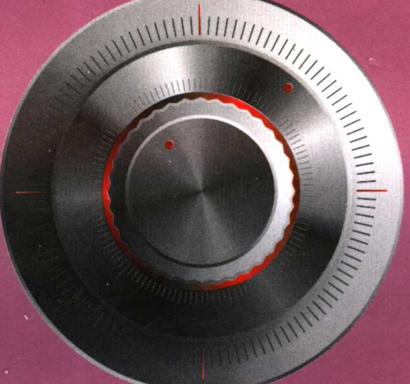
# 高考完全解读

## 王后雄考案

丛书策划：熊 辉

# 数学（文科）



**双色版**

依据教育部最新高考《考试大纲》学科标准

深度解读2007年全国各地高考试题考点命题规律

本册主编：王兴旺

**7月版**

根 据 2007年 6月

高考内容最新编写

X导航 丛书系列

中国青年出版社

王后雄考案

# 高考完全解读

双色版

## 数学(文科)


主　编：王兴旺
副主编：丁帮才
编　委：尤小军　郑远忠
余启贵　王　杰
王新得　阮晓峰


7月版
根据 2007年 6月
高考内容最新编写

导航丛书系列

中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

高考完全解读:2008年.数学(文科)/王兴旺主编.—北京:中国青年出版社,2007
("X"导航丛书系列)
ISBN 978-7-5006-7422-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第100713号

策　　划:熊　辉
责任编辑:李　杨
封面设计:小　河

高考完全解读
数　学(文科)

中国青年出版社 出版 发行
社址:北京东四12条21号　邮政编码:100708
网址:www.cyp.com.cn
编辑部电话:(010)64034328
北京中青人出版物发行有限公司电话:(010)64017809
三河市君旺印装厂印刷　新华书店经销
889×1194　1/16　22.25印张　603千字
2007年7月北京第1版　2007年7月第2次印刷
印数:10001—16000册
定价:32.70元

# 高考完全解读

——— 考试说明学生版

亲爱的读者，为了更好地把握高考改革的新趋势，我们根据最新高考《考试大纲》的变化推出了修订版《高考完全解读》。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战复习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

## 能力测试点

透视《考试大纲》"纲"、"目"要点，锁定高考考点100%，完全覆盖高考测试能力点。

### 高考考点解读—名师释疑答题点

《考试大纲》完全解密，知识、方法、能力核心要点诠释。

**1 知识要点**

**2 思维拓展**

**3 综合创新**

阐释高考《考试大纲》要点，以考纲为线索对高考的重难点知识及方法进行系统地归纳提炼，以解题思路和技巧为主线，给学生以知识性的精讲和能力方法上的点拨。

三层解读—高考"重点难点知识"、"思维要点热点"、"综合创新素质"，高考解题依据、答题技巧尽在其中！

**4 能力题型设计**

依据《考试大纲》提出相应的题型，精心设计层次试题，编选突出试题立意、能力立意的佳题，最大限度地对高考进行科学、等值训练。

难度系数 ★★★☆☆　　高考出现几率★★★☆☆

对每道预测题标明"难度系数"与"高考出现几率"，用星号的多少代表难度的高低和高考重现概率的大小。（最高为5星级）。

### 样板题解析—看看以前怎样考的

汇集全国高考及各地名卷最新名题、原创题、能力题，与左栏知识要点相互印证。

**名师诠释**

讲例对照、双栏排版、双色凸现"解题思维"、"解题依据"和"答题要点"，揭示高考命题规律，重点分析解题思路，优化解题过程，剖析高考命题技巧和答题技巧，让你站在高考命题专家的角度思考，使你的知识与能力同步增长。

披露常规题到高考题的变化过程，充分揭示高考要考的内容、方法和题型转化的技巧。

**点击考点**

双色凸现测试要点，方便您查阅解题依据，与讲、例相互印证。

当解题无措时，建议您参照提示，在"考点解读"栏中寻找解题依据和思路。

## 答案与提示

以高考"标准答案"为准，解题科学、典范，帮您养成规范答题的良好习惯，使您在高考答题中避免失分！

两年来的分省自主命题实践证明：分省命题改革不会影响考生备考，因为命题时统一执行的都是教育部颁布的《考试大纲》，《高考完全解读》就是证明分省命题不是问题的备考精品。

## 专家计划书

专家计划书诠释了最新高考命题范围及要求，把《高考完全解读》与"高考大纲"对照起来进行全程高效科学的复习。"备考说明"可以把你的复习效果及存在问题记录下来，以便针对性的强化补缺。专家慎重承诺：《高考完全解读》100%地覆盖全解《考试大纲》每一个考点。

