

[人教课标版]

导学诱思
焦点突破
融会贯通

新
教
材

佳 点

高中数学（必修4）

 安徽教育出版社

[人教课标版]

新
教
材

佳 点

高中数学

(必修4)

总策划：安 星

编 者：陆 勇 王三改

安徽教育出版社

责任编辑:张长举

新教材焦点(人教课标版)

高中数学

(必修4)

安徽教育出版社出版发行

(合肥市回龙桥路1号)

新华书店经销 合肥晓星印刷有限责任公司印刷

安徽飞腾彩色制版有限责任公司照排

*

开本 880×1230 1/16 印张 9.75 字数 300 000

2007年10月第1版 2007年10月第1次印刷

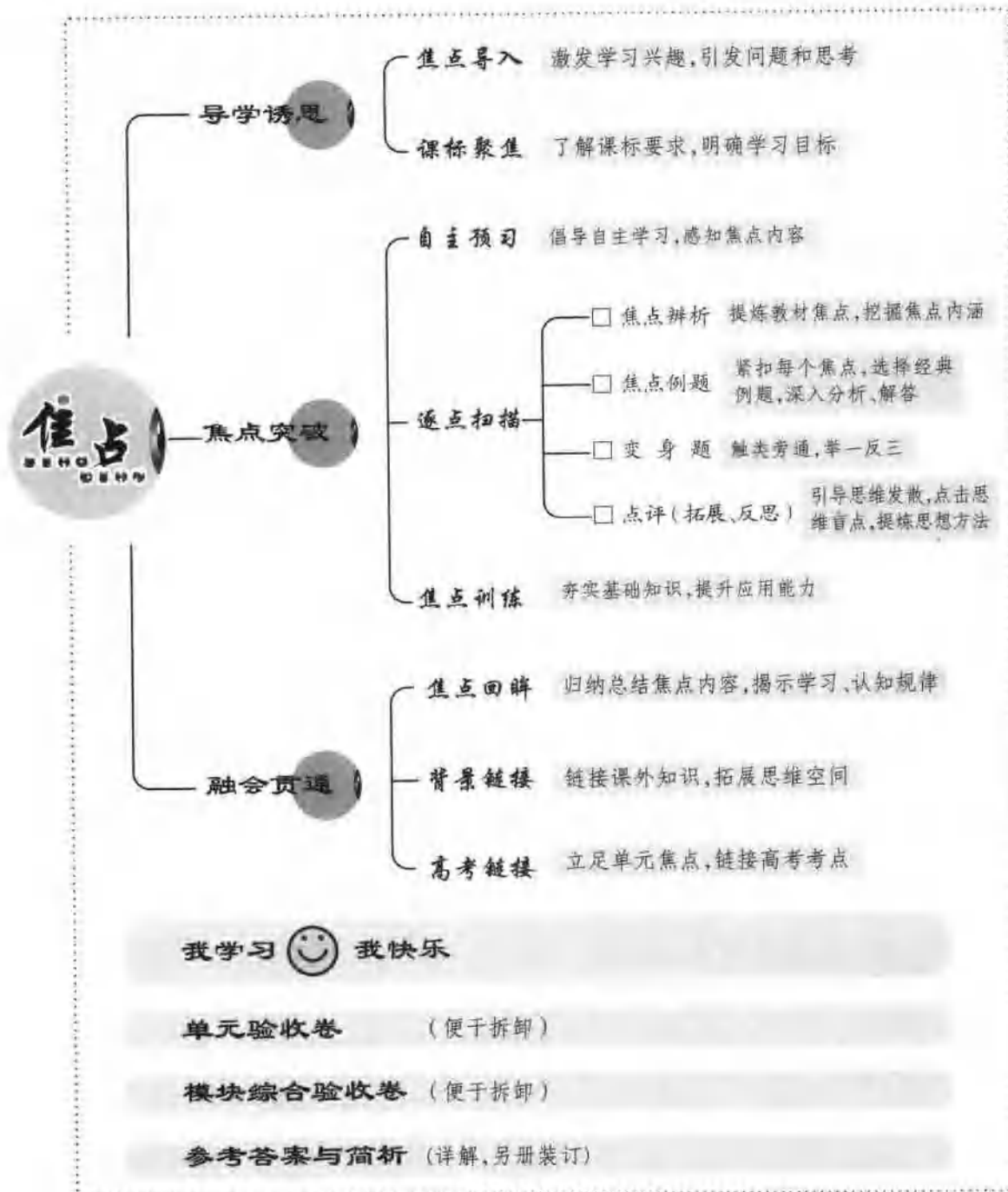
ISBN 978-7-5336-4658-5

定价:15.00元

发现印装质量问题,影响阅读,请与我社出版科联系调换

电话:(0551)2823297 2846176 邮编:230063

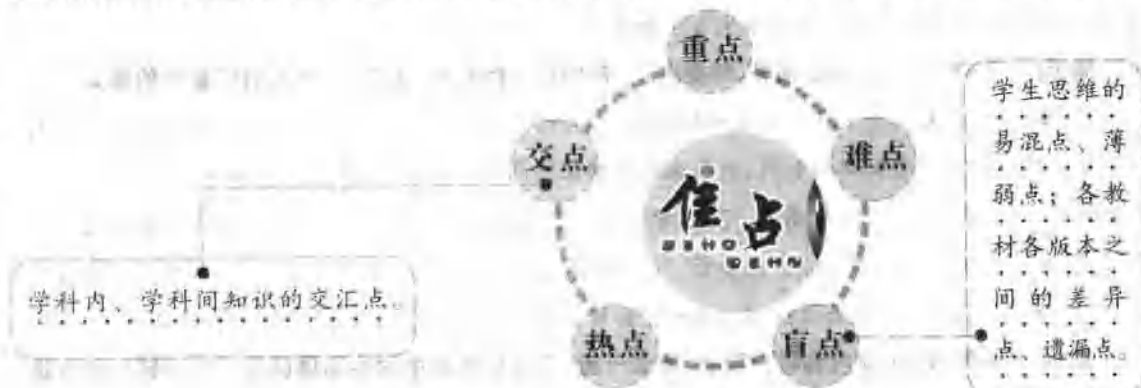
内容导读



《焦点》访谈

■ 问:《新教材焦点》书名比较独特,请问其主要含义是什么?

■ 答:本套书根据新课标要求和新教材特点,对新教材内容逐点扫描:直击重点,剖析难点,补遗盲点,关注热点,演练交点。五点聚焦,是大家关注的焦点,也是本套书的焦点。请看下列图示:



■ 问:请问书名《焦点》除了表示“五点聚焦”的编写理念外,是否还有什么特别的含义?

■ 答:《新教材焦点》是安徽教育出版社高中教育编辑部着力打造的第一套高中新课标同步教辅用书。高中部于2006年8月份成立,成立以后我们确立了围绕“焦点”二字打造高中品牌教辅的整体发展思路。安徽是教育大省,安徽教育出版社作为省内唯一教育类品牌出版社,一直备受全国市场关注。而随着我省新课标教材全面使用和高考命题权的进一步下放,安教社的高中学生读物也必然会成为广大师生关注的“焦点”。

