

普通高等院校

电子信息类系列教材

*Diancichang  
Yu Weibo Jishu*

# 电磁场 与微波技术

◎ 黄玉兰 编著

 人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

普通高等院校电子信息类系列教材

# 电磁场与微波技术

黄玉兰 编著

人民邮电出版社

北京

## 图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场与微波技术/黄玉兰编著. —北京:人民邮电出版社, 2007. 8

(普通高等院校电子信息类系列教材)

ISBN 978-7-115-16096-6

I. 电... II. 黄... III. ①电磁场—高等学校—教材②微波技术—高等学校—教材

IV. 0441.4 TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 051961 号

### 内 容 提 要

本书从矢量分析入手, 主要介绍电磁场与电磁波、微波技术的基本概念、基本理论和基本分析方法, 并对天线作简单介绍。

全书共分 8 章, 包括矢量分析、电磁场的基本理论、平面电磁波、传输线理论、微波传输线、微波网络基础、常用微波元件及天线。本书注重知识体系的基础性和完整性, 加强了基本概念和基本理论的阐述, 对大篇幅的数学推导进行了删选。每章配有一定数量的例题和习题, 并给出了习题答案。

本书面向应用型本科教学, 可供高等学校电子工程、通信工程及相关专业的本科生用作教材, 也可作为电子工程、通信工程、自动控制、电子测量等专业技术人员的参考书。

普通高等院校电子信息类系列教材

### 电磁场与微波技术

- 
- ◆ 编 著 黄玉兰  
责任编辑 蒋 亮
  - ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号  
邮编 100061 电子函件 [315@ptpress.com.cn](mailto:315@ptpress.com.cn)  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
三河市海波印务有限公司印刷  
新华书店总店北京发行所经销
  - ◆ 开本: 787×1092  
印张: 18 25  
字数: 440 千字  
印数: 1 3 000 册
- 2007 年 8 月第 1 版  
2007 年 8 月河北第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-16096-6/TN

定价: 28.00 元

读者服务热线: (010) 67170985 印装质量热线: (010) 67129223

## 编者的话

电磁场与微波技术与现代信息社会密切相关。1864年麦克斯韦建立了描述电磁场的严格数学公式，标志着宏观电磁场理论产生。1936年美国贝尔实验室做的波导通信实验，开始了微波技术的应用时代。目前在电子、通信、广播、电视、雷达、导航、测控、仪器仪表、自动化等领域，电磁场与微波得到了广泛应用。

随着高等教育对人材培养模式的转变，要求学生注重知识的基础性、应用性和系统性，因此本书加强了基本概念和基本理论的阐述，突出了知识体系的完整性，对大篇幅的数学推导进行了删选，使读者易于理解、易于接受。

本书计划教学学时为72学时。全书共分8章，第1章矢量分析，介绍标量场的梯度、矢量场的散度与旋度及三个常用坐标系，为后续场与波的学习打下数学基础；第2章电磁场的基本理论，系统讨论静电场、恒定电场、恒定磁场和时变电磁场的基本规律，建立了麦克斯韦方程组；第3章平面电磁波，讨论平面电磁波在不同媒质中的传播特性；第4章传输线理论，讨论TEM传输线的基本特性参数、工作状态分析、史密斯阻抗圆图和阻抗匹配；第5章微波传输线，讨论不同类型波导中的波型、场分量、纵向传输特性、高次模和尺寸选择，并介绍带状线和微带线的特性；第6章微波网络基础，介绍等效网络和网络参量；第7章介绍常用微波元件；第8章天线，介绍动态位函数、基本振子的辐射和不同类型的天线。上述内容既相互联系又各自独立，使用时可以根据不同的教学要求进行取舍。

本书每章附有例题和习题，并给出了习题答案。附录中给出了矢量恒等式、坐标变换和传输线的参数指标，供读者参考。

全书由黄玉兰编写。申宁对第1、2章的习题进行了校对，在此表示感谢。在编写过程中得到了孙伟玲老师的关心与支持，在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中肯定会有一些缺点和错误，敬请广大专家和读者予以指正。

