

# 高考完全解读

王后雄考案

丛书策划：熊辉

数学（文科）



双色版

依据教育部最新高考《考试大纲》学科标准  
深度解读2007年全国各地高考试题考点命题规律

本册主编：王兴旺

**7月版**  
根据2007年6月  
高考内容最新编写



中国青年出版社

王后雄考案



# 高考完全解读



双色版

## 数学(文科)

主 编：王 兴 旺  
副 主 编：丁 帮 才  
编 委：尤 小 军 郑 远 忠  
余 启 贵 王 杰  
王 新 得 阮 晓 峰

7月版

根据 2007 年 6 月  
高考内容最新编写



导航 丛书系列

中国青年出版社

**(京)新登字 083 号**

**图书在版编目(CIP)数据**

高考完全解读:2008年.数学(文科)/王兴旺主编.一北京:中国青年出版社,2007  
(“X”导航丛书系列)

ISBN 978-7-5006-7422-1

I. 高… II. 王… III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 100713 号

策 划:熊 辉  
责任编辑:李 杨  
封面设计:小 河

**高考完全解读**  
**数 学(文科)**

中国青年出版社 出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

编辑部电话:(010)64034328

北京中青人出版物发行有限公司电话:(010)64017809

三河市君旺印装厂印刷 新华书店经销

889×1194 1/16 22.25 印张 603 千字

2007 年 7 月北京第 1 版 2007 年 7 月第 2 次印刷

印数:10001—16000 册

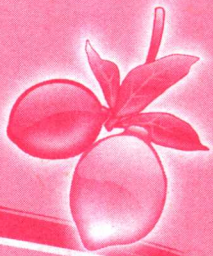
定价:32.70 元

本书如有任何印装质量问题,请与出版部联系调换

联系电话:(010)84035821



# 备考指南



2008年高考是高考实行部分省、市自主命题的第五年了。随着加入省份的逐步增多,各省、市的自主命题也积累了一些经验,明确了一些改革的方向,因此,结合新的考纲的变化,2008年高考数学命题也必然会进行相应的调整,但是高考长期坚持“以能力立意”的命题思想不会变,“总体保持稳定,深化能力立意,积极改革创新”的命题原则已深入人心。因此,虽然考纲、教材发生了少许变化,但是这种“稳中求改”、“稳中求变”的命题思想体现考试难度会有相对的稳定。纵观各省、市及全国近几年的高考试卷,我们不难预测2008年高考命题的趋势、走向及某些特点。因此我们的备考也要有针对性。

## 一、全面覆盖、凸现重点

国家考试中心数学科负责同志在“命题设计与考核能力要求”中强调:“重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体。”“对数学基础知识的考查,要求全面但不刻意追求知识点的百分比,对支撑数学科知识体系的主干知识,考查时要保证较高的比例,并保持必要的深度,即重点知识重点考查,如函数关系与性质、空间线面关系、坐标方法的运用等内容都要保持较高的比例并达到必要的深度。……显示出重点知识在试卷中的突出位置。”但从近几年高考试卷分析来看,相当一部分考生在答题中的一些失误并不是因缺乏灵活的思维和敏锐的感觉,而恰恰是因为对教学大纲中规定的基础知识、基本理论掌握还存在某些欠缺,甚至有所偏废所致。

**[例1]** (2007年高考·宁夏卷)如图,测量河对岸的塔高 $AB$ 时,可以选与塔底 $B$ 在同一水平面内的两个测点 $C$ 与 $D$ 。现测得 $\angle BCD = \alpha$ ,  $\angle BDC = \beta$ ,  $CD = s$ ,并在点 $C$ 测得塔顶 $A$ 的仰角为 $\theta$ ,求塔高 $AB$ 。

**[解]** 在 $\triangle BCD$ 中,

$$\angle CBD = \pi - \alpha - \beta.$$

由正弦定理得

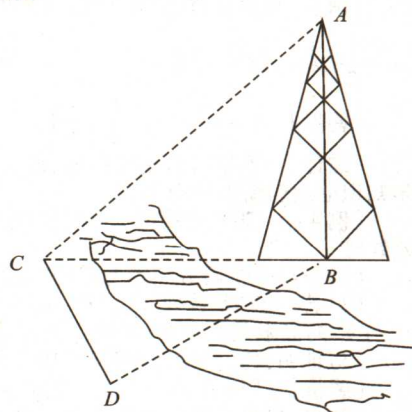
$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{CD}{\sin \angle CBD},$$

所以

$$\begin{aligned} BC &= \frac{CD \sin \angle BDC}{\sin \angle CBD} \\ &= \frac{s \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\begin{aligned} AB &= BC \tan \angle ACB \\ &= \frac{s \cdot \tan \theta \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$



**[点评]** 本题考查解斜三角形,源自课本。

**[例2]** (2007年高考·山东卷)某公司计划2008年在甲、乙两个电视台做总时间不超过300分钟的广告,广告总费用不超过9万元。甲、乙电视台的广告收费标准分别为500元/分钟和200元/分钟。假定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告,能给公司带来的收益分别为0.3万元和0.2万元。问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间,才能使公司的收益最大,最大收益是多少万元?

**[解]** 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 $x$ 分钟和 $y$ 分钟,总收益为 $z$ 元。由题意得

$$\begin{cases} x + y \leq 300, \\ 500x + 200y \leq 90000, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

目标函数为  $z = 3000x + 2000y$ .

二元一次不等式组等价于

$$\begin{cases} x + y \leq 300, \\ 5x + 2y \leq 900, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域,即可行域,如图。

作直线 $l: 3000x + 2000y = 0$ ,即 $3x + 2y = 0$ .

