奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

# 复数与向量

【吕峰波 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

# 复数与向量

【吕峰波◎编著】

1234567890123456789
234556-4534574.4567878678
012478+786656
4534234/4345453
21374678546789456789
123786453453.144867863
4536789645234 5(12564564)
21231564861156
6546515648648470

**图书在版编目(CIP)数据**

高中数学联赛一试．复数与向量/吕峰波主编．—杭州：西泠印社出版社，2006.6
(奥博丛书)
ISBN 7-80735-077-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．吕…　Ⅲ．数学课—高中—解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064126 号

吕峰波：中学高级教师，教育硕士，中国数学奥林匹克一级教练，浙江省中小学骨干教师高级访问学者，嘉兴市数学学科带头人，嘉兴市优秀教师。曾任嘉兴一中数学教研组组长，现任嘉兴市数学会副秘书长、嘉兴市数学学科基地副主任兼专家组组长。

一直从事数学奥林匹克研究和竞赛辅导工作，在《中等数学》、《数学通报》等省级以上刊物发表论文10余篇；培养10余名学生获全国高中数学联赛一等奖，于1998年、2002、2005年三次被中国数学会授予“优秀教练员”荣誉称号。

# 奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列



**业务联系**　地址：浙江省杭州市学院路83号221室

电话：0571　85028528　85021510

传真：0571　85028578

# 丛书序言

一本武功秘籍!

找到它,勤加练习,就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书,其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然,得到它之后,要成为解题高手,还得注意:

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能,只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说:"欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法,彻底弄清楚了,再往下看。切忌囫囵吞枣,食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书,则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的。"其实要成为真正的高手,不能依赖秘籍,而要自创新招。

这套奥博丛书,不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大,视角不尽相同,写法各有特点。或综述,或专题;或讲思想,或谈策略;或提供翔实材料,或介绍背景知识;……。

据我了解,奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划,也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间,才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样,追求在同一时间出齐;而是细水长流,渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外,想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识,增加读者对数学的理解,提高数学的品味(taste),也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 墫<br>2006 年 3 月 16 日

# 目录

## 第1章　平面向量基础知识



## 第2章　平面向量的应用



## 第3章　空间向量及其应用



## 第4章　复数及其应用

# 第1章 平面向量基础知识

## 1.1 向量的概念及运算

### 知识概要

一辆赛车模型向正东方向前进1米后，逆时针方向转过角 $\theta$，沿直线前进1米；再按逆时针方向转过角 $\theta$，再沿直线前进1米；…如此继续操作下去，问赛车能回到出发点吗？若能，$\theta$ 应满足什么条件？

在这个问题中，我们要研究赛车模型的位移，位移是一个既有大小又有方向的量.在现实生活中，有很多这样的量，除了位移之外，还有力、速度、加速度等等，这就是向量.

**一、向量的有关概念**

1. 向量：既有大小又有方向的量叫做向量.可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其中 $A$ 是向量的起点，$B$ 是向量的终点.也可以记作 $\boldsymbol{a}$ 等，如图1-1所示.

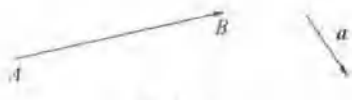



图1-1

2. 向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小亦即线段 $AB$ 的长度叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$（向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$）.向量的模又叫做向量的长度.

3. 单位向量：模为1的向量叫做单位向量.

4. 零向量：模为0的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$.零向量的方向任意，所有的零向量都相等.

5. 平行向量：方向相同或相反的向量叫做平行向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.我们规定 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.平行向量又叫做共线向量.

6. 相等向量：模相等且方向相同的向量叫做相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 零向量与零向量相等. 任意两个相等的非零向量，都可用同一条有向线段来表示，并且与有向线段的起点无关.

7. 相反向量：与 $\boldsymbol{a}$ 模相等，方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量. 我们规定 $\mathbf{0}$ 的相反向量仍是 $\mathbf{0}$. 于是任一向量与它的相反向量之和是零向量，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

8. 向量的夹角：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，如图 1-2 所示.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角也记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

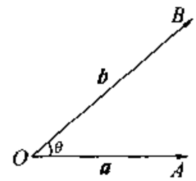


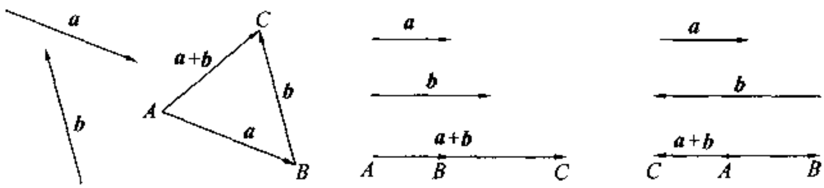

图 1-2

## 二、向量的运算

1. 向量的加法：已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$. 在平面内任取一点 $A$，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，如图 1-3 所示.