编者  
2007年1月

# 目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 矢量代数	1
1.1.1 矢量的加法和减法	2
1.1.2 标量与矢量相乘	2
1.1.3 矢量的点积	2
1.1.4 矢量的叉积	3
1.2 矢量场的散度	4
1.2.1 矢量场的矢量线	4
1.2.2 矢量场的通量	4
1.2.3 矢量场的散度	6
1.2.4 散度定理	7
1.3 矢量场的旋度	8
1.3.1 矢量场的环流	9
1.3.2 矢量场的旋度	9
1.3.3 斯托克斯定理	10
1.4 标量场的梯度	11
1.4.1 标量场的等值面	12
1.4.2 标量场的梯度	12
1.4.3 标量场的方向导数	13
1.5 亥姆霍兹定理	15
1.6 常用坐标系	17
1.6.1 直角坐标系	17
1.6.2 圆柱坐标系	17
1.6.3 球坐标系	20
习题	22
第 2 章 电磁场的基本理论	25
2.1 电磁场中的基本物理量和基本实验定律	25
2.1.1 电荷及电荷密度	25
2.1.2 电流及电流密度	26
2.1.3 库仑定律和电场强度	27
2.1.4 安培力定律和磁感应强度	30

2.2 静电场	32
2.2.1 真空中静电场的基本方程	32
2.2.2 电位函数	35
2.2.3 电介质中的高斯定理及边界条件	38
2.2.4 静电场的能量	42
2.2.5 直角坐标系中的分离变量法	44
2.2.6 唯一性定理及镜像法	47
2.3 恒定电场	48
2.3.1 恒定电场的基本方程	48
2.3.2 导电媒质中的传导电流	49
2.3.3 恒定电场与静电场的比拟	51
2.4 恒定磁场	52
2.4.1 真空中恒定磁场的基本方程	52
2.4.2 矢量磁位	54
2.4.3 磁介质中的安培定律及边界条件	56
2.4.4 恒定磁场的能量	59
2.5 时变电磁场	61
2.5.1 法拉第电磁感应定律	61
2.5.2 位移电流	62
2.5.3 麦克斯韦方程和边界条件	64
2.5.4 坡印廷定理	67
2.5.5 波动方程	69
2.5.6 时谐场的复数表示法	69
习题	71
<b>第3章 平面电磁波</b>	<b>77</b>
3.1 无界理想介质中的均匀平面波	77
3.2 波的极化	82
3.2.1 线极化	83
3.2.2 圆极化	83
3.2.3 椭圆极化	84
3.3 无界损耗媒质中的均匀平面波	85
3.3.1 等效介电常数	86
3.3.2 损耗媒质中的电场和磁场	86
3.3.3 良介质和良导体中的参数	88
3.4 均匀平面波对平面分界面的垂直入射	90
3.4.1 对理想导体平面的垂直入射	90
3.4.2 对理想介质平面的垂直入射	92
3.4.3 对导电媒质平面的垂直入射	94

3.5 均匀平面波对平面分界面的斜入射	96
3.5.1 对理想导体平面的斜入射	96
3.5.2 对理想介质平面的斜入射	99
3.5.3 全反射和全透射	101
习题	101
<b>第4章 传输线理论</b>	<b>105</b>
4.1 传输线方程和传输线的场分析方法	106
4.1.1 长线及分布参数等效电路	106
4.1.2 传输线方程及其解	108
4.1.3 用场的概念分析传输线	111
4.2 传输线的基本特性参数	113
4.2.1 特性阻抗	113
4.2.2 传播常数	114
4.2.3 输入阻抗	115
4.2.4 反射系数	116
4.2.5 传输功率	118
4.3 均匀无耗传输线工作状态分析	119
4.3.1 行波工作状态	119
4.3.2 驻波工作状态	120
4.3.3 行驻波工作状态	124
4.4 有耗传输线	128
4.4.1 有耗传输线的参数、电压、电流和阻抗分布	128
4.4.2 传输功率和效率	130
4.5 史密斯阻抗圆图和导纳圆图	131
4.5.1 史密斯阻抗圆图	131
4.5.2 导纳圆图	134
4.5.3 史密斯圆图的应用	135
4.6 传输线的阻抗匹配	139
4.6.1 信号源与传输线的阻抗匹配	140
4.6.2 负载与传输线的阻抗匹配	142
习题	149
<b>第5章 微波传输线</b>	<b>154</b>
5.1 金属波导传输线的一般分析	155
5.1.1 导波方程及其求解	155
5.1.2 波沿波导传输的一般特性	157
5.2 矩形波导	159
5.2.1 矩形波导中的波型及场分量	160