■ 问:目前,市场上新课标同步类教辅较多,你们认为《焦点》最主要靠什么取胜?

■ 答:简而言之,一流的质量。编辑室在创意《新教材焦点》过程中,经过了半年多的详细的市场调研和样张征求意见后才确定最后的编写体例,每个学科的样稿都经过了3轮修订。另外,本套书网罗了全国的编写高手和学科专家。在遴选作者的过程中,我们要求首先必须是上过新课标教材的学科带头人;另外必须是写作能力较强的和有创造性思维的。写稿过程中编辑和作者共同讨论,反复推敲,不放过稿件中的每一点瑕疵。很多作者都感叹这次编稿是他们编得最辛苦的一次,也是收获最大的一次。有了这样一个创作团体,《焦点》的质量得到了有力的保证。

■ 问:确实,《焦点》制作精美,整体设计也很有特色。在内容安排上主要遵循怎样的原则?

■ 答:总原则是依据课标、紧扣教材、充分拓展。具体来说:激发学习兴趣、引导自主学习、强调基础夯实、注重能力提升,这些都是新课标所倡导的,在本套书中都通过具体栏目得以落实。实际上,

《焦点》访谈

新课标的这些理念渗透在本套书的每个栏目、每点讲解,甚至每道试题、每次点评中。另外在栏目顺序安排上也遵循新课标的要求:先兴趣导入,再自主学习,再总结归纳和思维拓展,而且每个栏目内容都充分考虑到其实用性,以方便学生自学和自测。

■ 问:《焦点》立足于同步辅导,却提出了“放眼看新高标高考”的口号,请问有何重要的意义?

■ 答:宏伟的大厦是一砖一瓦垒砌起来的,优异的高考成绩是平常一点一滴积累起来的。安教社焦点工作室着眼平常知识的积累,放眼未来的新课标高考,融高考的焦点于平常学习之中,在一点一滴的学习中,走近高考,体验高考。2009年新课标高考面临重大改革,安教社作为专业的教育类出版社,帮助学生从容应对新高考责无旁贷。《新教材焦点》将传达最新的高考信息,把握最新高考动向。《焦点》全体工作人员坚信:《焦点》一定会帮助学子成就精彩的人生,见证他们的每一点成长。

■ 问:《新教材焦点》内容特色明显,质量一流,它无疑是高中学生新课标同步学习辅导的首选用书。请问学生如何使用才课达到最好的效果?