谨此，祝您在高考中考出好成绩！

丛书主编：王后雄

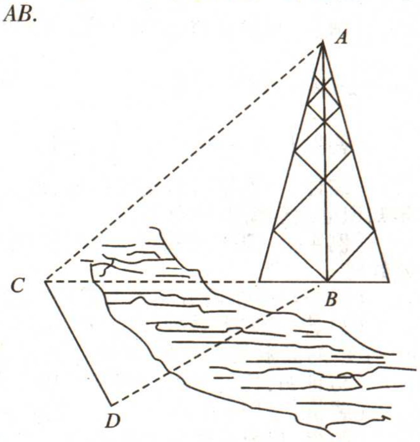
# 备考指南

2008年高考是高考实行部分省、市自主命题的第五年了.随着加入省份的逐步增多,各省、市的自主命题也积累了一些经验,明确了一些改革的方向,因此,结合新的考纲的变化,2008年高考数学命题也必然会进行相应的调整,但是高考长期坚持"以能力立意"的命题思想不会变,"总体保持稳定,深化能力立意,积极改革创新"的命题原则已深入人心.因此,虽然考纲、教材发生了少许变化,但是这种"稳中求改"、"稳中求变"的命题思想体现考试难度会有相对的稳定.纵观各省、市及全国近几年的高考试卷,我们不难预测2008年高考命题的趋势、走向及某些特点.因此我们的备考也要有针对性.

**一、全面覆盖、凸现重点**

国家考试中心数学科负责同志在"命题设计与考核能力要求"中强调:"重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体"."对数学基础知识的考查,要求全面但不刻意追求知识点的百分比,对支撑数学科知识体系的主干知识,考查时要保证较高的比例,并保持必要的深度,即重点知识重点考查,如函数关系与性质、空间线面关系、坐标方法的运用等内容都要保持较高的比例并达到必要的深度.……显示出重点知识在试卷中的突出位置."但从近几年高考试卷分析来看,相当一部分考生在答题中的一些失误并不是因缺乏灵活的思维和敏锐的感觉,而恰恰是因为对教学大纲中规定的基础知识、基本理论掌握还存在某些欠缺,甚至有所偏废所致.

[例1] (2007年高考·宁夏卷)如图,测量河对岸的塔高 $AB$ 时,可以选与塔底 $B$ 在同一水平面内的两个测点 $C$ 与 $D$.现测得 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BDC=\beta$, $CD=s$,并在点 $C$ 测得塔顶 $A$ 的仰角为 $\theta$,求塔高 $AB$.




[解] 在 $\triangle BCD$ 中,

$$\angle CBD=\pi-\alpha-\beta.$$

由正弦定理得

$$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD},$$

所以

$$BC=\frac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\frac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AB=BC\tan\angle ACB=\frac{s\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

[点评] 本题考查解斜三角形,源自课本.

[例2] (2007年高考·山东卷)某公司计划2008年在甲、乙两个电视台做总时间不超过300分钟的广告,广告总费用不超过9万元.甲、乙电视台的广告收费标准分别为500元/分钟和200元/分钟.假定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告,能给公司带来的收益分别为0.3万元和0.2万元.问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间,才能使公司的收益最大,最大收益是多少万元?

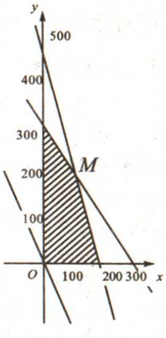
[解] 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 $x$ 分钟和 $y$ 分钟,总收益为 $z$ 元.由题意得

$$\begin{cases}x+y\leqslant300,\\500x+200y\leqslant90000,\\x\geqslant0,y\geqslant0.\end{cases}$$

目标函数为 $z=3000x+2000y$.

二元一次不等式组等价于

$$\begin{cases}x+y\leqslant300,\\5x+2y\leqslant900,\\x\geqslant0,y\geqslant0.\end{cases}$$




作出二元一次不等式组所表示的平面区域,即可行域,如图.

作直线 $l$:$3000x+2000y=0$,即 $3x+2y=0$.

平移直线 $l$,从图中可知,当直线 $l$ 过 $M$ 点时,目标函数取得最大值.

联立 $\begin{cases}x+y=300,\\5x+2y=900.\end{cases}$

解得 $x=100$, $y=200$.

$\therefore$ 点 $M$ 的坐标为 $(100,200)$

$\therefore z_{\max}=3000x+2000y=700000$(元).

答:该公司在甲电视台做100分钟广告,在乙电视台做200分钟广告,公司的收益最大,最大收益是70万元.

[点评] 考查简单的线性规划的应用,并未考查概率统计的应用题.

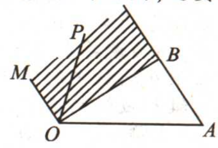
**《备考建议》重视课本与例题，充分发挥其基础性、示范性的功效.**

基础知识和基本训练是数学学习的主体，在复习备考中要用好课本、合理使用资料，注重基础知识，充分发挥教材中知识形成过程和例题的典型示范作用. 基本训练也要以课本典型题、考试样板题为主要素材，克服“眼高手低”的毛病. 事实上，高考试卷中许多试题都是课本上基本题目的直接引用或稍做变形. 复习备考过程中还应在掌握课本的基础上把各个局部知识按照一定的观点和方法组织成整体，形成知识体系，正如本书为大家设计的一样，虽然高考考查内容各有侧重，重点考点、重点章节凸现，但是全面复习、全面备考仍是稳妥之策，热与冷应辨证对待.