求两个向量和的运算，叫做向量的加法.

对于零向量和任一向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.




(1) (2) (3)

图 1-3

由图 1-4 可知，以同一点 $A$ 为起点的两个已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则以 $A$ 为起点的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

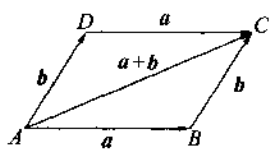



图 1-4

而前面根据向量加法的定义得出的求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则. 这个法则可以推广到多个向量的求和——多边形法则.

2. 向量的减法：向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差. 即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

求两个向量差的运算，叫做向量的减法.

因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，所以求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是求这样一个量，它与 $\boldsymbol{b}$ 的和等于 $\boldsymbol{a}$. 因此可得如下求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图方法.

如图 1-5，已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 $O$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

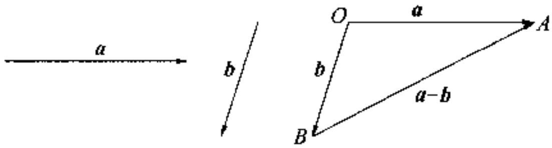



图 1-5

3. 实数与向量的积：实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向如下规定：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

4. 向量的数量积：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 $\theta$，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

并且规定，零向量与任一向量的数量积为 0. 向量的数量积又叫做内积.

如图 1-6，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，过点 $B$ 作 $BB_1$ 垂直于直线 $OA$，垂足为 $B_1$，则

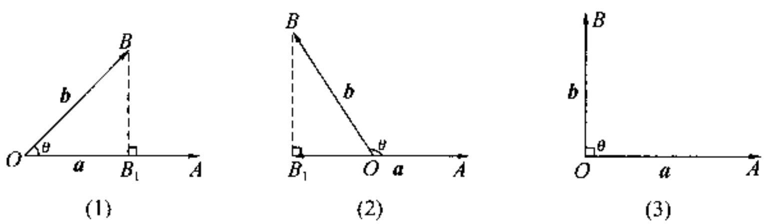



图 1-6

$$OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影，当 $\theta$ 为锐角时(图 1-6(1))，它是正值；当 $\theta$ 为钝角时(图 1-6(2))，它是负值；当 $\theta$ 为直角时(图 1-6(3))，它是 0. 当 $\theta=0^\circ$ 时，它是 $|\boldsymbol{b}|$；当 $\theta=180^\circ$ 时，它是 $-|\boldsymbol{b}|$.

因此，我们得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在

$\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

**三、向量的运算法则**

1. 加法的交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

加法的结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 数量积的交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

4. 平方公式：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2.$$

5. 平方差公式：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2.$$

**四、向量的共线与垂直**

1. 不共线的四点 $A,B,C,D$ 组成平行四边形的充要条件是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

2. 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

3. 两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

4. 对于共线三点 $P_1,P_2,P$ 一定存在实数 $\lambda$，使得 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，若 $P_1,P_2$ 是已知点，则点 $P$ 位置由 $\lambda$ 确定，$\lambda>0$ 时，$P$ 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 内分点；$\lambda<0$ 时，$P$ 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 外分点；$|\lambda|=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{PP_2}|}$，称 $\lambda$ 为 $P$ 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比. 并且有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}.$$

这就是线段定比分点的向量式，是用向量解决平面几何问题的一个重要公式，在涉及到共线点时，常常会用到它. 如图 1-7 所示，当 $P$ 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 中点时，$\lambda=1$，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})$.

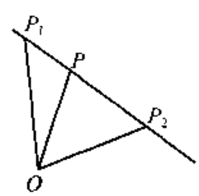



图 1-7

## 例题精讲

**例1** 设 $\boldsymbol{a}_0$ 为单位向量，(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 为平面内的某个向量，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}_0$；(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_0$ 平行，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}_0$；(3) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_0$ 平行，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{a}_0$. 上述命题中，假命题的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

**分析与解** (2)是真命题，(1)和(3)都是假命题. 故选 C.

**例2** 如图 1－8，已知 $AD$，$BE$ 分别为 $\triangle ABC$ 的边 $BC$，$AC$ 的中线，且 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BC}$ 为 ( )

A. $\frac{4}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

D. $-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

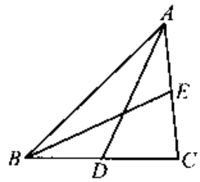


图 1－8

**解** 由题意 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=$

$\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

$\therefore \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\boldsymbol{b}$.

故选 B.