平移直线 $l$ ,从图中可知,当直线 $l$ 过 $M$ 点时,目标函数取得最大值。

联立 
$$\begin{cases} x + y = 300, \\ 5x + 2y = 900. \end{cases}$$

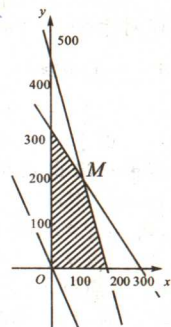
解得  $x = 100, y = 200$ .

$\therefore$  点 $M$ 的坐标为 $(100, 200)$

$\therefore z_{\max} = 3000x + 2000y = 700000$ (元).

答:该公司在甲电视台做100分钟广告,在乙电视台做200分钟广告,公司的收益最大,最大收益是70万元。

**[点评]** 考查简单的线性规划的应用,并未考查概率统计的应用题。



### 《备考建议》重视课本与例题,充分发挥其基础性、示范性的功效.

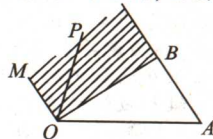
基础知识和基本训练是数学学习的主体,在复习备考中要用好课本、合理使用资料,注重基础知识,充分发挥教材中知识形成过程和例题的典型示范作用.基本训练也要以课本典型题、考试样板题为主要素材,克服“眼高手低”的毛病.事实上,高考试卷中许多试题都是课本上基本题目的直接引用或稍做变形.复习备考过程中还应在掌握课本的基础上把各个局部知识按照一定的观点和方法组织成整体,形成知识体系,正如本书为大家设计的一样,虽然高考考查内容各有侧重,重点考点、重点章节凸现,但是全面复习、全面备考仍是稳妥之策,热与冷应辩证对待.

### 二、突出能力,即时创新

作为选拔性的高考,不仅是知识性的测试,而且侧重于能力的考核,因此高考试题突出了能力立意.能力立意能够保障知识考查,服务于能力考查,拓展了命题思路,选材开阔,不拘泥于学科知识的束缚,体现了高考命题的改革方向,即时出现的创新题和高考试题注入了新鲜的血液.高考对能力的考查主要体现在:对教学思维和方法的考查,特别是“通性通法”的熟练掌握与灵活运用上;对学生继续学习能力的考查,即不但要考查学生学过的、见过的知识的综合与运用,还要考查课堂没有教过的和学生没有见过的,需要挖掘学生继续学习的潜能方面的一些问题.

【例3】(2006年高考·湖南卷)如图所示, $OM \parallel AB$ ,点P在由射线OM、线段OB及AB的延长线围成的阴影区域内(不含边界)运动,且 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ,则x的取值范围是\_\_\_\_\_;

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,y的取值范围是\_\_\_\_\_.



【解】由题意将 $\vec{OP}$ 按直线OA、OB用平行四边形法则分解知 $x < 0$ 才能满足已知.当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,由 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} = -\frac{1}{2}\vec{OA} + y(\vec{OA} + \vec{AB}) = (-\frac{1}{2} + y)\vec{OA} + y\vec{AB}$ ,则 $0 < -\frac{1}{2} + y < 1, \therefore \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$ .

【答案】 $(-\infty, 0), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

【点评】本题考查向量的加、减法运算的平行四边形法则、三角形法则.背景新颖,对能力要求较高,特别是运用所学知识继续创新思维的能力.

【例4】(2006年高考·全国卷)在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_1, a_2$ 是正整数,且 $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|, n = 3, 4, 5, \dots$ ,则称 $\{a_n\}$ 为“绝对差数列”.

(1)举出一个前五项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前十项);

(2)若“绝对差数列” $\{a_n\}$ 中, $a_{20} = 3, a_{21} = 0$ ,数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$ ,分别判断当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n$ 与 $b_n$ 的极限是否存在,如果存在,求出其极限值;

(3)证明:任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

【解析】(1)解: $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 0, a_7 = 1, a_8 = 1, a_9 = 0, a_{10} = 1$ . (答案不惟一)

(2)解:因为在绝对差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{20} = 3, a_{21} = 0$ ,所以自第20项开始,该数列是 $a_{20} = 3, a_{21} = 0, a_{22} = 3, a_{23} = 3, a_{24} = 0, a_{25} = 3, a_{26} = 3, a_{27} = 0, \dots$ .即自第20项开始,每三个相邻的项周期地取值3,0,3.所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n$ 的极限不存在.当 $n \geq 20$ 时, $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 6$ ,所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6$ .

(3)证明:根据定义,数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现零项,证明如下:假设 $\{a_n\}$ 中没有零项,由于 $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|$ ,所以对于任意的n,都有 $a_n \geq 1$ ,从而当 $a_{n-1} > a_{n-2}$ 时, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \leq a_{n-1} - 1 (n \geq 3)$ ;当 $a_{n-1} < a_{n-2}$ 时, $a_n = a_{n-2} - a_{n-1} \leq a_{n-2} - 1 (n \geq 3)$ .即 $a_n$ 的值要么比 $a_{n-1}$ 至少小1,要么比 $a_{n-2}$ 至少小1.令 $c_n = \begin{cases} a_{2n-1} (a_{2n-1} > a_{2n}), \\ a_{2n} (a_{2n-1} < a_{2n}), \end{cases} n = 1, 2, 3, \dots$ ,则 $0 < c_n \leq c_{n-1} - 1 (n = 2, 3, 4, \dots)$ .

由于 $c_1$ 是确定的正整数,这样减少下去,必然存在某项 $c_n < 0$ ,这与 $c_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 矛盾.从而 $\{a_n\}$ 必有零项.若第一次出现的零项为第n项,记 $a_{n-1} = A (A \neq 0)$ ,则自第n项开始,每三个相邻的项周期地取值0, A, A,即

$\begin{cases} a_{n+3k} = 0, \\ a_{n+3k+1} = A, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$ 所以绝对差数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个为零的项.

【点评】本题以提出一个新概念的方式来考查数列的概念及极限问题,即时创新、背景新颖,要求学生有良好的思维习惯、较强的继续学习及综合分析能力.