**二、突出能力，即时创新**

作为选拔性的高考，不仅是知识性的测试，而且测重于能力的考核，因此高考试题突出了能力立意. 能力立意能够保障知识考查，服务于能力考查，拓展了命题思路，选材开阔，不拘泥于学科知识的束缚，体现了高考命题的改革方向，即时出现的创新题和高考试题注入了新鲜的血液. 高考对能力的考查主要体现在：对数学思维和方法的考查，特别是“通性通法”的熟练掌握与灵活运用上；对学生继续学习能力的考查，即不但要考查学生学过的、见过的知识的综合与运用，还要考查课堂没有教过的和学生没有见过的，需要挖掘学生继续学习的潜能方面的一些问题.

**[例 3]** （2006 年高考·湖南卷）如图所示，$OM \parallel AB$，点 $P$ 在由射线 $OM$、线段 $OB$ 及 $AB$ 的延长线围成的阴影区域内（不含边界）运动，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x$ 的取值范围是__________；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y$ 的取值范围是__________.




**[解]** 由题意将 $\overrightarrow{OP}$ 按直线 $OA$、$OB$ 用平行四边形法则分解知 $x<0$ 才能满足已知. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ $=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=\left(-\frac{1}{2}+y\right)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AB}$，则 $0<-\frac{1}{2}+y<1$，$\therefore \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$.

**[答案]** $(-\infty,0)$，$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

**[点评]** 本题考查向量的加、减法运算的平行四边形法则、三角形法则. 背景新颖，对能力要求较高，特别是运用所学知识继续创新思维的能力.

**[例 4]** （2006 年高考·全国卷）在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1,a_2$ 是正整数，且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，$n=3,4,5,\cdots$，则称 $\{a_n\}$ 为“绝对差数列”.

(1) 举出一个前五项不为零的“绝对差数列”（只要求写出前十项）；

(2) 若“绝对差数列” $\{a_n\}$ 中，$a_{20}=3$，$a_{21}=0$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n=1,2,3,\cdots$，分别判断当 $n\to\infty$ 时，$a_n$ 与 $b_n$ 的极限是否存在，如果存在，求出其极限值；

(3) 证明：任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

**[解析]** (1) 解：$a_1=3$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=1$，$a_5=1$，$a_6=0$，$a_7=1$，$a_8=1$，$a_9=0$，$a_{10}=1$.（答案不惟一）

(2) 解：因为在绝对差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{20}=3$，$a_{21}=0$，所以自第 20 项开始，该数列是 $a_{20}=3$，$a_{21}=0$，$a_{22}=3$，$a_{23}=3$，$a_{24}=0$，$a_{25}=3$，$a_{26}=3$，$a_{27}=0$，$\cdots$. 即自第 20 项开始，每三个相邻的项周期地取值 3，0，3. 所以当 $n\to\infty$ 时，$a_n$ 的极限不存在. 当 $n\geqslant 20$ 时，$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$.

(3) 证明：根据定义，数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现零项，证明如下：假设 $\{a_n\}$ 中没有零项，由于 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，所以对于任意的 $n$，都有 $a_n\geqslant 1$，从而当 $a_{n-1}>a_{n-2}$ 时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1(n\geqslant 3)$；当 $a_{n-1}<a_{n-2}$ 时，$a_n=a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1(n\geqslant 3)$. 即 $a_n$ 的值要么比 $a_{n-1}$ 至少小 1，要么比 $a_{n-2}$ 至少小 1. 令 $c_n=\begin{cases}a_{2n-1}(a_{2n-1}>a_{2n}),\\a_{2n}(a_{2n-1}<a_{2n}),\end{cases}$ $n=1,2,3,\cdots$，则 $0<c_n\leqslant c_{n-1}-1(n=2,3,4,\cdots)$.

由于 $c_1$ 是确定的正整数，这样减少下去，必然存在某项 $c_n<0$，这与 $c_n>0(n=1,2,3,\cdots)$ 矛盾. 从而 $\{a_n\}$ 必有零项.
若第一次出现的零项为第 $n$ 项，记 $a_{n-1}=A(A\neq 0)$，则自第 $n$ 项开始，每三个相邻的项周期地取值 0，$A$，$A$，即 $\begin{cases}a_{n+3k}=0,\\a_{n+3k+1}=A,\\a_{n+3k+2}=A,\end{cases}$ $k=0,1,2,3,\cdots$，所以绝对差数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个为零的项.

**[点评]** 本题以提出一个新概念的方式来考查数列的概念及极限问题，即时创新、背景新颖，要求学生有良好的思维习惯、较强的继续学习及综合分析能力.

**《备考建议》要特别注意培养创新意识和实践能力**

高考能力考查始终摆在首要位置. 复习中应注重数学能力的培养和形成，使各种思维方法理性化、简捷化，善于抓住问题的关键，对问题提供的信息进行分检、组合和加工，寻找解题途径，从问题入手把握规律，理解问题的实质，掌握知识的灵活运用. 要把培养创新意识和实践能力作为基本目标，学会独立思考、增强用数学的意识，逐步学会用已有的数学知识去探索新的数学问题. 要特别重视良好的思维品质、规范的答题习惯的培养.