5.2.2	矩形波导中波的纵向传输特性 .....	163
5.2.3	矩形波导中模式的场结构图 .....	166
5.2.4	矩形波导的管壁电流 .....	169
5.2.5	矩形波导尺寸的设计考虑 .....	171
5.3	圆波导 .....	172
5.3.1	圆波导中的波型及场分量 .....	173
5.3.2	圆波导中的主要波型及其应用 .....	176
5.4	同轴线及其高次模 .....	180
5.4.1	同轴线中的主模 TEM 模 .....	180
5.4.2	同轴线中的高次模 TE 模和 TM 模 .....	181
5.4.3	同轴线的尺寸选择原则 .....	183
5.5	带状线 .....	184
5.5.1	特性阻抗 .....	184
5.5.2	带状线的损耗和衰减 .....	188
5.5.3	带状线的尺寸选择 .....	189
5.6	微带线 .....	190
5.6.1	微带线中的模式 .....	191
5.6.2	微带线的传输特性 .....	192
5.6.3	微带线的损耗与衰减 .....	196
	习题 .....	197

**第 6 章 微波网络基础** .....

6.1	导波系统的等效传输线 .....	199
6.1.1	导波系统等效为双线传输线 .....	199
6.1.2	归一化参量 .....	201
6.2	微波元件的等效网络 .....	202
6.2.1	微波网络参考面的选择 .....	202
6.2.2	微波元件等效为微波网络 .....	203
6.2.3	微波网络的分类 .....	205
6.2.4	微波网络的分析与综合 .....	205
6.3	二端口微波网络 .....	206
6.3.1	二端口微波网络参量 .....	206
6.3.2	各种网络参量的互相转换 .....	212
6.3.3	二端口网络参量的性质 .....	214
6.4	多端口微波网络的散射矩阵 .....	215
6.5	微波网络的工作特性参量 .....	216
6.5.1	插入反射系数和插入驻波比 .....	216
6.5.2	电压传输系数 .....	217
6.5.3	插入衰减 .....	217



6.5.4 插入相移 .....	218
习题 .....	218
<b>第7章 常用微波元件</b> .....	<b>221</b>
7.1 波导中的电抗元件 .....	221
7.2 连接元件 .....	223
7.2.1 接头 .....	224
7.2.2 转接元件 .....	224
7.3 分支元件 .....	226
7.3.1 矩形波导的分支元件 .....	226
7.3.2 同轴线的分支元件 .....	228
7.3.3 微带功率分配器 .....	228
7.4 终端元件 .....	229
7.4.1 匹配负载 .....	229
7.4.2 短路器 .....	230
7.5 衰减器和移相器 .....	230
7.5.1 衰减器 .....	230
7.5.2 移相器 .....	231
7.6 定向耦合器 .....	231
7.6.1 定向耦合器的技术指标 .....	232
7.6.2 混合环 .....	233
7.7 微波谐振器 .....	234
7.7.1 微波谐振器的基本特性和参数 .....	235
7.7.2 同轴线谐振器 .....	236
7.7.3 矩形谐振器 .....	238
7.7.4 圆柱形谐振器 .....	239
习题 .....	241
<b>第8章 天线</b> .....	<b>243</b>
8.1 天线概述 .....	243
8.1.1 天线的定义 .....	243
8.1.2 天线的分类 .....	244
8.1.3 天线的研究方法 .....	244
8.2 动态位函数及其解 .....	244
8.2.1 动态标量位和动态矢量位 .....	244
8.2.2 动态位函数的方程 .....	245
8.2.3 动态位函数的解 .....	246
8.3 基本振子的辐射 .....	247
8.3.1 电基本振子的辐射场 .....	247