**例3** 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，它们的夹角为 $60^\circ$，那么 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$ 等于 ( )

A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. 4

**解法1** 构造如图 1－9 所示的平行四边形，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=60^\circ$，则 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$. 显然 $\angle OBC=120^\circ$，则由余弦定理得：$|\overrightarrow{OC}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|3\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||3\boldsymbol{b}|\cos120^\circ=1^2+3^2-2\times$

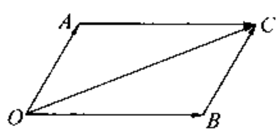


图 1－9

$1\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$. 则 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

**解法 2** $\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,

$$\begin{aligned}\therefore |\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}| &= \sqrt{(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}\\ &= \sqrt{\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\\ &= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+9|\boldsymbol{b}|^2+6|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60^\circ}\\ &= \sqrt{10+6\cos60^\circ}\\ &= \sqrt{13}.\end{aligned}$$

故选 C.

**例 4** $O$ 是平面上一定点,$A,B,C$ 是平面上不共线的三点,动点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,$\lambda\in[0,+\infty)$,则 $P$ 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ( )

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

**解** 如图 1-10,易知 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的单位向量,$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 为 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量,则 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 与 $\angle BAC$ 的角平分线 $\overrightarrow{AD}$ 同向共线,又 $\lambda\in$

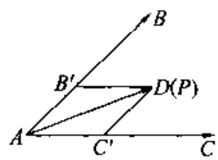


图 1-10

$[0,+\infty)$,所以 $\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$ 与 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 同向共线,又由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$,得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$.

故点 $P$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 上移动,则点 $P$ 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心. 故选 B.

**例 5** (浙江高考题) 已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}|=1$ 满足:对任意 $t\in\mathbf{R}$,恒有 $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$,则 ( )

A. $\boldsymbol{a}\perp t\boldsymbol{e}$　　B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

**分析** $|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$ 两边同时平方展开进行讨论;也可利用几何意义来理解.

**解法1** $\because t\in \mathbf{R}$,恒有$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$,等价于$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|^2$恒成立,

即$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|^2\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|^2$恒成立.

展开整理得$t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}t+(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\geqslant 0$对任意$t\in\mathbf{R}$均成立.

则需方程的判别式$\Delta=(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-4(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)\leqslant 0$.

整理得$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})+1\leqslant 0$,即$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-1)^2\leqslant 0$. $\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=1$.

$\therefore \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}^2=1-1=0$. $\therefore \boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$.

故选C.

**解法2** 如图1-11,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}$,$\overrightarrow{OC}=t\boldsymbol{e}$,则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}$.

因为对任意$t$恒有$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$,故无论$C$在直线$OB$上何处恒有$|\overrightarrow{CA}|\geqslant\overrightarrow{BA}$成立,故只有$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OB}$,即$\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$. 故选C.

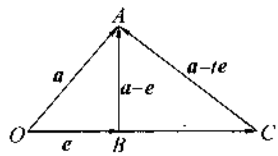



图1-11

**评注** 解法1中用到了常用公式$|\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}|^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\pm 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$,应熟练掌握;解法2利用了向量的几何意义. 这两种解法充分体现了向量兼有代数和几何的双重属性.

**例6** 已知$\triangle ABC$中,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$,面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{15}{4}$,$|\overrightarrow{AB}|=3$,$|\overrightarrow{AC}|=5$,则$\angle BAC=$ ________.

**解** 因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$,故$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin\angle BAC=\dfrac{15}{4}$,所以$\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}$,又$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC<0$,所以$\angle BAC$为钝角,于是$\angle BAC=150^\circ$.

**例7** 已知平面上三点$A,B,C$满足$|\overrightarrow{AB}|=3$,$|\overrightarrow{BC}|=4$,$|\overrightarrow{CA}|=5$. 则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值等于 ________.

**解** 由向量的几何意义及勾股数可知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又由数量积的运算法则可知

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}^2=-|\overrightarrow{AC}|^2=-25$.

故原式$=-25$.

**例8** 如图1-12,$E$、$F$分别是四边形$ABCD$的对角线$AC$,$BD$的中点,

$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{EF}$.

**解** $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\mathbf{0}$ ①

$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}=\mathbf{0}$ ②

① + ② 得$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DF}+2\overrightarrow{FE}=\mathbf{0}$.

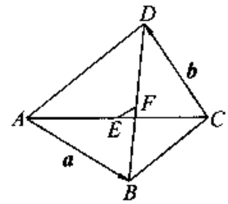



图 1-12

又 ∵ $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{EC}$ , $\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{BF}$,

∴ $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}{2}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

**评注** 抓住中点和封闭折线是解题的关键之所在.本题还可以取 $AD$ 的中点 $G$,连结 $EG$,$FG$,利用$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\mathbf{0}$,求出向量$\overrightarrow{EF}$.

**例 9** 在 $\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$G$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,求$\overrightarrow{AG}$(用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示).

**解** ∵ $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线,根据基本定理,存在惟一的一对实数 $x$,$y$,使$\overrightarrow{AG}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,设 $D$ 为 $BC$ 中点.