■ 答:《焦点》在编排时充分考虑到学生使用和课堂教学的方便,学生可以在老师指导下按编排顺序使用本书:

先浏览第一板块的“焦点导入”和“课标聚焦”,然后带着问题预习章节内容。第二板块的“自主预习”引导学生认真阅读课本,初步了解将要学习的内容;“逐点扫描”讲练紧密结合,讲解详细、透彻,变身为题触类旁通;“焦点训练”梯度分明,分层训练,可以和课堂教学配套使用。第三板块功能是:归纳、总结、拓展、提高,可以在章节的课堂学习结束后使用。“单元验收卷”和“模块综合验收卷”附在本书最后,便于拆卸,学生可以在老师指导下使用,也可以用于自测。答案详解并另册装订。

另外,“我学习,我快乐”为学生在紧张学习之余提供了轻松、愉快的园地。

总之,只要像《焦点》所倡导的那样快乐、自主、自信地学习,就一定会事半功倍,梦想成真!

佳占源自关注

关注锤炼精品

精品成就精彩

《佳占》见证你的每一点成长！

安徽教育出版社

焦点工作室祝广大学子：

梦想成真！





第一章 三角函数 1

1.1 任意角和弧度制 2

1.2 任意角的三角函数 8

1.3 三角函数的诱导公式 15

1.4 三角函数的图象与性质 19

1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象
..... 33

1.6 三角函数模型的简单应用 37

第二章 平面向量 44

2.1 平面向量的实际背景及基本概念
..... 45

2.2 平面向量的线性运算 47

2.3 平面向量的基本定理及坐标表示
..... 53

2.4 平面向量的数量积 59

2.5 平面向量应用举例 64

第三章 三角恒等变换 71

3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切
公式 72

3.2 简单的三角恒等变换 81

第一章 三角函数 91

小节验收卷(一) 91

小节验收卷(二) 93

小节验收卷(三) 95

小节验收卷(四) 97

单元验收卷(A) 99

单元验收卷(B) 101

第二章 平面向量 103

小节验收卷(一) 103

小节验收卷(二) 105

小节验收卷(三) 107

单元验收卷(A) 109

单元验收卷(B) 111

第三章 三角恒等变换 113

单元验收卷(A) 113

单元验收卷(B) 115

模块综合验收卷(A) 117

模块综合验收卷(B) 121

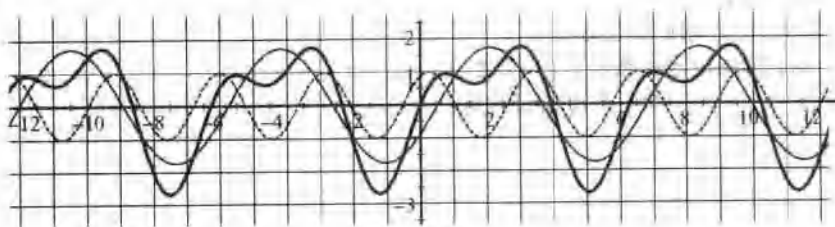
参考答案与简析

第一章 三角函数

导学诱思

焦点导入

往平静的水面丢一颗石子,会荡起一圈圈的波纹,这是我们熟知的现象.其实,波在我们身边无处不在,无时不有.与我们生活息息相关的电,就是一种波的传播;我们都听过音乐,优美的音乐跌宕起伏,令人陶醉,实际上,复杂的音乐是由大量的基本波形叠加而成的,它们都可以用三角函数的图象加以描述.



波的叠加

课标聚焦

1. 了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化.
2. 借助单位圆理解任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的定义及三角函数线的概念.
3. 理解同角三角函数的基本关系式: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$.
4. 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式.
5. 能画出 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的图象,了解三角函数的周期性.
6. 借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0, 2\pi]$, 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质(如单调性、最大值和最小值、图象与 x 轴的交点等).
7. 结合具体实例,了解 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义;能借助计算器或计算机画出 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象,观察参数 A, ω, φ 对函数图象变化的影响.
8. 会用三角函数解决一些简单实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

焦点突破

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

自主预习

1. 角可以看成_____所形成的图形.

正角:按_____方向旋转形成的角.

负角:按_____方向旋转形成的角.

零角:一条射线_____,我们称它为零角.

2. 一个角确定了,则它的终边也就确定了,但反之,具有相同终边的角有_____个.与角 α 终边相同的角的集合可表示为_____.

逐点扫描

焦点一 角的概念的推广

(1)对比如下定义:从同一点出发的两条射线所组成的图形称为角.这是角的静态定义.

角的动态定义:平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

掌握动态定义,关键是对“旋转”的理解:旋转的方向决定了角的正负,旋转的幅度决定了角度的绝对值的大小.