8.3.2 磁基本振子的辐射场 .....	250
8.4 天线的电参数 .....	251
8.5 对称振子天线 .....	254
8.5.1 对称振子的电流分布 .....	255
8.5.2 对称振子的辐射场 .....	255
8.5.3 对称振子的辐射电阻和输入阻抗 .....	256
8.6 天线阵 .....	256
8.6.1 二元阵与方向性乘积原理 .....	257
8.6.2 均匀直线阵 .....	258
8.7 其他类型天线简要介绍 .....	259
8.7.1 行波天线 .....	259
8.7.2 缝隙天线 .....	260
8.7.3 微带天线 .....	260
8.7.4 旋转抛物面天线 .....	261
习题 .....	261
<b>附录 A 圆柱坐标和球坐标</b> .....	<b>263</b>
<b>附录 B 重要的矢量公式</b> .....	<b>265</b>
<b>附录 C 国产矩形波导管的结构与参数表</b> .....	<b>267</b>
<b>附录 D 常用硬同轴线特性参数表</b> .....	<b>269</b>
<b>附录 E 常用同轴射频电缆特性参数表</b> .....	<b>270</b>
<b>附录 F 阻抗圆图</b> .....	<b>271</b>
<b>习题答案</b> .....	<b>272</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>281</b>

# 第1章 矢量分析

在电磁场理论的研究中,大量用到矢量场,为此首先介绍矢量分析。矢量分析是分析矢量场问题的工具,是所有矢量场共同性质的总结。

如果在空间的一个区域中,每一点都有一个物理量的确定值与之对应,则在这个区域中就构成了该物理量的场。场的一个重要属性是它占有一个空间,它把物理量用空间和时间的数学函数来描述。如果这个物理量是标量,这个场就称为标量场,如温度场  $T(x,y,z,t)$ 。标量场在数学上只用一个代数变量描述,只有大小,没有方向。如果这个物理量是矢量,这个场就称为矢量场,如速度场  $\mathbf{v}(x,y,z,t)$  和力场  $\mathbf{F}(x,y,z,t)$ 。矢量场不仅需要定出大小,而且需要定出方向。在电磁场理论中,电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  分布在空间,它们既有大小,又有方向,所以  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  是矢量场。

如果场的物理状态只是空间的函数,而与时间无关,则场称为静态场或恒定场;如果场的物理状态既是空间的函数,又是时间的函数,则场称为时变场。

为了说明电磁场的分布和变化规律,麦克斯韦建立了描述电磁场的严格数学公式,并在理论上预言了电磁波的存在。应用矢量分析方法,电磁场的数学公式可以写得简练而清晰,本章讨论矢量分析,目的在于一开始就建立处理场的数学方法。

矢量分析中的亥姆霍兹定理指出,矢量场可以由它的散度和旋度唯一确定。由此可以得知,对于任何矢量场,都需要分析它的散度和旋度,麦克斯韦描述电磁场的数学公式就是利用电场和磁场的散度和旋度完成的。散度和旋度是构成这个矢量场的源。此外,标量场的梯度也是需要研究的物理量,如电位的梯度是电场。散度、旋度和梯度称为矢量分析中的三度,这构成了矢量分析的核心内容。

在本书所有章节,将对矢量进行合成、分解、微分、积分和其他方面的运算,因而要求掌握矢量代数和矢量微积分的内容。由于矢量场散度和旋度的运算法则与矢量代数的运算法则一致,本章首先复习矢量代数。

在解决实际问题时,经常涉及某些给定形状的区域或物体,需要用与给定形状相适应的坐标系表达公式。本章将讨论直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系这三种常用的正交坐标系,并讨论这三种坐标系中矢量的表示方法和运算法则。首先讨论直角坐标系中散度、旋度和梯度的计算公式,然后通过坐标变换得到圆柱坐标系和球坐标系中散度、旋度和梯度的计算公式。

## 1.1 矢量代数

矢量既有大小,又有方向。矢量  $\mathbf{A}$  可以表示为  $\mathbf{A} = e_A A$ , 其中  $A$  表示矢量  $\mathbf{A}$  的大小,  $e_A$