### 《备考建议》要特别注意培养创新意识和实践能力

高考能力考查始终摆在首要位置.复习中应注重数学能力的培养和形成,使各种思维方法理性化、简洁化,善于抓住问题的关键,对问题提供的信息进行分检、组合和加工,寻找解题途径,从问题入手把握规律,理解问题的实质,掌握知识的灵活运用.要把培养创新意识和实践能力作为基本目标,学会独立思考、增强用数学的意识,逐步学会用已有的数学知识去探索新的数学问题.要特别重视良好的思维品质、规范的答题习惯的培养.

2008年高考在即,科学备考将是你高考成功的关键.希望我们为你精心设计的高考完全解读能为你的高考备考助上一臂之力!

# 专家计划书

## 数学“考试大纲”与复习全程指南对照表

一、集合与简易逻辑		
高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
集合、子集、补集、交集. 逻辑联结词,四种命题 充分条件和必要条件	能力测试点1 集合的概念与运算 能力测试点3 逻辑联结词与四种命题 能力测试点4 充要条件	
二、函数		
高考考试内容	高考完全解读·对照	
映射 函数 函数的单调性 奇偶性 反函数、互为反函数的函数图象间的关系. 指数概念的扩充,有理指数幂的运算性质,指数函数. 对数、对数的运算性质,对数函数. 函数的应用	能力测试点5-1 映射 能力测试点5 映射与函数 能力测试点6 函数的解析式与定义域 能力测试点7 函数的值域和最值 能力测试点9 函数的单调性 能力测试点8-1 奇函数、偶函数的概念 能力测试点8-3 判断函数的奇偶性的一般方法 能力测试点8-5 函数奇偶性的运用 能力测试点10 反函数 能力测试点12-1 指数 能力测试点12-3 指数函数的图象和性质 能力测试点12-4 指数函数与二次函数复合而成的函数的性质 能力测试点12-2 对数 能力测试点12-3 对数函数的性质 能力测试点14 函数应用题	
三、数列		
高考考试内容	高考完全解读·对照	
数列 等差数列及其通项公式,等差数列前 $n$ 项和公式. 等比数列及其通项公式,等比数列前 $n$ 项和公式.	能力测试点15 数列的概念 能力测试点16 等差数列 能力测试点17 等比数列	

## 四、三角函数

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
角的概念的推广,弧度制.任意角的三角函数,单位圆中的三角函数线. 同角三角函数的基本关系式: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha, \tan\alpha \cot\alpha = 1$ . 正弦、余弦的诱导公式. 两角和与差的正弦、余弦、正切.二倍角的正弦、余弦、正切. 正弦函数、余弦函数的图象和性质.周期函数.函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.正切函数的图象和性质.已知三角函数值求角. 正弦定理.余弦定理.斜三角形解法.	能力测试点 21 三角函数的概念 能力测试点 22 同角三角函数的基本关系式与诱导公式 能力测试点 23 三角函数的求值 能力测试点 24 三角函数的图象 能力测试点 25 三角函数的性质 能力测试点 31 正弦定理、余弦定理及应用	

## 五、平面向量

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
向量.向量的加法与减法.实数与向量的积.平面向量的坐标表示. 平面向量的数量积.平面两点间的距离. 线段的定比分点.平移.	能力测试点 27 向量的基本运算 能力测试点 28 向量的坐标运算 能力测试点 29 平面向量的数量积 能力测试点 30 线段的定比分点及平移	

## 六、不等式

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
不等式.不等式的基本性质. 不等式的证明. 不等式的解法. 含绝对值的不等式.	能力测试点 32 不等式的概念和性质 能力测试点 34 不等式的证明方法 能力测试点 35 整式、分式不等式的解法 能力测试点 36 绝对值不等式	

## 七、直线和圆的方程

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
直线的倾斜角和斜率.直线方程的点斜式和两点式.直线方程的一般式. 两条直线平行与垂直的条件.两条直线的交角.点到直线的距离. 用二元一次不等式表示平面区域.简单的线性规划问题. 曲线与方程的概念.由已知条件列出曲线方程. 圆的标准方程和一般方程.圆的参数方程.	能力测试点 38 直线的方程 能力测试点 39 两条直线的位置关系 能力测试点 40 简单的线性规划及应用 能力测试点 41 曲线和方程 能力测试点 42 圆的方程	



## 八、圆锥曲线方程

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
椭圆及其标准方程. 椭圆的简单几何性质. 椭圆的参数方程.	能力测试点 43 椭圆	
双曲线及其标准方程. 双曲线的简单几何性质.	能力测试点 44 双曲线	
抛物线及其标准方程. 抛物线的简单几何性质.	能力测试点 45 抛物线	

## 九、直线、平面、简单的几何体

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
平面及其基本性质. 平面图形直观图的画法.	能力测试点 49 平面的基本性质	
平行直线. 对应边分别平行的角. 异面直线所成的角. 异面直线的公垂线. 异面直线的距离.	能力测试点 50 空间两条直线	
直线和平面平行的判定与性质.	能力测试点 51-3 直线与平面平行的判定与性质定理	
直线和平面垂直的判定与性质.	能力测试点 51-4 直线与平面垂直的判定与性质定理	
点到平面的距离.	能力测试点 54-2 有关点到直线, 点到平面的距离的求法.	
斜线在平面上的射影. 直线和平面所成的角.	能力测试点 53-3 如何求直线与平面所成的角	
三垂线定理及其逆定理.	能力测试点 51-2 三垂线定理及其逆定理	
平行平面的判定与性质.	能力测试点 52-2 平面与平面平行的判定定理和性质定理	
平行平面间的距离.	能力测试点 54-4 两平行平面间的距离	
二面角及其平面角.	能力测试点 53-4 求二面角大小的一般方法	
	能力测试点 53-5 未给棱的二面角的求法	
两个平面垂直的判定与性质.	能力测试点 52-3 平面与平面垂直的判定定理和性质定理	
多面体. 正多面体. 棱柱.	能力测试点 55 棱柱	
棱锥	能力测试点 56 棱锥	
球	能力测试点 57 球	