旋转整圈后,角的终边位置出现重复,故在始边相同的前提下,终边相同,角并不一定相同;角相同,则终边位置一定相同.

(2)要注意,正角和负角是表示具有相反意义的旋转量,它的正负规定纯系习惯,就好像与正数、负数的规定一样;零角无正负,就好像数零无正负一样.

例 1

从 3 点到 8 点 25 分,时钟的时针和分针各转了多少度?

【分析】要注意时钟的时针和分针是按顺时针旋

转的,在角的表达上是负角.

【解答】从 3 点到 8 点 25 分,共 5 小时 25 分钟,即 $5\frac{5}{12}$ 小时.

时钟的时针旋转度数为:

$$-30^\circ \times \left(5\frac{5}{12}\right) = -162.5^\circ;$$

时钟的分针旋转度数为:

$$-360^\circ \times \left(5\frac{5}{12}\right) = -1950^\circ.$$

变式题

1. 若将时钟拨慢一小时,那么分针比时针多转了多少度?

焦点二 终边相同的角

角 α 与 $\alpha+k \cdot 360^\circ$ 的终边位置相同,即与角 α 终边相同的角的集合可表示为 $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

例 2

已知角 θ 的 7 倍角的终边与角 θ 的终边重合,且 $0^\circ < \theta < 360^\circ$,求 θ .

【分析】条件的转化必然涉及终边相同的角的关系,对等式变形后,结合角的范围加以对 k 的确定.

【解答】由条件知 $7\theta = \theta + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

化简得 $\theta = k \cdot 60^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

$\because 0^\circ < \theta < 360^\circ, \therefore 0^\circ < k \cdot 60^\circ < 360^\circ$,解得 $0 < k < 6$.

$\because k \in \mathbb{Z}, \therefore k = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\therefore$ 所求 θ 依次为 $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.



● 变式题

2. 写出与 -50° 终边相同的角的集合 M , 并把集合 M 中满足 $-180^\circ \leq \frac{\beta}{2} \leq 180^\circ$ 的元素 β 写出来.

焦点三 象限角

在平面直角坐标系内讨论象限角的前提是: 使角的顶点与坐标原点重合; 角的始边与 x 轴的非负半轴重合(不要说正半轴). 在此前提下, 我们根据角的终边在第几象限来定义象限角.

需要注意的是, 并非所有的角都是象限角, 象限角与轴上角才能表达所有的角.

✱ 例 3

判断下列各角为第几象限角.

(1) $2432^\circ 15'$; (2) $-2432^\circ 15'$.

【解答】 (1) $\because 2432^\circ 15' = 272^\circ 15' + 6 \cdot 360^\circ$,
 $\therefore 2432^\circ 15'$ 与 $272^\circ 15'$ 终边相同, 为第四象限角.

(2) $\because -2432^\circ 15' = 87^\circ 45' + (-7) \cdot 360^\circ$,
 $\therefore -2432^\circ 15'$ 与 $87^\circ 45'$ 终边相同, 为第一象限角.

【点评】 对于过大或过小的角, 我们在判断其所在象限时, 应首先将其写成 $\alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ 的形式.

● 变式题

3. 在直角坐标系中作出下列角, 并指出它们是第几象限角(或终边在什么坐标轴上).

(1) -90° ; (2) 240° ; (3) 480° .

焦点四 对旋转的理解

“ $k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ”, 在数值上表示 360° 的整数倍. 从旋转上理解, 表示旋转整圈. 我们以此类推:

“ $k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ”表示旋转半圈的整数倍;

“ $k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ”表示旋转四分之一圈的整数倍.

比如: {终边在 x 轴的非正半轴上的角} = $\{\alpha | \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;

{终边在 x 轴上的角} = $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$;
 {终边在坐标轴上的角} = $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

✱ 例 4

设集合 $M = \{x | x = k \cdot 90^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = k \cdot 45^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则().

- A. $M = N$ B. $M \supset N$
 C. $M \subseteq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

【分析】 本题关键是对 $k \cdot 90^\circ$ 及 $k \cdot 45^\circ$ 的理解, 我们不妨寻找两者的关系.

【解答】 90° 可拆分成两个 45° ,

$\therefore k \cdot 90^\circ + 45^\circ = 2k \cdot 45^\circ + 45^\circ = (2k+1) \cdot 45^\circ$,
 $k \cdot 45^\circ + 90^\circ = (k+2) \cdot 45^\circ$.

$\therefore M = \{x | x \text{ 为 } 45^\circ \text{ 的奇数倍}\}$, $N = \{x | x \text{ 为 } 45^\circ \text{ 的数倍}\}$, 则 $M \subseteq N$, 选 C.

● 变式题

4. 集合 $A = \{x | x = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = k \cdot 60^\circ + 60^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x | x = k \cdot 180^\circ - 60^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 A, B, C 的关系是_____.