表示矢量  $A$  的方向。 $e_A = A/A$ , 其大小等于 1, 称为矢量  $A$  方向的单位矢量。

任何一个矢量可以由它在三个相互垂直轴上的投影分量确定。例如, 在直角坐标系中, 矢量  $A$  在三个坐标轴上的投影分别为  $A_x$ 、 $A_y$  和  $A_z$ , 矢量  $A$  可以表示为

$$A = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.1)$$

式中  $e_x$ 、 $e_y$  和  $e_z$  分别表示  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的单位矢量。由式 (1.1) 可以看出, 一个矢量场对应三个标量场。矢量  $A$  的大小为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

空间一点  $P$  可以由位置矢量确定。从原点指向点  $P$  的矢量  $r$  称为位置矢量, 它在直角坐标系中表示为

$$r = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1.3)$$

### 1.1.1 矢量的加法和减法

两个矢量之间可以进行加法或减法运算。

两个矢量相加, 等于两个矢量相应的分量分别相加, 它们的和还是一个矢量。矢量加法符合平行四边形法则, 如图 1.1 (b) 所示。

$$A + B = e_x(A_x + B_x) + e_y(A_y + B_y) + e_z(A_z + B_z) \quad (1.4)$$

两个矢量相减, 等于两个矢量相应的分量分别相减, 它们的差依旧是一个矢量。两个矢量相减也可以看成将其中一个矢量变号后再相加, 如图 1.1 (c) 所示。

$$A - B = A + (-B) = e_x(A_x - B_x) + e_y(A_y - B_y) + e_z(A_z - B_z) \quad (1.5)$$

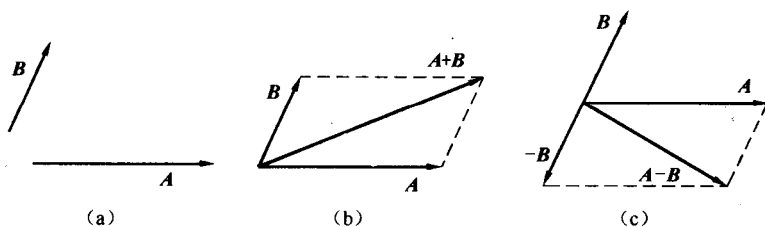


图 1.1 矢量加减法

### 1.1.2 标量与矢量相乘

标量与矢量之间可以进行乘法运算。

标量  $k$  与矢量  $A$  相乘, 结果是  $A$  的方向未变, 大小改变了  $k$  倍, 即

$$kA = e_A kA = e_x kA_x + e_y kA_y + e_z kA_z \quad (1.6)$$

### 1.1.3 矢量的点积

两个矢量之间的乘积有两种定义, 一种是点积 (也称为标量积); 一种是叉积 (也称为矢量积)。

矢量  $A$  与矢量  $B$  的点积, 写成  $A \cdot B$ , 它的结果是一个标量, 其大小等于两个矢量的大小与它们夹角  $\theta$  余弦的乘积, 如图 1.2 所示, 表示为

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.7a)$$

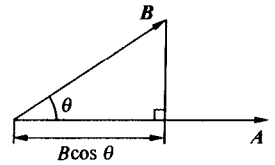


图 1.2 点积的图示

在直角坐标系中各单位矢量之间的点积为

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$$

$$e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0$$

矢量  $A$  与矢量  $B$  的点积, 用矢量的三个分量表示为

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.7b)$$

### 1.1.4 矢量的叉积

矢量  $A$  与矢量  $B$  的叉积, 写成  $A \times B$ , 它的结果是一个矢量, 其大小等于两个矢量的大小与它们夹角  $\theta$  正弦的乘积, 其方向垂直于矢量  $A$  与矢量  $B$  组成的平面 (符合右手螺旋法则), 如图 1.3 所示, 表示为