## 十、排列、组合和二项式定理

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
分类计数原理与分步计数原理.	能力测试点 60 两个计数原理	
排列. 排列数公式. 组合. 组合数公式. 组合数的两个性质.	能力测试点 61 排列与组合	
二项式定理. 二项展开式的性质.	能力测试点 62 二项式定理	

## 十一、概 率

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
随机事件的概率. 等可能性事件的概率. 互斥事件有一个发生的概率. 相互独立事件同时发生的概率. 独立重复试验.	能力测试点 63 随机事件的概率 能力测试点 64 互斥事件有一个发生的概率 能力测试点 65 相互独立事件同时发生的概率	

## 十二、统 计

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
抽样方法 总体分布的估计 总体期望值和方差的估计	能力测试点 66 抽样方法 能力测试点 67 总体分布的估计、总体期望值与方差的估计	

## 十三、导 数

高考考试内容	高考完全解读·对照	复习效果
导数的背景 导数的概念 多项式函数的导数 函数的单调性与极值 函数的最大值与最小值	能力测试点 68 导数及其运算 能力测试点 69 导数的应用	

## 第一章 集合与简易逻辑

## 能力测试点1 集合的概念与运算

1. 集合的概念及表示方法
2. 集合中元素的三要素
3. 元素与集合、集合与集合的关系
4. 集合运算中的常用结论
5. 数形结合在集合中的应用
6. 集合语言与集合思想的应用
7. 集合的开放题

## 能力测试点2 含绝对值的不等式

## 与一元二次不等式的解法

1. 含有绝对值的不等式的解法
2. 一元二次不等式的解法
3. 分式不等式的解法
4. 含参数的不等式的解法
5. 一元  $n$  次不等式及分式不等式的求解问题

## 能力测试点3 逻辑联结词与四种

## 命题

1. 与命题有关的几个概念
2. 四种命题及其之间的关系
3. 反证法的步骤及应用
4. 利用简易逻辑知识解决数学综合题

## 能力测试点4 充要条件

1. 充分条件与必要条件
2. 利用集合间的包含关系判断命题之间的充要关系
3. 善于构造原命题的逆否命题来判断命题的充要关系
4. 充要条件的证明与探索

## 第二章 函 数

## 能力测试点5 映射与函数

1. 映射
2. 函数的定义
3. 判断两个函数为同一函数的方法
4. 求映射的个数的方法
5. 分段函数和复合函数
6. 建立函数关系式解决实际应用问题

## 能力测试点6 函数的解析式与定义域

1. 函数的解析式与定义域
2. 求函数的解析式常用的方法
3. 学会逆向思维
4. 求含有参数的解析式的定义域
5. 利用图象和表格所给信息解决实际问题的

## 能力测试点7 函数的值域和最值

1. 值域的概念和常见函数的值域
2. 函数的最值
3. 求函数的值域的常用方法
4. 求最值的方法的综合应用

## 能力测试点8 函数的奇偶性与周

## 期性

1. 奇函数、偶函数的概念
2. 周期函数
3. 判断函数的奇偶性的一般方法
4. 函数奇偶性的应用
5. 奇偶性、周期性、单调性在不等式中的运用

## 能力测试点9 函数的单调性

1. 单调函数及单调区间
2. 函数单调性的证明方法
3. 判断函数单调性的常用方法
4. 抽象函数的单调性
5. “对号”函数的单调性及应用
6. 用单调性求最值解决“恒成立”的问题

## 能力测试点10 反函数

1. 反函数的定义及其求法
2. 分段函数的反函数的求法
3. 互为反函数的函数图象间的关系
4. 反函数的性质及应用
5. 反函数与函数的单调性、奇偶性的综合应用

## 能力测试点11 二次函数

1. 二次函数的基本知识
2. 实系数二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的实根的符号与二次方程系数之间的关系
3. 已知二次函数的解析式, 求其单调区间; 已知二次函数的某一单

调区间, 求参数的范围

4. 一元二次方程根的分布
5. 二次函数在闭区间上的最值

## 能力测试点12 指数函数与对数

## 函数

1. 指数
2. 对数
3. 指数、对数函数的图象及性质对照表
4. 指数函数、对数函数的复合函数的性质, 求指数函数、对数函数的复合函数的单调区间、最值等
5. 分类讨论含有字母参数的函数问题

## 能力测试点13 函数的图象

1. 平移变换
2. 对称变换
3. 伸缩变换
4. 快速画出函数  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0, a, b$  不同时为零) 型的草图
5. 依据图象确定解析式
6. 数形结合的思想方法
7. 图象创新题的解题策略

## 能力测试点14 函数应用题

1. 解决应用问题的三个步骤
2. 解平面几何中与面积有关的函数应用题
3. 目标函数为分段函数的实际应用题

## 第三章 数 列

## 能力测试点15 数列的概念

1. 数列的概念
2. 数列通项公式的求解方法
3. 用函数的观点理解数列

## 能力测试点16 等差数列

1. 等差数列的基本内容及考点
2. 等差数列的判定方法
3. 等差数列的性质
4. 等差数列的综合题

## 能力测试点17 等比数列

1. 等比数列的基本内容
2. 等比数列的判定方法

# CONTENTS

3. 等比数列的性质
4. 有关等比数列的综合应用

## 能力测试点 18 等差数列与等比数列的综合运用 ..... 68

1. 本节主要处理的几类问题
2. 转化思想和方程的思想在数列中的运用
3. 数列的综合运用

## 能力测试点 19 数列求和 ..... 71

1. 常用求和公式
2. 错位相减法
3. 倒序相加法
4. 分组求和法
5. 裂项法和并项法
6. 与数列求和有关的综合题

## 能力测试点 20 数列应用题 ... 75

1. 数列应用题主要涉及的几个方面
2. 有关等差数列的应用题
3. 有关等比数列的应用题
4. 有关递推数列中可化为等差、等比数列的应用题

## 第四章 三角函数

### 能力测试点 21 三角函数的概念 ..... 79

1. 三角函数的定义及符号
2. 弧度制以及弧度与角度的互换公式
3. 弧长、扇形面积的公式
4. 常用角的集合表示法
5. 利用三角函数的符号法则, 判断三角函数式的符号; 反过来, 已知三角函数的符号, 求角的范围
6. 运用三角函数的两定义解综合题