焦点五 对半角所在的象限进行讨论

✱ 例 5

已知角 α 是第二象限角, 那么角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

【分析】 由条件可以写出角的范围, 关键是对 $k \cdot 180^\circ$ 形式, 要作奇偶的讨论.

【解答】 由条件, 角 α 是第二象限角,

即 $90^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

则 $45^\circ + k \cdot 180^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

当 k 取奇数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角;

当 k 取偶数时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角.

● 变式题

5. 当角 α 分别是第一、二、三、四象限角时, 判断角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角, 并总结其规律性.

焦点九 区分几个概念

锐角集合表示为 $\{\alpha | 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$.

小于 90° 的角的集合表示为 $\{\alpha | \alpha < 90^\circ\}$.

第一象限角的集合表示为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

注:锐角、小于 90° 的角是从大小上定义的,而第一象限角是从终边位置定义的,要仔细体会.

变身题

6. 你能写出钝角的集合及第二象限角的集合的表示形式吗?

焦点训练

基础夯实

1. 时间为 12 点 15 分时,时针和分针所夹的最小正角是().

A. 45° B. 60° C. 82.5° D. 67.5°

2. 已知 α 是第四象限角,则 $-90^\circ - \alpha$ 是().

A. 第一象限角 B. 第二象限角
C. 第三象限角 D. 第四象限角

3. 下列命题中正确的为().

A. 终边相同的角一定不相等
B. 第四象限的角的集合是 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

C. 第二象限的角比第一象限的角大

D. 终边在坐标轴上的角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

4. 若 α 角的终边与 -45° 的角的终边相同,那么在 $(-360^\circ, 360^\circ)$ 内终边与 $\frac{\alpha}{3}$ 终边相同的角为_____.

5. 角 α 的终边与函数 $y = -x (x \leq 0)$ 的图象重合,则角 α 的集合是_____.

6. 已知 $A = \{\alpha | k \cdot 180^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha | k \cdot 360^\circ + 60^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 240^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$. 求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

能力拓展

7. 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合,且始边与 x 轴的非负半轴重合,如果角 α 与 β 的终边垂直,那么().

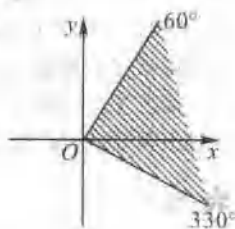
A. $\alpha = 90^\circ + \beta$

B. $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

C. $\alpha = 90^\circ \pm \beta$

D. $\alpha = k \cdot 360^\circ + \beta \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

8. 写出右图阴影区域所表示的角的集合.



综合探究

9. 如果角 α 与角 $\gamma + 45^\circ$ 的终边重合,角 β 与角 $\gamma - 45^\circ$ 的终边重合,探究角 α 与角 β 的关系.

1.1.2 弧度制

自主预习

1. 定义:把_____叫1弧度的角;用弧度作单位来度量角的单位制叫_____.

2. 度量:如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l ,则角 α 的弧度数的绝对值是_____,角 α 的正负由角 α 的终边的_____决定.

3. 换算:由 $180^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \text{ rad}$ 进行变形,则:

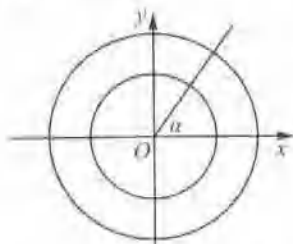
$$1^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \text{ rad} \approx \underline{\hspace{1cm}} \text{ rad};$$

$$1 \text{ rad} = \underline{\hspace{1cm}}^\circ \approx \underline{\hspace{1cm}}^\circ.$$

逐点扫描

焦点一 弧度制的理解

(1)定义的基础:根据圆心角原理,对任何一个圆心角 α ,所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数,因此,等于半径的弧所对的圆心角的大小不随半径的变化而变化,是一个大小确定的角,所以可以作为度量角的标准.



(2)我们要注意到公式中的绝对值符号: $|\alpha| = \frac{l}{r}$ (l 为弧长, r 为半径);此公式中,角 α 的单位一定是弧度,我们比较角度制下的类似公式: $n = \frac{180l}{\pi r}$,这里, n 是角度数.

(3)弧度制与角度制应用上的注意事项:

①以“弧度”或“角度”为单位的一个角都是一个与半径大小无关的定值.

②弧度单位“rad”通常可以省去不写(以不引起误解为前提),但角度单位“°”不能省去.

③解题过程中,单位必须是统一的,避免出现弧度、角度并存的情况.

例1

半径为 r 的圆的一段弧长为其内接等边三角形的周长,求这段弧所对的圆周角的弧度数.

【分析】欲求角的弧度数,应该先求出弧长;弧度是从圆心角定义的,而不是圆周角.