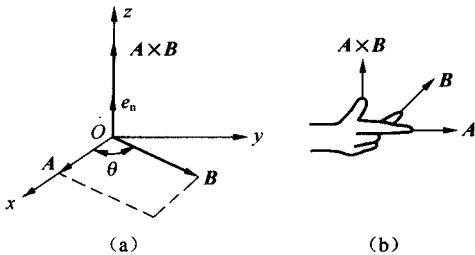


图 1.3 叉积的图示及右手螺旋

$$A \times B = e_n AB \sin \theta \quad (1.8a)$$

在直角坐标系中各单位矢量之间的叉积为

$$e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y,$$

$$e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = 0$$

矢量  $A$  与矢量  $B$  的叉积, 用矢量的三个分量表示为

$$A \times B = e_x(A_y B_z - A_z B_y) + e_y(A_z B_x - A_x B_z) + e_z(A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.8b)$$

示为

或表示为

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.8c)$$

例 1.1 已知  $A = e_x 3 + e_y 4 + e_z 2$ ,  $B = e_x 2 + e_y 4 + e_z 7$ , 求:

(1)  $A \cdot B$ ; (2)  $A$  与  $B$  的夹角; (3)  $A \times B$ 。

解 (1)  $A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 3 \times 2 + 4 \times 4 + 2 \times 7 = 36$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} = \frac{36}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 7^2}} \approx 0.80$$

$$\theta \approx 36.41^\circ$$

$$(3) \quad A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= e_x(4 \times 7 - 2 \times 4) + e_y(2 \times 2 - 3 \times 7) + e_z(3 \times 4 - 4 \times 2) \\
 &= e_x 20 - e_y 17 + e_z 4
 \end{aligned}$$

## 1.2 矢量场的散度

### 1.2.1 矢量场的矢量线

一个矢量场可以用一个矢量函数表示。例如，在直角坐标系中矢量场  $A$  可以表示为

$$A(x, y, z) = e_x A_x(x, y, z) + e_y A_y(x, y, z) + e_z A_z(x, y, z) \quad (1.9)$$

$A$  在坐标轴上的三个分量  $A_x$ 、 $A_y$  和  $A_z$  是空间的函数，假定它们都具有一阶连续偏导。

矢量场  $A$  可以用画图的方式描述，称为矢量场的矢量线（也叫做力线、流线、通量线等）图。矢量线图上每一点处的切线应当是该点矢量场的方向，如图 1.4 (a) 所示。在研究矢量场时，常采用带方向的矢量线形象地表示矢量场，例如电场的电力线、磁场的磁力线、流速场中的流线都是矢量线。既能根据矢量线确定各点矢量场的方向，又能根据各处矢量线的密疏程度判断出各处矢量场的大小和变化趋势。

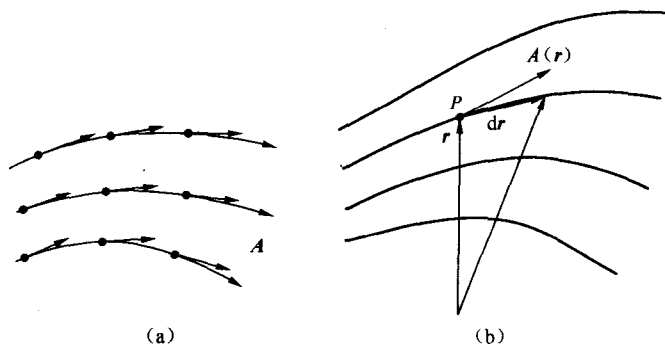


图 1.4 矢量场的矢量线图

下面讨论矢量线方程的表达式。如图 1.4 (b) 所示，设点  $P$  为矢量线上的一点，其位置矢量为  $r$ ，根据矢量线的定义有

$$A \times dr = 0$$

将其代入式 (1.3)，即可得到矢量线满足的微分方程

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (1.10)$$

### 1.2.2 矢量场的通量

首先通过一个熟悉的例子来看需要研究矢量场的什么特性。水通过某一横截面的流量是经常需要计算的一个物理量，流量与流速的大小  $|v|$ 、横截面的面积  $S$ 、 $S$  法向  $e_n$  相对于  $v$