### 能力测试点 22 同角三角函数的基本关系式与诱导公式 ..... 82

1. 同角三角函数的三个基本关系式
2. 诱导公式
3. “1”在化简、求值、证明中的妙用
4. 已知  $\tan\alpha$  的值, 求  $\sin\alpha$  和  $\cos\alpha$  构成的齐次式(或能化为齐次式)的值
5. 三角恒等式的证明
6. 学会利用方程思想解三角题

### 能力测试点 23 三角函数的求值 ..... 86

1. 三角函数的求值的三种类型
2. “配角”的思想在给值求值中的应用

3. 给值求角的两个重要步骤缺一不可
4. 方程的思想与探索性求角

### 能力测试点 24 三角函数的图象 ..... 90

1. “五点法”作  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的简图
2. 变换作图法作  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的图象
3. 给出图象上的点, 求解析式  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$
4. 三角函数的图象与性质的综合及有关三角函数图象的对称性在高考中的应用

### 能力测试点 25 三角函数的性质 ..... 93

1. 正弦、余弦、正切、余切函数的性质
2. 利用单位圆、三角函数的图象及数轴求三角函数的定义域
3. 求三角函数值域的常用方法
4. 三角函数的周期性
5. 三角函数的奇偶性
6. 三角函数的单调性
7. 正、余弦, 正、余切之间的大小关系在单位圆内的分布图
8. 三角函数与函数、数列、不等式的综合题

### 能力测试点 26 三角函数应用题 ..... 97

1. 三角函数应用题的常见类型
2. 与三角函数图象有关的应用题
3. 设角为参数, 利用三角函数有关知识求最值

## 第五章 平面向量

### 能力测试点 27 向量的基本运算 ..... 100

1. 向量的基本概念
2. 向量的加法与减法
3. 实数与向量的积
4. 一个向量与非零向量共线的充要条件
5. 常用结论
6. 向量与几何

### 能力测试点 28 向量的坐标运算 ..... 105

1. 平面向量的基本定理及坐标运算
2. 向量平行的充要条件
3. 向量的坐标运算与函数(包括三角函数)、解析几何的综合题

### 能力测试点 29 平面向量的数量积 ..... 108

1. 平面向量的数量积
2. 平面向量数量积的重要性质
3. 两个向量垂直的充要条件
4. 常用的模的等式和不等式
5. 有关数量积的综合题

### 能力测试点 30 线段的定比分点及平移 ..... 111

1. 线段的定比分点
2. 线段的定比分点公式
3. 平移公式
4. 平移公式的三类运用
5. 平移公式与图象左右及上下平移的联系
6. 本节内容的综合运用

### 能力测试点 31 正弦定理、余弦定理及应用 ..... 115

1. 关于三角形边、角的主要关系式
2. 利用正、余弦定理判断三角形的形状
3. 利用正、余弦定理及三角形面积公式等解三角形
4. 正、余弦定理的综合运用

## 第六章 不等式

### 能力测试点 32 不等式的概念和性质 ..... 118

1. 不等式的性质
2. 根据条件和性质判断不等式是否成立的解决方法
3. 作差法
4. 利用不等式的性质求“范围”

### 能力测试点 33 基本不等式 ... 121

1. 内容提要
2. 利用基本不等式证明不等式
3. 运用重要不等式求最值
4. 重要不等式在实际问题中的应用

### 能力测试点 34 不等式的证明方法 ..... 124

1. 比较法
2. 综合法
3. 分析法
4. 反证法
5. 放缩法
6. 换元法
7. 判别式法
8. 不等式的证明与三角、解析几何、函数等知识的综合运用

### 能力测试点 35 整式、分式不等式的解法 ..... 128

1. 一元一次不等式的解法
2. 一元二次不等式的解法
3. 简单的一元高次不等式的解法
4. 分式不等式
5. 指数、对数不等式的解法
6. 含有参数的不等式的求解
7. 解不等式的综合运用

## 能力测试点 36 绝对值不等式

..... 132

1. 绝对值不等式的解法
2. 绝对值不等式的性质
3. 解含有绝对值的不等式的常用方法
4. 解含参数的绝对值不等式
5. 重要的绝对值不等式与函数及方程的综合运用

## 能力测试点 37 不等式的综合运用

..... 135

1. 应用平均值定理求最值
2. 应用不等式求范围
3. 不等式与函数
4. 不等式与平面几何、立体几何
5. 不等式与解析几何
6. 不等式在实际问题中的应用
7. 恒成立不等式的常用解决方法