【解答】由圆的半径为 r 可得圆的内接等边三角形的边长为 $\sqrt{3}r$,则周长为 $3\sqrt{3}r$,即弧长 $l = 3\sqrt{3}r$,则弧所对圆心角为 $\frac{3\sqrt{3}r}{r} = 3\sqrt{3}(\text{rad})$,弧所对的圆周角的弧度数为 $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ rad}$.

变式题

1. 半径为3的圆中,有一条弧的长度是 $\frac{\pi}{2}$,则其所对圆周角为().

- A. 30° B. 15° C. 40° D. 20°

焦点二 角度制与弧度制的换算

(1)以周角为联系“角度”和“弧度”的桥梁,以平角为换算核心:

$$\because 360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \therefore 180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

$$\therefore 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad};$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

(2)牢记部分特殊角的换算对我们日后的学习,解题是非常重要的:

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
角度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

例2

(1)把 $\frac{3}{5}\pi(\text{rad})$ 化成度;

(2)把 -855° 写成 $\alpha + 2k\pi$ 的形式,其中 $\alpha \in [0, 2\pi)$.

【解答】(1) $\frac{3}{5}\pi \text{ rad} = \frac{3}{5} \times 180^\circ = 108^\circ$.

$$(2) -855^\circ = -855 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{19}{4}\pi = \frac{5\pi}{4} + (-6\pi).$$

【点评】(1)弧度化角度只需将 π 改写为 180° ;角度化弧度只需去掉“度”的符号,再乘以 $\frac{\pi}{180}$,如果含分,

秒,该先转化为度再进行转化.

(2)精确表达弧度时要保留 π 的形式,近似计算可以用3.14替代.

● 变身题

2.若三角形的三个内角比为3:4:5,分别用角度制和弧度制表示出这三个角.

焦点三 弧长公式及扇形面积公式

(1)初中学过的弧长公式、扇形面积公式: $l = \frac{n\pi r}{180}$,

$S_{\text{扇}} = \frac{n\pi r^2}{360}$ 中的 n 为角度数.这里给出的公式 $l = r \cdot |\alpha|$,

$S = \frac{1}{2}ar^2 = \frac{1}{2}lr$ 中的 α 为弧度数.我们可以看出,利用弧度的公式要比角度制下的公式简单得多.

(2) $l = r \cdot |\alpha|$, $S = \frac{1}{2}ar^2 = \frac{1}{2}lr$ 给出了 S, l, r, α 之间的运算关系,体现出方程思想,可以实现互求.

(3) $S = \frac{1}{2}lr$ 与三角形的面积公式形式上极为相似(把弧长看成底),可以类比记忆.

✱ 例3

若一个扇形的周长是15,则当扇形的半径和圆心角取什么值时,使扇形取得面积的最大值?

【分析】求取面积的最大值,应该建立面积和半径(或圆心角)的函数关系,利用函数解析式求解.

【解答】设扇形的半径为 r ,则弧长为 $15-2r$,圆心角为 $\frac{15}{r}-2$,

$$\text{扇形面积 } S = \frac{1}{2}lr = \frac{15}{2}r - r^2 = -\left(r - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{225}{16}.$$

所以,扇形面积最大为 $\frac{225}{16}$,当 $r = \frac{15}{4}$ 时取得,此时,

圆心角为2.

【点评】由周长表达弧长与半径的关系,再构建关系式求取最值,达是很标准的“条件最值”题型.

● 变身题

3.设扇形的周长为8,面积为4,则扇形的圆心角的弧度数是_____.

焦点四 把弧度制运用在解四中

在弧度制中,是用实数来表达角的,比角度制有更多的优点,在日后的学习中,基本上利用弧度制表达角,熟练地把弧度制利用到解题中去是我们当前的首要任务.

✱ 例4

已知集合 $A = \{\alpha | 2k\pi \leq \alpha \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq 4\}$,求 $A \cap B$.

【分析】集合 A 中由于 $k \in \mathbb{Z}$,故实质上集合 A 是一系列集合的并集.

【解答】令 $k=1$,有 $2\pi \leq \alpha \leq 3\pi$,而 $2\pi > 4$;

令 $k=0$,有 $0 \leq \alpha \leq \pi$;

令 $k=-1$,有 $-2\pi \leq \alpha \leq -\pi$;

令 $k=-2$,有 $-4\pi \leq \alpha \leq -3\pi$,而 $-3\pi < -4$.

故 $A \cap B = \{\alpha | -4 \leq \alpha \leq -\pi \text{ 或 } 0 \leq \alpha \leq \pi\}$.

● 变身题

4.若角 α 和 β 的终边互为反向延长线,则 α 与 β 的关系是($k \in \mathbb{Z}$)().