2008 年高考在即，科学备考将是你高考成功的关键. 希望我们为你精心设计的高考完全解读能为你的高考备考助上一臂之力！

# 专家计划书

## 数学“考试大纲”与复习全程指南对照表

### 一、集合与简易逻辑

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
| --- | --- | --- |
| 集合、子集、补集、交集. | 能力测试点1　集合的概念与运算 | |
| 逻辑联结词,四种命题 | 能力测试点3　逻辑联结词与四种命题 | |
| 充分条件和必要条件 | 能力测试点4　充要条件 | |

### 二、函　数

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
| --- | --- | --- |
| | 能力测试点5－1　映射 | |
| 映射 | 能力测试点5　映射与函数 | |
| 函数 | 能力测试点6　函数的解析式与定义域 | |
| | 能力测试点7　函数的值域和最值 | |
| 函数的单调性 | 能力测试点9　函数的单调性 | |
| 奇偶性 | 能力测试点8－1　奇函数、偶函数的概念 | |
| | 能力测试点8－3　判断函数的奇偶性的一般方法 | |
| | 能力测试点8－5　函数奇偶性的运用 | |
| 反函数、互为反函数的函数图象间的关系. | 能力测试点10　反函数 | |
| 指数概念的扩充,有理指数幂的运算性质,指数函数. | 能力测试点12－1　指数 | |
| | 能力测试点12－3　指数函数的图象和性质 | |
| | 能力测试点12－4　指数函数与二次函数复合而成的函数的性质 | |
| 对数、对数的运算性质,对数函数. | 能力测试点12－2　对数 | |
| | 能力测试点12－3　对数函数的性质 | |
| 函数的应用 | 能力测试点14　函数应用题 | |

### 三、数　列

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
| --- | --- | --- |
| 数列 | 能力测试点15　数列的概念 | |
| 等差数列及其通项公式,等差数列前$n$项和公式. | 能力测试点16　等差数列 | |
| 等比数列及其通项公式,等比数列前$n$项和公式. | 能力测试点17　等比数列 | |

| 四、三角函数 | | |
|---|---|---|
| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
| 角的概念的推广，弧度制．任意角的三角函数，单位圆中的三角函数线． | 能力测试点21　三角函数的概念 | |
| 同角三角函数的基本关系式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，$\tan\alpha\cot\alpha=1$．正弦、余弦的诱导公式． | 能力测试点22　同角三角函数的基本关系式与诱导公式 | |
| 两角和与差的正弦、余弦、正切．二倍角的正弦、余弦、正切． | 能力测试点23　三角函数的求值 | |
| 正弦函数、余弦函数的图象和性质．周期函数．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象．正切函数的图象和性质．已知三角函数值求角． | 能力测试点24　三角函数的图象<br>能力测试点25　三角函数的性质 | |
| 正弦定理．余弦定理．斜三角形解法． | 能力测试点31　正弦定理、余弦定理及应用 | |

| 五、平面向量 | | |
|---|---|---|
| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
| 向量．向量的加法与减法．实数与向量的积．平面向量的坐标表示． | 能力测试点27　向量的基本运算<br>能力测试点28　向量的坐标运算 | |
| 平面向量的数量积．平面两点间的距离． | 能力测试点29　平面向量的数量积 | |
| 线段的定比分点．平移． | 能力测试点30　线段的定比分点及平移 | |

| 六、不等式 | | |
|---|---|---|
| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
| 不等式．不等式的基本性质． | 能力测试点32　不等式的概念和性质 | |
| 不等式的证明． | 能力测试点34　不等式的证明方法 | |
| 不等式的解法． | 能力测试点35　整式、分式不等式的解法 | |
| 含绝对值的不等式． | 能力测试点36　绝对值不等式 | |

| 七、直线和圆的方程 | | |
|---|---|---|
| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
| 直线的倾斜角和斜率．直线方程的点斜式和两点式．直线方程的一般式． | 能力测试点38　直线的方程 | |
| 两条直线平行与垂直的条件．两条直线的交角．点到直线的距离． | 能力测试点39　两条直线的位置关系 | |
| 用二元一次不等式表示平面区域．简单的线性规划问题． | 能力测试点40　简单的线性规划及应用 | |
| 曲线与方程的概念．由已知条件列出曲线方程． | 能力测试点41　曲线和方程 | |
| 圆的标准方程和一般方程．圆的参数方程． | 能力测试点42　圆的方程 | |

## 八、圆锥曲线方程

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
|---|---|---|
| 椭圆及其标准方程.椭圆的简单几何性质.椭圆的参数方程. | 能力测试点43　椭　圆 | |
| 双曲线及其标准方程.双曲线的简单几何性质. | 能力测试点44　双曲线 | |
| 抛物线及其标准方程.抛物线的简单几何性质. | 能力测试点45　抛物线 | |