的夹角  $\theta$  都有关系, 流量的大小可以写成

$$\text{流量} = \int_S |\mathbf{v}| \cos\theta dS$$

通量的概念在场论中是由流体的流量引申的。矢量场  $\mathbf{A}$  通过面  $S$  的通量定义为

$$\text{通量} = \int_S |\mathbf{A}| \cos\theta dS \quad (1.11)$$

若画图表示, 矢量场的通量即为垂直于矢量场的单位表面矢量线所穿过的数目 (见图 1.5)。

式 (1.11) 中的被积函数只要将面积赋予方向性, 可以表示为两个矢量点积的形式。为此需要定义面元矢量。

用一个矢量表示面元, 称为面元矢量。取一个面元  $dS$ , 并取一个与面元相垂直的单位矢量  $\mathbf{e}_n$ , 则面元矢量  $d\mathbf{S}$  定义为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_n dS \quad (1.12)$$

$\mathbf{n}$  的取向有两种情形: 一种是面元  $dS$  为开表面, 这个开表面由一条闭合曲线  $C$  围成, 选择  $C$  的环行方向后, 按右手螺旋法则, 螺旋前进的方向为  $\mathbf{e}_n$  的方向; 另一种是面元  $dS$  为闭合面上的一个面元, 则  $\mathbf{e}_n$  取闭合面的外法线方向。

有了面元矢量的定义, 式 (1.11) 中矢量场  $\mathbf{A}$  通过面  $S$  的通量可以写为

$$\text{通量} = \int_S |\mathbf{A}| \cos\theta dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.13)$$

在直角坐标系中, 面元矢量  $d\mathbf{S}$  为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x dS_x + \mathbf{e}_y dS_y + \mathbf{e}_z dS_z \quad (1.14)$$

则式 (1.13) 为

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \cdot (\mathbf{e}_x dS_x + \mathbf{e}_y dS_y + \mathbf{e}_z dS_z) \\ &= \int_S (A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z) \end{aligned}$$

如果面  $S$  是一个闭合曲面, 则式 (1.14) 中的通量为

$$\text{通量} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.15)$$

如果通量  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} > 0$ , 表示穿出面  $S$  的矢量线数目大于穿入面  $S$  的矢量线数目, 说明面  $S$  所包围的体积中有产生该矢量场  $\mathbf{A}$  的净源; 如果通量  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} < 0$ , 表示穿出面  $S$  的矢量线数目小于穿入面  $S$  的矢量线数目, 说明面  $S$  所包围的体积中有产生该矢量场  $\mathbf{A}$  的负源 (负源也称为沟); 如果通量  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 表示穿出面  $S$  的矢量线数目等于穿入面  $S$  的矢量线数目, 说明面  $S$  所包围的体积中产生该矢量场  $\mathbf{A}$  的净源为 0, 即源和沟相等。

由式 (1.15) 得到的通量可以表示一个大范围内场和场源之间的关系。如果要知道产生矢量场  $\mathbf{A}$  的面  $S$  内的源, 只需要计算通量  $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。

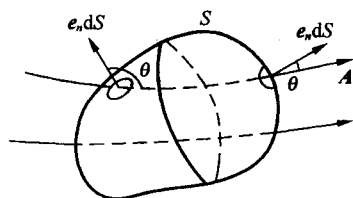


图 1.5 矢量的通量图

如果要知道产生矢量场  $A$  的每一点的源，就需要将面  $S$  所包围的体积缩为一个点，为此定义了散度。散度给出了每一点矢量场与产生该矢量场的源之间的关系。

### 1.2.3 矢量场的散度

**散度的定义** 设有矢量场  $A$ ，在场中任一点  $P$  处做一个包含该点的闭合面  $S$ ，设闭合面  $S$  所包围的体积为  $\Delta\tau$ 。当体积  $\Delta\tau$  以任意方式缩向点  $P$  时，每单位体积由闭合面  $S$  向外穿出的净通量为矢量场  $A$  在该点的散度，即

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot dS}{\Delta\tau} \quad (1.16)$$