A. $\alpha = -2k\pi + \beta$ B. $\alpha = \pi + \beta$

C. $\alpha = -\beta$ D. $\alpha = (2k+1)\pi + \beta$

5.已知集合 $A = \left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \{x | 6-x-x^2 \geq 0\}$,求 $A \cap B$.

焦点训练

基础巩固

1. 将时钟的分针拨慢 20 分钟, 则分针转过的弧度数是().

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $-\frac{2\pi}{3}$
C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $-\frac{5\pi}{6}$

2. 下列各对角中终边相同的是().

- A. $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
B. $-\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{22}{3}\pi$
C. $-\frac{7\pi}{9}$ 和 $\frac{11\pi}{9}$
D. $\frac{20\pi}{3}$ 和 $\frac{122\pi}{9}$

3. 圆的半径变为原来的 2 倍, 而弧长也增加到原来的 2 倍, 则().

- A. 扇形的面积不变
B. 扇形的圆心角不变
C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍
D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍

4. 用弧度制表达: 在直角坐标系中, 若角 α 与 β 的终边关于 x 轴对称, 则 α 与 β 的关系是_____.

若角 α 与 β 的终边关于 $y=x$ 对称, 则 α 与 β 的关系是_____.

5. 将下列角度化为弧度:

$$-300^\circ = \underline{\hspace{2cm}}; 420^\circ = \underline{\hspace{2cm}}.$$

将下列弧度化为角度(精确值):

$$-5 = \underline{\hspace{2cm}}; \frac{11\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 已知扇形 OAB 的圆心角为 120° , 所在圆的直径为 8, 求扇形的周长及所含弓形的面积.

能力拓展

7. 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的范围是().

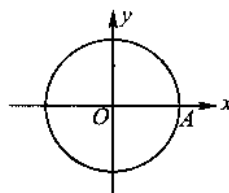
- A. $-\frac{3\pi}{2} < 2\alpha - \beta < 0$ B. $-\pi < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$
C. $-\pi < 2\alpha - \beta < 0$ D. $-\frac{3\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

8. 已知集合 $A = \left\{ x \mid k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$B = \left\{ x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, 求 $A \cap B$.

综合探究

9. 如右图所示, 圆周上点 A 依逆时针方向做匀速圆周运动, 已知 A 点 1 分钟转过 θ ($0 < \theta < \pi$), 2 分钟到达第三象限, 14 分钟回到原来位置, 求 θ .



1.2 任意角的三角函数

1.2.1 任意角的三角函数

自主预习

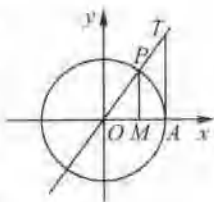
1. (1) 若 x, y 为角 θ 的终边与单位圆的交点的横、纵坐标, 则:

$$\sin\theta = \underline{\hspace{2cm}}, \cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}, \tan\theta = \underline{\hspace{2cm}},$$

(2) 如果我们不借助于单位圆, 而利用角的终边上任意的一点 (非顶点), 设坐标为 (x, y) , 则定义为:

$$\sin\theta = \underline{\hspace{2cm}}, \cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}, \tan\theta = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 如右图所示, 单位圆与角 α 的终边交于点 P , 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 过 A 作单位圆的切线, 与角 α 的终边或其延长线交于点 T , 过 P 作 $PM \perp OM$, M 为垂足, 则角 α 的正弦线、余弦线、正切线分别为: $\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}.$

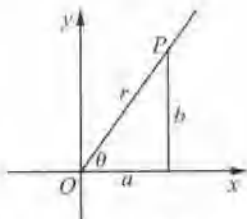
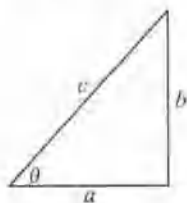


逐点扫描

焦点一 任意角的三角函数的定义

(1) 在初中时, 锐角三角函数的定义依赖于直角三角形, 用三条边长的比值进行定义 (如下左图所示):

$$\sin\theta = \frac{b}{c}, \cos\theta = \frac{a}{c}, \tan\theta = \frac{b}{a}.$$



(2) 将角置于坐标系中, 两条直角边长度与点 P 的两个坐标值相同 (如右上图所示), 于是, 锐角三角函数的定义可以表述为终边上一点 P (非顶点) 的横坐标、纵坐标、 P 到原点的距离之间的比值:

$$\sin\theta = \frac{b}{r}, \cos\theta = \frac{a}{r}, \tan\theta = \frac{b}{a}.$$

更进一步, 当点 P 是角的终边与单位圆的交点时坐标设为 (x, y) , $r=1$, 此时,

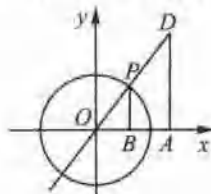
$$\sin\theta = \frac{b}{r} = y, \cos\theta = \frac{a}{r} = x, \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

这样, 我们实现了锐角三角函数由边的比值去定义到由点的坐标去定义的过渡.