## 九、直线、平面、简单的几何体

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
|---|---|---|
| 平面及其基本性质.平面图形直观图的画法. | 能力测试点49　平面的基本性质 | |
| 平行直线.对应边分别平行的角.异面直线所成的角.异面直线的公垂线.异面直线的距离. | 能力测试点50　空间两条直线 | |
| 直线和平面平行的判定与性质. | 能力测试点51－3　直线与平面平行的判定与性质定理 | |
| 直线和平面垂直的判定与性质. | 能力测试点51－4　直线与平面垂直的判定与性质定理 | |
| 点到平面的距离. | 能力测试点54－2　有关点到直线,点到平面的距离的求法. | |
| 斜线在平面上的射影.直线和平面所成的角. | 能力测试点53－3　如何求直线与平面所成的角 | |
| 三垂线定理及其逆定理. | 能力测试点51－2　三垂线定理及其逆定理 | |
| 平行平面的判定与性质. | 能力测试点52－2　平面与平面平行的判定定理和性质定理 | |
| 平行平面间的距离. | 能力测试点54－4　两平行平面间的距离 | |
| 二面角及其平面角. | 能力测试点53－4　求二面角大小的一般方法<br>能力测试点53－5　未给棱的二面角的求法 | |
| 两个平面垂直的判定与性质. | 能力测试点52－3　平面与平面垂直的判定定理和性质定理 | |
| 多面体.正多面体.棱柱. | 能力测试点55　棱　柱 | |
| 棱锥 | 能力测试点56　棱　锥 | |
| 球 | 能力测试点57　球 | |

## 十、排列、组合和二项式定理

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | |
|---|---|---|
| 分类计数原理与分步计数原理. | 能力测试点60　两个计数原理 | |
| 排列.排列数公式.组合.组合数公式.组合数的两个性质. | 能力测试点61　排列与组合 | |
| 二项式定理.二项展开式的性质. | 能力测试点62　二项式定理 | |

## 十一、概 率

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
| --- | --- | --- |
| 随机事件的概率. 等可能性事件的概率.<br>互斥事件有一个发生的概率.<br>相互独立事件同时发生的概率. 独立重复试验. | 能力测试点63 随机事件的概率<br>能力测试点64 互斥事件有一个发生的概率<br>能力测试点65 相互独立事件同时发生的概率 | |

## 十二、统 计

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
| --- | --- | --- |
| 抽样方法<br>总体分布的估计<br>总体期望值和方差的估计 | 能力测试点66 抽样方法<br>能力测试点67 总体分布的估计、总体期望值与方差的估计 | |

## 十三、导 数

| 高考考试内容 | 高考完全解读·对照 | 复习效果 |
| --- | --- | --- |
| 导数的背景<br>导数的概念<br>多项式函数的导数<br>函数的单调性与极值<br>函数的最大值与最小值 | 能力测试点68 导数及其运算<br>能力测试点69 导数的应用 | |

CONTENTS

# 目录

## 第一章 集合与简易逻辑



## 第二章 函 数



## 第三章 数 列

CONTENTS

CONTENTS

CONTENTS

# 第一章　集合与简易逻辑

## 能力测试点1　集合的概念与运算

高考考点解读
名师释疑答题点

样板题解析
看看以前怎么考的

### 知识要点

**1 集合的概念及表示方法**

(1)某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

集合是数学中不加定义的基本概念.

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外,还可以是其他任何对象.

(2)集合的四种表示法.

这四种表示法是:列举法、描述法、区间表示法和图示法.通常我们会根据不同的需要来选用合适的方法来表示集合,一般地,表示有限集常用列举法;表示无限集常用描述法或区间表示法;描述抽象集常用图示法.正确认识一个集合的关键是理解集合中的元素特征.

(3)常用数集的表示方法.

①非负整数集(或自然数集)记作 $\mathbf{N}$;

②正整数集记作 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$);

③整数集记作 $\mathbf{Z}$;

④有理数集记作 $\mathbf{Q}$;

⑤实数集记作 $\mathbf{R}$.

**2 集合中元素的三要素**

我们知道集合中的元素必须具有三大特征"确定性,互异性,无序性".

(1)确定性:是指集合中的元素必须是确定的,即任何一个对象都能判断它是或不是某个集合的元素,二者必居其一.如"接近于0的实数"接近由于没有一个确定的界限,故0.001是否属于这个集合不能判断,所以这不能组成一个集合.

(2)互异性:是指集合中的元素互不相同,即同一个集合中不能出现同一个元素两次,如:$\{1,0,a^2\}$表示一个集合,即 $a\neq\pm1$ 且 $a\neq0$.

(3)无序性:集合中的元素无先后顺序,如$\{1,2\}$与$\{2,1\}$是同一个集合.

在集合的运算中,常用元素的互异性检验所得结论是否正确.