## 第七章 直线和圆的方程

### 能力测试点 38 直线的方程 ... 140

1. 直线的倾斜角和斜率
2. 直线方程的三种形式
3. 待定系数法求直线的方程
4. 学科内的综合是近年数学高考热点

### 能力测试点 39 两条直线的位置

关系 ..... 143

1. 两条直线的平行、垂直关系
2. 两条直线所成的角
3. 两条直线的交点与点到直线的距离
4. 对称问题
5. 关于“到角”与“夹角”公式的运用

### 能力测试点 40 简单的线性规划及应用 ..... 147

1. 二元一次不等式表示平面区域
2. 基本概念
3. 线性规划
4. 线性规划的应用

### 能力测试点 41 曲线和方程 ... 151

1. 曲线与方程的关系
2. 求曲线方程的步骤
3. 已知曲线求方程、已知方程画曲线

4. 关于曲线的交点
5. 求轨迹方程与分类讨论的综合在高考中的应用

### 能力测试点 42 圆的方程 ..... 154

1. 圆的方程
2. 直线与圆的位置关系
3. 圆与圆的位置关系
4. 待定系数法求圆的方程
5. 直线与圆相切或相交
6. 与圆有关的综合题

## 第八章 圆锥曲线方程

### 能力测试点 43 椭圆 ..... 157

1. 椭圆的定义及性质
2. 利用椭圆的定义解题
3. 待定系数法求方程
4. 求离心率及参数取值范围的常规思路

### 能力测试点 44 双曲线 ..... 161

1. 双曲线的定义及性质
2. 双曲线定义的应用
3. 双曲线方程与双曲线渐近线的关系
4. 解析几何的探索性题

### 能力测试点 45 抛物线 ..... 164

1. 抛物线的图象和性质
2. 抛物线的几何性质
3. 利用定义, 实现抛物线上任一点到焦点的距离和这一点到准线的距离之间的相互转化
4. 与抛物线有关的范围问题和探索问题
5. 抛物线的实际应用题

### 能力测试点 46 直线与圆锥曲线的

位置关系 ..... 168

1. 直线与圆锥曲线位置关系的基础知识
2. 用韦达定理解决直线和圆锥曲线的位置关系
3. 用“点差法”解决有关弦的中点问题
4. 曲线关于直线的对称问题

### 能力测试点 47 轨迹问题 ..... 172

1. 求曲线轨迹方程的基本步骤
2. 直接法求轨迹方程
3. 定义法求轨迹方程
4. 代入法求轨迹方程
5. 参数法求轨迹方程
6. 有关轨迹的综合题

### 能力测试点 48 圆锥曲线中的定值与最值问题 ..... 176

1. 解决圆锥曲线中的定值与最值的基本方法
2. 涉及圆锥曲线的定值问题
3. 涉及直线过定点的问题
4. 圆锥曲线中的最值问题

## 第九章 直线、平面、简单的几何体

### 能力测试点 49 平面的基本性质

..... 180

1. 平面的基本性质
2. 公理的运用
3. 平面的基本性质的综合应用

### 能力测试点 50 空间两条直线

..... 183

1. 空间两条不重合的直线的位置关系
2. 平行直线
3. 异面直线
4. 证明两条直线平行的方法
5. 判定空间两直线是异面直线的方法
6. 求异面直线所成的角和距离的一般方法

### 能力测试点 51 直线与平面的平行

和垂直 ..... 186

1. 直线与平面的位置关系
2. 三垂线定理及其逆定理
3. 直线与平面平行的判定与性质定理
4. 直线与平面垂直的判定与性质定理
5. 三垂线定理及其逆定理的应用
6. 运用转化的思想方法证明立体几何中线面的平行或垂直

### 能力测试点 52 平面与平面的平行

和垂直 ..... 190

1. 两个平面的位置关系
2. 平面与平面平行的判定定理和性质定理
3. 平面与平面垂直的判定定理和性质定理
4. 转化的思想在几何图形证明中的运用

### 能力测试点 53 空间角 ..... 193

1. 角的概念及范围
2. 求异面直线所成角的主要方法
3. 求直线与平面所成角的一般过程
4. 求二面角大小的一般方法
5. 对于未给棱的二面角的求法

### 能力测试点 54 空间距离 ..... 197

1. 空间距离及应对策略

# CONTENTS

2. 有关点到直线、点到平面的距离的求法
3. 公垂线的两条异面直线间距离的求法
4. 直线和平面间的距离与两平行平面间的距离
5. 转化与化归的思想方法在立体几何的证明与计算中的应用

## 能力测试点 55 棱柱 ..... 200

1. 棱柱的概念和性质
2. 棱柱的侧面积和体积公式
3. 斜棱柱中的线面关系
4. “割补法”求体积
5. 棱柱中的角与距离的计算

## 能力测试点 56 棱锥 ..... 204

1. 棱锥的概念和性质
2. 正棱锥的侧面积和棱锥的体积公式
3. 三棱锥的体积
4. 平面图形的翻折与几何体的展开
5. 以棱锥为载体的综合题

## 能力测试点 57 球 ..... 208

1. 球
2. 球面距离的计算方法
3. 与球有关的综合题

## 能力测试点 58 空间向量及其运算(B) ..... 210

1. 空间向量的基本知识
2. 用共线向量定理解决立体几何中的平行问题
3. 用向量垂直的充要条件解决立体几何中的垂直关系
4. 用  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  求距离或线段的长
5. 用数量积公式求异面直线所成的角
6. 用向量的有关知识解综合题

## 能力测试点 59 空间向量的坐标运算(B) ..... 214

1. 向量的直角坐标运算
2. 运用空间向量的坐标运算解决立体几何中的垂直问题
3. 运用向量平行的充要条件解决立体几何中的平行问题
4. 运用向量的坐标运算解决立体几何中的角和距离问题
5. 运用向量的坐标运算解综合题

## 第十章 排列、组合和二项式定理

### 能力测试点 60 两个计数原理 ..... 218

1. 两个原理及其区别
2. 用分步计数原理解决重复排列的问题
3. 用穷举法解决排列、组合问题

### 能力测试点 61 排列与组合 ..... 221

1. 基本公式
2. 解排列组合应用题的具体途径
3. 排列问题常见的限制条件及对策
4. 组合问题常见的问题及对策
5. 指标问题采用“隔板法”
6. 排列、组合与几何的综合