(3) 我们按照锐角的三角函数的定义进行任意角的三角函数的定义:

$\sin\theta = y, \cos\theta = x, \tan\theta = \frac{y}{x}$ (其中 x, y 为角的终边与单位圆的交点的横、纵坐标).

(4) 如果我们不借助于单位圆, 而利用角的终边上任意的一点 $D(x, y)$ (非顶点), 该如何定义呢? 容易知道 (如下图所示), $\triangle ADC \sim \triangle BPO$, 则有:



$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

例 1

(1) 求 $-\frac{\pi}{2}$ 的三个三角函数值:

(2) 已知角 β 的终边过 $(-3t, -4t)$, 求 β 的三个三角函数值.

【分析】 (1) 角确定了, 其终边位置显然唯一确定, 这样, 我们取其终边与单位圆的交点 (即到原点距离为 1 的点), 当然也可以任意取点, 只要不是原点即可.

(2) 本例是对教材例 2 的引申, 请同学们进行对比.

【解答】 (1) 因为角 $-\frac{\pi}{2}$ 的终边与 y 轴的非正半轴重合, 我们可取其终边与单位圆的交点 $(0, -1)$, 则 $x=0, y=-1$, 所以,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -1,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ 显然不存在.}$$

$$(2) \because x = -3t, y = -4t,$$

$$\text{令 } x^2 + y^2 = 1, \text{ 解得 } t = \pm \frac{1}{5}.$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{5} \text{ 时,}$$



$$\sin\beta=y=-\frac{4}{5}, \cos\beta=x=-\frac{3}{5}, \tan\beta=\frac{4}{3};$$

当 $t=-\frac{1}{5}$ 时.

$$\sin\beta=y=\frac{4}{5}, \cos\beta=x=\frac{3}{5}, \tan\beta=\frac{4}{3}.$$

【点评】 角的终边上确定一点,则角的终边位置确定,三角函数值必然确定,因为三角函数值的确定本质上是由终边位置决定的!但是,如果角的终边上取点坐标含有字母,则其位置没有被唯一确定,这时,我们必须利用分类讨论思想解题.

● 变身题

1. 已知角 θ 的终边上一点 P 与点 $(1, -2)$ 关于 x 轴对称,求角 θ 的正弦、余弦、正切函数值.

✱ 例2

已知角 α 的终边上有一点 $P(3, y)$, 且 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

试求 $\sin\alpha$ 及 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值.

【分析】 本例所给的条件中点 $P(3, y)$ 显然不是角的终边与单位圆的交点,因此,我们可以采取利用 $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tan\theta = \frac{y}{x}$ 这一组定义式解题.

$$\text{【解答】 } \because \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+y^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore y = \pm 9.$$

当 $y=9$ 时,

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5};$$

当 $y=-9$ 时,

$$\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

【点评】 本例是例1的反过程,是由余弦值反求点的坐标,我们看到,角 α 的余弦值是确定的,但是其正弦值有两个,你能判断出点 P 所在的象限吗?(第一或第四象限)

● 变身题

2. 已知角 θ 的始边为 x 轴的非负半轴,终边在直线 $y=kx$ 上,若 $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $\cos\theta < 0$, 求 k 的值.

焦点二 三角函数值的定义域及正负值

(1) 我们从任意角的三角函数的定义: $\sin\theta = y, \cos\theta = x, \tan\theta = \frac{y}{x}$ (其中 x, y 为角的终边与单位圆的交点的横、纵坐标)出发,可以知道,对任意的角,其正弦、余弦值都是存在的,但由分母不为零的要求,正切函数要求 x 值不能为0,即,当角的终边在 y 轴上时,其正切无意义.用数学语言概括如下:

$f(x) = \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

$f(x) = \cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

$f(x) = \tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{R}\}$.

(2) 三角函数值的正负显然取决于 x, y (横、纵坐标)的正负,我们通过坐标系可以进行判断,在理解的基础上不妨作如下记忆:正弦一、二为正;余弦一、四为正;正切一、三为正.

(3) 请对下列论断加以真假判断:

① 当角 θ 为第一或第二象限角时,其正弦值为正;

② 当角 θ 的正弦值为正时,角 θ 必为第一或第二象限角.

第一个命题显然是正确的,而第二个命题是不正确的,当角 θ 的终边在 y 轴的非负半轴上时,正弦值为正.

类似上例,请同学们对余弦、正切函数进行总结,我们要注意对思维的严密性加以培养.

(4) 当已知一个角的一个三角函数值的正负时,我们不能确定角的象限,因为它有两种可能,但是知道一个角的两个三角函数值的正负,我们便能判断出角的象限,请结合教材例3加以理解.