**3 元素与集合、集合与集合的关系**

(1)元素与集合的关系

元素与集合之间的关系用 $\in$、$\notin$ 来表示,注意不要与集合与集合之间的关系发生混淆.若 $a$ 是集合 $A$ 中的元素则表示为 $a\in A$,否则表示为 $a\notin A$(或 $a\bar{\in} A$),判断元素与集合的属于与否,主

### 名师诠释

❖ [考题1]　(1)设 $S=\{x\mid 2x+1>0\}$,$T=\{x\mid 3x-5<0\}$,则 $S\cap T=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{5}{3}\right\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\right\}$

(2007年全国高考题Ⅰ)

(2)若 $A=\{x\mid x^2=1\}$,$B=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$,则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{-1\}$

(2007年安徽高考题)

(3)集合 $M=\{Ax+By+C=0\mid A^2+B^2\neq0$ 且 $A,B\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x-1)^2+(y-1)^2=a\mid a>0\}$,则 $M\cap N$ 的元素的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 0或1或2

(2006年上海春季高考题)

[解析]　(1)由 $2x+1>0$ 知 $x>-\frac{1}{2}$,$\therefore S=\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{1}{2}\right\}$

由 $3x-5<0$ 知 $x<\frac{5}{3}$,$\therefore T=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{5}{3}\right\}$

故 $S\cap T=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\right\}$,故选D.

(2)由 $x^2=1$ 得 $x=\pm1$,$\therefore A=\{1,-1\}$.

由 $x^2-2x-3=0$ 得 $x=3$ 或 $x=-1$,$\therefore B=\{3,-1\}$.

故 $A\cap B=\{-1\}$,选D.

(3)由于集合 $M$ 的元素的形式是直线,而集合 $N$ 的元素的形式是圆,因而它们元素形式不同,$\therefore M\cap N=\varnothing$,故选A.

[点评]　解决用符号描述法表示的集合的问题,易错的是没有弄清集合的元素所具有的形式,而把注意力放在元素所具有的属性 $p(x)$ 上,如本例(2)、(3).为了提醒大家在解题时首先注意到这点,特此提炼出元素分析法——即解题前先分析元素所具有的形式,属性如何?解题后检验元素是否满足它的三性(确定性、互异性、无序性).元素分析法能使我们解题达到最优化.

❖ [考题2]　已知集合 $M=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x\mid x=3n-1,n\in\mathbf{Z}\}$,且 $a\in M,b\in N,c\in P$.设 $d=a-b+c$,则(　　).

A. $d\in M$　　B. $d\in N$　　C. $d\in P$　　D. 以上都不对

[解析]　要判断 $d=a-b+c$ 与集合之间的关系,只要看 $d$ 能否写成 $3n,3n+1,3n-1,n\in\mathbf{Z}$ 的形式即可.而 $a$、$b$、$c$ 分别是 $M$、$N$、$P$ 中元素,分别可以写成 $3n,3m+1,3s-1,m$、$n$、$s\in\mathbf{Z}$ 的形式,对它们进行运算即可.

设 $a=3n,b=3m+1,c=3s-1,m,n,s\in\mathbf{Z}$.

则 $d=3n-(3m+1)+(3s-1)$

$=3(n-m+s)-2$

$=3(n-m+s-1)+1$.

$\therefore d\in N$.选B.

❖ [考题3]　已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$,则 $M$、$N$、$P$ 满足关系(　　).

要通过元素的确定性去分析.

(2)集合与集合之间的关系

①集合的相等与包含是两个重要的命题点,二者之间既有联系又有区别.一般地,两个集合 $A$ 与 $B$ 的相等等价于它们互相包含,即"$A=B$"$\Leftrightarrow$"$A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$";用元素反映即"$A=B$"$\Leftrightarrow$"任意 $a\in A$,必有 $a\in B$,且任意 $b\in B$,必有 $b\in A$".这是证明两个集合相等的依据.

②子集反映的即是包含关系.当题设的条件或结论中出现 $A\subseteq B$(或 $A\subsetneqq B$)这就表明集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集(或真子集),反之亦然.子集有真子集与非真子集之别,这在解题时尤其要引起注意,$A$ 是 $B$ 的真子集常用真包含关系 $A\subsetneqq B$ 反映,对于包含关系和子集问题要注意两个集合的先后顺序,即要区别谁是谁的子集,否则极易导致错误.

③空集是任意一个集合的子集,是任意一个非空集合的真子集,这一点也是解题中容易被忽略的.

## 2 思维拓展

### ④集合运算中的常用结论

(1)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

(2)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$　$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

(3)由 $n$ 个元素所组成的集合,其子集个数为 $2^n$ 个,即是 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

(4)空集$\varnothing$是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$,这个结论在解集中容易被忽略.

结论(1)、(2)常常是作为"等价转化"的依据,若已知 $A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$,参看[考题5].

结论(3)是集合与组合数的综合运用的结果,用以计算集合子集的个数.

[例]　同时满足 $\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 $A$ 的个数是______个.

[解析]　因为 $A\supsetneqq\{1\}$,故满足条件的集合 $A$ 的个数实质上是 $\{2,3,4,5\}$ 的真子集的个数,即为 $2^4-1=15$ 个.

### ⑤数形结合在集合中的应用

集合中运用数形结合的思想解题,主要体现在如下两个方面:

(1)数轴的运用.运用数轴解题时,要注意"端点"的取与舍.