散度  $\operatorname{div} A$  是一个标量，它给出了每一点矢量场与产生该矢量场的标量源之间的关系。散度之所以成为矢量分析的核心问题之一，就是因为它给出了场与产生场的源之间关系。由于散度只涉及标量源，所以，散度只是矢量分析核心问题的一部分而不是全部。

把产生矢量场的源分成两类，一类是标量源；一类是矢量源。例如，电荷是标量源，电流是矢量源。标量源与矢量场之间的关系用散度表示；矢量源与矢量场之间的关系用旋度（在 1.3 节讨论）表示。

式 (1.16) 为散度的定义式，下面在直角坐标系中推导其计算公式。 $\operatorname{div} A$  与  $\Delta\tau$  的形状无关，假设  $\Delta\tau$  以长方体  $\Delta x \Delta y \Delta z$  的方式缩向一个点（见图 1.6），分别计算三对表面穿出的通量。从左、右一对表面穿出的净通量为

$$-A_y \Delta z \Delta x + \left( A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \Delta x = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从上、下一对表面穿出的净通量为

$$-A_z \Delta x \Delta y + \left( A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从前、后一对表面穿出的净通量为

$$-A_x \Delta y \Delta z + \left( A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

故从长方体  $\Delta\tau$  内穿出的净通量为

$$\oint_S A \cdot dS = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

令  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot dS}{\Delta\tau} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

于是得到  $A$  的散度在直角坐标系中的计算公式为

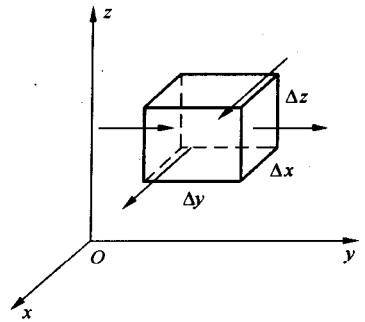


图 1.6 在直角坐标系中计算散度



$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.17)$$

为方便, 引入一个矢量微分算子 $\nabla$ ( $\nabla$ 称为哈密顿算子), 它在直角坐标系中表示为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.18)$$

$\nabla$ 是一个矢量, 根据矢量代数运算法则, 两个矢量之间可以进行矢量点积运算, 也即 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 可以看成是 $\nabla$ 与 $\mathbf{A}$ 这两个矢量的点积。根据式(1.7b), 在直角坐标系中有

$$\left( \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

也即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.19)$$

$\nabla \cdot \mathbf{A}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的散度。

**例 1.2** 已知矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ , 求:

(1)  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ;

(2) 计算通量 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。积分区域为闭合面 $S$ ,  $S$ 为一个球心在原点、半径为 $a$ 的球面。

**解** (1)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

(2)  $\mathbf{r}$ 的方向与 $d\mathbf{S}$ 的方向相同, 所以有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S a dS = a \oint_S dS = 4\pi a^3$$

#### 1.2.4 散度定理

在矢量分析中有许多矢量恒等式。矢量常用的恒等式已在附录 B 中列出, 散度定理就是其中的一个重要定理。

散度定理也称作高斯散度定理, 表示为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1.20)$$

式中积分区域 $\tau$ 为闭合面 $S$ 所包围的体积, 并假设 $\mathbf{A}$ 及其一阶导数连续。

散度定理是矢量场 $\mathbf{A}$ 积分形式和微分形式的结合, 它可以把一个体积分变换为一个闭合面积分。散度定理广泛用于将一个电磁场通量形式的积分方程转换为一个散度形式的微分方程。下面证明这个定理。首先将体积 $\tau$ 分成 $N$ 个足够小的体积元 $\Delta\tau$ , 其中第 $i$ 个以 $\Delta\tau_i$ 表示。由于 $\Delta\tau_i$ 足够小, 可以近似认为 $\Delta\tau_i$ 中的 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为同一个值, 于是由式(1.16)得到

$$\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} \Delta\tau_i$$

式中,  $S_i$ 是包围 $\Delta\tau_i$ 的外围面。考虑到有 $N$ 个 $\Delta\tau$ , 将它们的贡献叠加起来, 并让 $N \rightarrow \infty$ 、 $\Delta\tau_i \rightarrow 0$ , 得到