### 能力测试点 62 二项式定理 ..... 225

1. 二项式定理内容
2. 二项式定理中二项式系数的性质
3. 三项式问题的解决方法
4. 利用二项式定理的通项公式解决特定项问题
5. 二项式定理的综合应用

## 第十一章 概率

### 能力测试点 63 随机事件的概率 ..... 228

1. 随机事件及有关概念
2. 概率的定义及性质
3. 等可能性事件的概率
4. 运用排列、组合公式计算等可能性事件的概率
5. 将复杂事件分解为若干简单事件或逆向思考问题的方法

### 能力测试点 64 互斥事件有一个发生的概率 ..... 231

1. 互斥事件
2. 对立事件的概率
3. 互斥对立事件的综合运用

### 能力测试点 65 相互独立事件同时发生的概率 ..... 234

1. 相互独立事件
2. 事件在  $n$  次独立重复试验中恰好发生  $k$  次的概率
3. 相互独立事件同时发生的概率
4. 独立重复试验

## 第十二章 统计

### 能力测试点 66 抽样方法 ..... 237

1. 简单随机抽样
2. 分层抽样
3. 对两种抽样方法的深化理解
4. 两种抽样方法的区别与联系
5. 两种抽样方法的灵活选择

### 能力测试点 67 总体分布的估计、总体期望值与方差的估计 ..... 240

1. 总体分布
2. 总体期望值的估计
3. 总体方差的估计
4. 对总体分布的估计的理解
5. 总体期望值与方差的特点
6. 统计表或图在实际中的运用

## 第十三章 导数

### 能力测试点 68 导数及其运算 ..... 243

1. 瞬时速度
2. 切线的斜率
3. 边际成本
4. 导数的概念
5. 导数的几何意义
6. 导数概念的理解
7. 多项式函数的导数
8. 利用导数求曲线的切线方程

### 能力测试点 69 导数的应用 ..... 247

1. 函数的单调性
2. 函数极值的定义
3. 函数的最大值与最小值
4. 解不等式  $f'(x) > 0$  (或  $f'(x) < 0$ ) 求可导函数  $y = f(x)$  的单调区间的步骤
5. 解方程  $f'(x) = 0$  求可导函数  $y = f(x)$  的极值的步骤
6. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 求函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值和最小值的步骤
7. 实际应用问题中的最值
8. 已知某可导函数在某区间上的单调性, 求参数的取值范围

### 决胜高考 ..... 251 ~ 253

### 答案与提示 ..... 254 ~ 342

# 第一章 集合与简易逻辑

## 能力测试点 1 集合的概念与运算

高考考点解读  
名师释疑答题点

样板题解析  
看看以前怎么考的

### 知识要点

#### ① 集合的概念及表示方法

(1) 某些指定的对象集在一起就成为一个集合.

集合是数学中不加定义的基本概念.

构成集合的元素除了常见的数、式、点等数学对象之外,还可以是其他任何对象.

(2) 集合的四种表示法.

这四种表示法是:列举法、描述法、区间表示法和图示法. 通常我们会根据不同的需要来选用合适的方法来表示集合,一般地,表示有限集常用列举法;表示无限集常用描述法或区间表示法;描述抽象集常用图示法. 正确认识一个集合的关键是理解集合中的元素特征.

(3) 常用数集的代表方法.

① 非负整数集(或自然数集)记作  $\mathbf{N}$ ;

② 正整数集记作  $\mathbf{N}^*$ (或  $\mathbf{N}_+$ );

③ 整数集记作  $\mathbf{Z}$ ;

④ 有理数集记作  $\mathbf{Q}$ ;

⑤ 实数集记作  $\mathbf{R}$ .

#### ② 集合中元素的三要素

我们知道集合中的元素必须具有三大特征“确定性,互异性,无序性”.

(1) **确定性**:是指集合中的元素必须是确定的,即任何一个对象都能判断它是或不是某个集合的元素,二者必居其一.如“接近于0的实数”接近由于没有一个确定的界限,故0.001是否属于这个集合不能判断,所以这不能组成一个集合.

(2) **互异性**:是指集合中的元素互不相同,即同一个集合中不能出现同一个元素两次,如:  $\{1, 0, a^2\}$  表示一个集合,即  $a \neq \pm 1$  且  $a \neq 0$ .

(3) **无序性**:集合中的元素无先后顺序,如  $\{1, 2\}$  与  $\{2, 1\}$  是同一个集合.

在集合的运算中,常用元素的互异性检验所得结论是否正确.

#### ③ 元素与集合、集合与集合的关系

(1) 元素与集合的关系

元素与集合之间的关系用  $\in$ 、 $\notin$  来表示,注意不要与集合与集合之间的关系发生混淆.若  $a$  是集合  $A$  中的元素则表示为  $a \in A$ ,否则表示为  $a \notin A$ (或  $a \in \bar{A}$ ),判断元素与集合的属于与否,主

### 名师诠释

◆ [考题 1] (1) 设  $S = \{x | 2x + 1 > 0\}$ ,  $T = \{x | 3x - 5 < 0\}$ , 则  $S \cap T =$  ( ).

A.  $\emptyset$

B.  $\{x | x < -\frac{1}{2}\}$

C.  $\{x | x > \frac{5}{3}\}$

D.  $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}\}$

(2007 年全国高考题 I)

(2) 若  $A = \{x | x^2 = 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( ).

A.  $\{3\}$

B.  $\{1\}$

C.  $\emptyset$

D.  $\{-1\}$

(2007 年安徽高考题)

(3) 集合  $M = \{Ax + By + C = 0 | A^2 + B^2 \neq 0 \text{ 且 } A, B \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{(x-1)^2 + (y-1)^2 = a | a > 0\}$ , 则  $M \cap N$  的元素的个数为 ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 0 或 1 或 2

(2006 年上海春季高考题)

[解析] (1) 由  $2x + 1 > 0$  知  $x > -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore S = \{x | x > -\frac{1}{2}\}$

由  $3x - 5 < 0$  知  $x < \frac{5}{3}$ ,  $\therefore T = \{x | x < \frac{5}{3}\}$

故  $S \cap T = \{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}\}$ , 故选 D.