(2)韦恩图的运用.已知集合运算式(如 $A\cap B$,$A\cup B$ 等)能作出相应的韦恩图;已知韦恩图能写出相应的集合运算式.

利用韦恩图可计算集合中元素的个数,有如下公式:$\text{card}(A\cup B)=\text{card}A+\text{card}B-\text{card}(A\cap B)$.

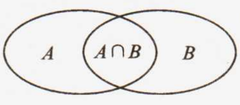



图 1－1

其中 card$A$ 表示集合 $A$ 中元素的个数,上述公式可用如图 1－1 所示加以说明.

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

**[解析]**　解法一:(可从判断元素的共性和差异入手)对于集合 $M$:

$\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$;

对于集合 $N$:$\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{3n-2}{6}=\dfrac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$;

对于集合 $P$:$\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$.

由于 $3(n-1)+1$ 和 $3p+1$ 都表示被 3 除余 1 的数,而 $6m+1$ 表示被 6 除余 1 的数,所以 $M\subsetneqq N=P$,故应选 B.

解法二:(简单列举集合中的元素)$M=\left\{\cdots,\dfrac{1}{6},\dfrac{7}{6},\dfrac{13}{6},\cdots\right\}$,$N=\left\{\cdots,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3},\cdots\right\}$,$P=\left\{\cdots,\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{6},\cdots\right\}$,因此选 B.

**[点评]**　处理此类问题一般有两种方法:一是化简集合,从表达式中找两集合的关系;二是用列举法表示各集合,从元素中寻找关系.由于思路二只是停留在最初的归纳阶段,没有从理论上解决问题,因此提倡思路一,但思路二入手较易,不失为一种解客观题的好方法.

**[考题4]**　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|x^2-mx+2=0\}$,若 $A\cap B=B$,求 $m$ 的取值范围.

**[解析]**　$\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$.

$\because A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,$\therefore B=\varnothing$或$\{1\}$或$\{2\}$或$\{1,2\}$.

当 $B=\varnothing$时,需 $m^2-8<0$,$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$;

当 $B=\{1\}$时,需$\begin{cases}m^2-8=0\\3-m=0\end{cases}$(舍去);

当 $B=\{2\}$时,需$\begin{cases}m^2-8=0\\6-2m=0\end{cases}$(舍去);

当 $B=\{1,2\}$时,有 $m=3$.

综上可知,$m$ 的取值范围是 $m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

**[点评]**　将 $A\cap B=B$ 转化为 $B\subseteq A$,并且 $B=\varnothing$也满足,讨论时不要遗漏.空集就像一个无处不在的幽灵,要处处设防,时刻提高警惕,才不至于掉进空集的陷阱之中.如再解与子集有关的问题时,一定提醒自己:子集中是否考虑了空集这一特殊子集.

**[考题5]**　设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,若 $S$、$P$ 满足 $S\cap P=\{2\}$,$(\complement_U S)\cap P=\{4\}$,$(\complement_U S)\cap(\complement_U P)=\{1,5\}$,则(　　).

A. $3\in S,3\in P$　　B. $3\in S,3\notin P$

C. $3\notin S,3\in P$　　D. $3\notin S,3\notin P$

**[解析]**　将全集中各个元素划分到每个区域是解决本题的关键.

数形结合,如图 1－3 所示,$S$、$P$ 将全集分为四个区域:$S\cap P$、$(\complement_U S)\cap P$、$(\complement_U P)\cap S$、$(\complement_U S)\cap(\complement_U P)$,将各部分元素分别填入,知 $3\in S\cap(\complement_U P)$,故选 B.

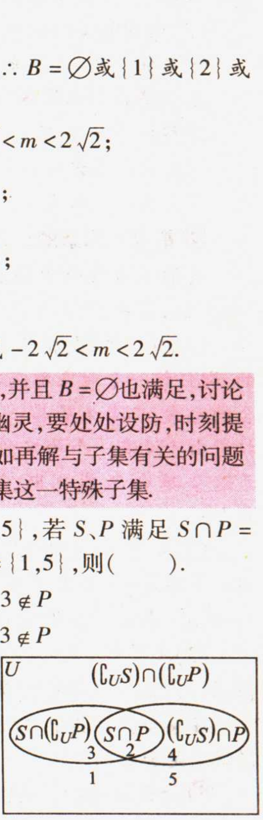



图 1－3

**[点评]**　熟悉韦恩图中各区域内元素的属性,可以避开复杂的推理过程,帮助我们快速解决相关问题.

## 3 综合创新

### 6 集合语言与集合思想的应用

集合问题要重视集合语言的准确理解，可翻译成大家熟悉的代数语言或几何语言.

［例 1］ $A=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in\mathbf{R}\}=\{2\}$，表示方程 $x^2+px+q=0$ 有两个相等的根（$\Delta=0$），且根为 2.（$2^2+2p+q=0$）

［例 2］ 设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为（　　）.