则$\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{2}x\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{2}y\boldsymbol{b}$

又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{3}{2}x=1\\[2mm] \dfrac{3}{2}y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

**例 10** $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 是两个不共线的向量,已知 $AB=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$,$CB=\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}$,$CD=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,若 $A$,$B$,$D$ 三点共线,试求实数 $\lambda$ 的值.

**解** ∵ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$

$=(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})-(\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j})$

$=-3\boldsymbol{i}+(1-\lambda)\boldsymbol{j}$

∵ $A$,$B$,$D$ 三点共线.

∴ $\overrightarrow{AB}$ 与$\overrightarrow{BD}$ 共线,因此存在实数 $\mu$.

使得$\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{BD}$.

即:$3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}=\mu[-3\boldsymbol{i}+(1-\lambda)\boldsymbol{j}]=-3\mu\boldsymbol{i}+\mu(1-\lambda)\boldsymbol{j}$

$\because$ $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 是两个不共线向量，由平面向量基本定理得$\begin{cases}-3\mu=3,\\ \mu(1-\lambda)=2.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\mu=-1\\ \lambda=3\end{cases}$

故当 $A,B,D$ 三点共线时，$\lambda=3$.

**例 11** 若 $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=3$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值为多少？

**分析 1** 因为此题与模、夹角有关，故可考虑模与数量积的关系，应用模的运算公式和夹角公式解题.

**解法 1** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=16+9+2\times4\times3\times\dfrac{1}{2}=37$，$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}$.

**分析 2** 由模的定义和向量的加法运算可知，向量与平面几何联系密切，从向量的几何意义入手，结合图形即得.

**解法 2** 如图 1-13，作出 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且使 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=60°$，可知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60°$，$\therefore \angle ABC=120°$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=4^2+3^2-2\times4\times3\cos120°=37$,

$\therefore AC=\sqrt{37}$.

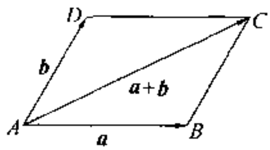


图 1-13

**评注** 解法 1 是利用模的定义，将求模的问题转化为向量数量积的运算. 解法 2 则是利用向量的几何性质，结合向量的加法运算，使问题得到解决. 几何法也是解决向量问题的一种重要方法.

**例 12** 已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

**分析** 本题涉及向量的垂直和向量的夹角，应联系向量的数量积，利用数量积转化两个垂直关系，建立夹角公式中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $|\boldsymbol{a}|^2$ 及 $|\boldsymbol{b}|^2$ 的联系.

**解** $\because (\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$.

$\therefore 7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0$, ①

$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0$. ②

由 ①、②，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$, ③

将 ③ 代入 ①，有 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$，

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$.

**评注** 从数量积的定义和性质入手，是解决垂直问题与夹角问题的重要方法. 本题中通过垂直的充要条件，将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $|\boldsymbol{a}|^2$ 分别用 $|\boldsymbol{b}|^2$ 表示. 同时要注意由 ③ 式不能推出 $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

**例 13** 已知长度相等的三个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求每两个向量的夹角.

**解法 1** 如图 1－14，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为边作平行四边形 $OACB$，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，

$\therefore \overrightarrow{OC}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

$\therefore |\overrightarrow{OC}|=|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

$\therefore$ $\triangle OBC$，$\triangle OAC$ 均为正三角形，

$\therefore \angle AOB=120°$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 $120°$.

同理 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角也为 $120°$.

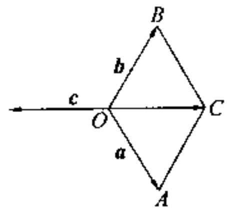


图 1－14

**解法 2** 由题意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 中任意两个向量不共线，故构造 $\triangle ABC$，使 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.

又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形，如图 1－15 所示. 所以，非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 两两夹角均为 $120°$.

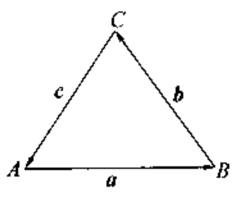


图 1－15

**评注** 本题解法 1 充分利用了平行四边形的图形特征及菱形性质解题，利用平行四边形法则化简 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，也可以看作是消元思想的图形表现，一般对于形如 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 的向量，都要联想到平行四边形或三角形. 解法 2 构造 $\triangle ABC$ 从而获得巧妙解法. 本题也可以通过式子 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$ 两边平方得到解答，请读者自行完成.

**例 14** 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$\angle AOB=150°$，$\angle BOC=90°$，$\angle COA=120°$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

**解法 1** 设 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}\,(m, n\in\mathbf{R})$.

在向量等式两边点乘 $\boldsymbol{c}$，得 $|\boldsymbol{c}|^2=m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+n(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，