明:  $\because a \parallel b,$

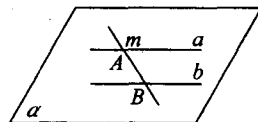


图9-1-10

“反证法”.即从题目的结论入手,反设结论的反面成立,然后进行推理、论证,推出与条件或定义、定理、公理相矛盾的结论,说明结论反面是不成立的,从而肯定了命题的结论是成立的.为什么可以用反证法去证明呢?这是因为原命题与逆否命题等效.当我们要证原命题比较困难时,就证明它的逆否命题.如:一条直线过平面内一点与平面外一点,它和这个平面有几个公共点?为什么?

这条直线和这个平面只有一个公共点.

事实上,若这条直线和这个平面有两个公共点,由公理1知,这条直线上所有的点都在这个平面内,那么这条直线过平面外的一点也在这个平面内.这与已知矛盾,故不可能再有第二个公共点.

(2)利用平面的性质、三个公理及公理3的三个推理论证点共线、点或线共面、线共点等问题.掌握这些问题论证的基本方法,从而提高逻辑推理论证能力,以上几个问题是立体几何中最基础的问题,它是今后解决较复杂的立体几何的第一步,我们必须掌握证明这类问题的一般方法.

(3)本节在高考中基本不单独考查,往往结合其他内容一起考查,将空间问题转化到同一平面上,用平面几何知识解决.

## 能力·题型设计

测试1 下列推理错误的是( ).

- A.  $A \in l, A \in \alpha; B \in l, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$   
 B.  $A \in \alpha, A \in \beta; B \in \alpha, B \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = AB$   
 C.  $l \not\subset \alpha, A \in l \Rightarrow A \notin \alpha$   
 D.  $A, B, C \in \alpha, A, B, C \in \beta$ , 且  $A, B, C$  不共线  $\Rightarrow \alpha$  及  $\beta$  重合

测试2 两条相交直线  $l, m$  都在平面  $\alpha$  内且都不在平面  $\beta$  内.命题甲: $l$  和  $m$  中至少有一条与平面  $\beta$  相交;命题乙:平面  $\alpha$  与  $\beta$  相交.则甲是乙的( ).

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

测试3 平面  $\alpha \cap$  平面  $\beta = l$ , 点  $A \in \alpha$ , 点  $B \in \beta$ , 且  $B \notin l$ , 点  $C \in \alpha$ , 又  $AC \cap l = R$ , 过  $A, B, C$  三点确定的平面为  $\gamma$ , 则  $\beta \cap \gamma$  是( ).

- A. 直线  $CR$  B. 直线  $BR$   
 C. 直线  $AB$  D. 直线  $BC$

测试4 如图9-1-11所示的直观图是将正方体模型放置在你的水平视线的左上角而绘制的,其中正确的是( ).

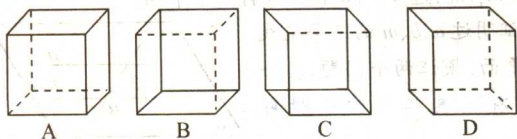


图9-1-11

$\therefore$  过  $a, b$  有一个平面  $\alpha$ .

又  $m \cap a = A, m \cap b = B$ ,

$\therefore A \in a, B \in b, \therefore A \in \alpha, B \in \alpha$ .

又  $A \in m, B \in m, \therefore m \subset \alpha, a, b, m$  共面  $\alpha$ .

反设过  $a, b, m$  有一个平面  $\beta$  异于  $\alpha$ ,

则  $a \subset \beta, b \subset \beta, a \subset \alpha, b \subset \alpha$ .

这与  $a \parallel b$ , 过  $a, b$  有且只有一个平面相矛盾.

因此,过  $a, b, m$  有且只有一个平面.

◆ [考题12] 判断下列命题是否正确:

- ①两个相交平面有不在同一直线上的三个公共点;  
 ②经过空间任意三点有且只有一个平面;  
 ③一个角一定是平面图形;  
 ④在空间两两相交的三条直线必共面.

[解析] 命题①是错误的.因为由公理2知两平面相交必交于一直线且由公理3知两平面有不在同一直线上的三个公共点.两平面必重合.命题②也是错误的.因为由公理3知只有经过空间不共线的三点才能仅有一个平面.若三点共线,则经过此三点的平面有无数多个.命题③是正确的.因为若角是平角或周角,则此时角为直线或射线为平面图形.若角不是平角或周角,角的两边必相交.而相交直线确定一平面,故角为平面图形.命题④是错误的.两两相交的三直线可能相交于一点,此时三直线未必共面,只有当三直线两两相交且不共点时三直线才共面.

## 点击考点

测试要点

3(1)

测试要点3(3)、

5

测试要点

3(3)、5

测试要点3(1)、

(2)

测试要点3

测试要点

3(2)

测试要点4、6

测试要点

3(3)、

5

测试要点8

测试要点3(2)、

6

测试要点5

测试5 如图9-1-12所示,  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是长方体,  $O$  是  $B_1D_1$  的中点, 直线  $A_1C$  交平面  $AB_1D_1$  于点  $M$ , 则下列结论错误的是( ).

- A.  $A, M, O$  三点共线  
 B.  $A, M, O, A_1$  四点共面  
 C.  $A, O, C, M$  四点共面  
 D.  $B, B_1, O, M$  四点共面

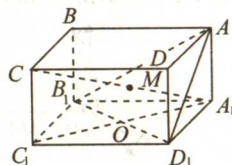


图9-1-12

测试6 已知  $\alpha \cap \beta = m, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = A$ , 则直线  $m$  与  $A$  的位置关系用集合符号表示为\_\_\_\_\_.

测试7  $A, B, C, D$  不共面, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB = BC = CD = DA = BD = 1$ , 则  $AC$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

测试8 空间不全共线的四个点可确定\_\_\_\_\_个平面.

测试9 四条直线两两平行, 任意三条不共面, 过其中任意两条作一个平面, 共可作平面\_\_\_\_\_个.

测试10 如图9-1-13,  $O$  为正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  上底面  $ABCD$  的中心,  $M$  为正方体对角线  $AC_1$  和截面  $A_1BD$  的交点. 求证:  $O, M, A_1$  三点共线.

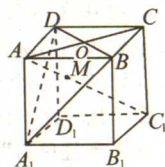


图9-1-13

测试11 求证: 两两相交且不共点的四条直线共面. 已知:  $a, b, c, d$  是两两相交且不共点的四条直线, 求证:  $a, b, c, d$  共面.