（2004 年全国Ⅲ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

［解析］ $M\cap N$ 中元素的个数，就是两图象——单位圆 $x^2+y^2=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点个数，即为 2 个，选 B.

［例 3］ 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x^2+a}{x-4}=1,x\in\mathbf{R}\right\}$ 为单元素集.

［解］ 首先由 $\dfrac{x^2+a}{x-4}=1$ 得

$$x^2-x+4+a=0. \quad ①$$

若 $A$ 为单元素集，则方程①有两个不等于 4 的相同根或方程有两个不等根且其中有一根为 4.

［点评］ 将例 1、例 2 的集合语言转化为代数或几何语言较例 3 容易，对于例 3，容易遗漏后半部分——方程有两不等根且其中有一根为 4.

### 7 集合的开放题

集合考题中常出现一些创新题目，主要是一些信息迁移题，此类题能有效地考查考生接受信息以及类比迁移能力和继续学习的潜能，同时也体现了《考试大纲》对创新能力的考查.

［例］ 定义 $M-N=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin N\}$，则集合 $M-(M-N)=$（　　）.

A. $M$　　B. $N$

C. $M\cap N$　　D. $\varnothing$

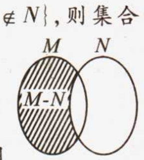


图 1－2

［解析］ 由图 1－2 可知 $M-N$ 如图的阴影部分所示，所以 $M-(M-N)=M\cap N$. 故选 C.

❖［考题 6］ 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $A\cap B\subseteq C$，求实数 $a$ 的取值范围.

［解析］ 集合 $A,B,C$ 中的元素均是用不等式描述的，$A,B$ 中不含参数，可先求出 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，

$B=\{x\mid x>2$ 或 $x<-4\}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

又 $C=\{x\mid (x-a)(x-3a)<0\}$.

欲使 $A\cap B\subseteq C$，须分类讨论：

①当 $a>0$ 时，$C=\{x\mid a<x<3a\}$，结合数轴知

$\begin{cases}a\leqslant 2,\\3a\geqslant 3,\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant a\leqslant 2$；

②当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，不合题意；

③当 $a<0$ 时，$C=\{x\mid 3a<x<a\}$，结合数轴知

$\begin{cases}3a\leqslant 2,\\a\geqslant 3,\end{cases}$ 无解.

综上，$a$ 的取值范围是 $[1,2]$.

［点评］ 有些含参数的集合问题很难从整体入手，需要分割处理，把整体科学合理地划分为若干个局部问题独立解决，以达到整体问题的解决，这种重要的数学思想方法就是分类讨论的方法，要学会运用这种思维方法.

❖［考题 7］ 设全集 $I=\{1,2,3,\cdots,9\}$，$A$、$B$ 是 $I$ 的子集，若 $A\cap B=\{1,2,3\}$，就称集对 $(A,B)$ 为"好集"，那么所有好集的个数为（　　）.

A. 6!　　B. $6^2$　　C. $2^6$　　D. $3^6$

［解析］ 要使 $A\cap B=\{1,2,3\}$，必须满足集合 $A$、$B$ 中都含有元素 1,2,3，且对全集中的其他 6 个元素 4,5,6,7,8,9 中的每个元素，要么在集合 $A$ 中，要么在集合 $B$ 中或不在集合 $A$、$B$ 中，这三种情况只能选其一，于是这 6 个元素所处集合的不同情况为 $3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6$. 而这 6 个元素所处不同集合的个数即为好集的不同个数. 故应选 D.

［点评］ 新概念的引入不仅要求能深入理解新概念的信息，而且要能够调出已学习过的"旧"概念，进行相互对照. 此类考题的关键在于一个"新"字，即背景新、概念新、题型新. 解题时不要被"新"所迷惑，在理解与领会该概念后，掩藏在"新"的外衣下的往往是极为简单的知识点.

## 4 能力题型设计

［预测 1］已知集合 $S=\{x\in\mathbf{R}\mid x+1\geqslant 2\}$，$T=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $S\cap T=$（　　）.

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

难度系数 ★★☆☆☆　高考出现几率 ★★★★★

［预测 2］集合 $P=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$，若对于运算"＊"："若 $a\in P,b\in P$，则 $a*b\in P$"，则运算"＊"可以是：（　　）.

A. 加法　　B. 减法

C. 除法　　D. 乘法

难度系数 ★★★☆☆　高考出现几率 ★★★★☆

**点击考点**

测试要点 1、4　2007 年天津高考题

测试要点 4、5　2007 年崇文区高三期末

测试要点 3、7　2007 年湖北八校联考

测试要点 3、4　2006 年安徽文

［预测 3］设集合 $A=\{x\mid x^2-x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+x=0\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\{0\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\varnothing$

难度系数 ★★★☆☆　高考出现几率 ★★★★★

［预测 4］设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $S=\{1,3,5\}$，$T=\{3,6\}$，则 $\complement_U(S\cup T)$ 等于（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{2,4,7,8\}$

C. $\{1,3,5,6\}$　　D. $\{2,4,6,8\}$

难度系数 ★★★☆☆　高考出现几率 ★★★★☆