(2) 由  $x^2 = 1$  得  $x = \pm 1$ ,  $\therefore A = \{1, -1\}$ .

由  $x^2 - 2x - 3 = 0$  得  $x = 3$  或  $x = -1$ ,  $\therefore B = \{3, -1\}$ .

故  $A \cap B = \{-1\}$ , 选 D.

(3) 由于集合  $M$  的元素的形式是直线,而集合  $N$  的元素的形式是圆,因而它们元素形式不同,  $\therefore M \cap N = \emptyset$ , 故选 A.

[点评] 解决用符号描述法表示的集合的问题,易错的是没有弄清集合的元素所具有的形式,而把注意力放在元素所具有的属性  $p(x)$  上,如本例(2)、(3).为了提醒大家解题时首先注意到这点,特此提炼出元素分析法——即解题前先分析元素所具有的形式,属性如何?解题后检验元素是否满足它的三性(确定性、互异性、无序性).元素分析法能使我们解题达到最优化.

◆ [考题 2] 已知集合  $M = \{x | x = 3n, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $P = \{x | x = 3n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ , 且  $a \in M, b \in N, c \in P$ . 设  $d = a - b + c$ , 则 ( ).

A.  $d \in M$

B.  $d \in N$

C.  $d \in P$

D. 以上都不对

[解析] 要判断  $d = a - b + c$  与集合之间的关系,只要看  $d$  能否写成  $3n, 3n + 1, 3n - 1, n \in \mathbf{Z}$  的形式即可. 而  $a, b, c$  分别是  $M, N, P$  中元素,分别可以写成  $3m, 3m + 1, 3s - 1, m, n, s \in \mathbf{Z}$  的形式,对它们进行运算即可.

设  $a = 3m, b = 3m + 1, c = 3s - 1, m, n, s \in \mathbf{Z}$ .

则  $d = 3m - (3m + 1) + (3s - 1)$

$= 3(n - m + s) - 2$

$= 3(n - m + s - 1) + 1$ .

$\therefore d \in N$ . 选 B.

◆ [考题 3] 已知集合  $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}$ ,

$N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $M, N, P$  满足关系 ( ).



要通过元素的确定性去分析.

### (2) 集合与集合之间的关系

①集合的相等与包含是两个重要的命题点,二者之间既有联系又有区别.一般地,两个集合  $A$  与  $B$  的相等等价于它们互相包含,即“ $A=B$ ” $\Leftrightarrow$ “ $A\subseteq B$ ,且 $B\subseteq A$ ”;用元素反映即“ $A=B$ ” $\Leftrightarrow$ “任意 $a\in A$ ,必有 $a\in B$ ,且任意 $b\in B$ ,必有 $b\in A$ ”.这是证明两个集合相等的依据.

②子集反映的即是包含关系.当题设的条件或结论中出现 $A\subseteq B$ (或 $A\subsetneq B$ )这就表明集合  $A$  是集合  $B$  的子集(或真子集),反之亦然.子集有真子集与非真子集之别,这在解题时尤其要引起注意, $A$  是  $B$  的真子集常用真包含关系 $A\subsetneq B$  反映,对于包含关系和子集问题要注意两个集合的先后顺序,即要区别谁是谁的子集,否则极易导致错误.

③空集是任意一个集合的子集,是任意一个非空集合的真子集,这一点也是解题中容易被忽略的.

## 2 思维拓展

### 4 集合运算中的常用结论

$$(1) \complement_U(A\cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$$

$$\complement_U(A\cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$$

$$(2) A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A \quad A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B = B$$

(3)由  $n$  个元素所组成的集合,其子集个数为  $2^n$  个,即是  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

(4)空集  $\emptyset$  是任何集合的子集,即  $\emptyset \subseteq A$ ,这个结论在解集中容易被忽略.

结论(1)、(2)常常是作为“等价转化”的依据,若已知  $A\cap B = A$ ,则  $A\subseteq B$ ,参看[考题5].

结论(3)是集合与组合数的综合运用的结果,用以计算集合子集的个数.

[例] 同时满足  $\{1\} \subsetneq A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$  的集合  $A$  的个数是\_\_\_\_\_个.

[解析] 因为  $A \supsetneq \{1\}$ ,故满足条件的集合  $A$  的个数实质上是  $\{2,3,4,5\}$  的真子集的个数,即为  $2^4 - 1 = 15$  个.

### 5 数形结合在集合中的应用

集合中运用数形结合的思想解题,主要体现在如下两个方面:

(1)数轴的运用.运用数轴解题时,要注意“端点”的取与舍.

(2)韦恩图的运用.已知集合运算式(如  $A\cap B, A\cup B$  等)能作出相应的韦恩图;已知韦恩图能写出相应的集合运算式.

利用韦恩图可计算集合中元素的个数,有如下公式:

$$\text{card}(A\cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A\cap B).$$

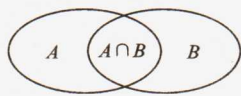


图 1-1

其中  $\text{card}A$  表示集合  $A$  中元素的个数,上述公式可用如图 1-1 所示加以说明.

$$A. M = N \subsetneq P$$

$$B. M \subsetneq N = P$$

$$C. M \subsetneq N \subsetneq P$$

$$D. N \subsetneq P \subsetneq M$$

[解析] 解法一:(可从判断元素的共性和差异入手)对于集合  $M$ :

$$\left\{x \mid x = \frac{6m+1}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\};$$

$$\text{对于集合 } N: \left\{x \mid x = \frac{3n-2}{6} = \frac{3(n-1)+1}{6}, n \in \mathbf{Z}\right\};$$

$$\text{对于集合 } P: \left\{x \mid x = \frac{3p+1}{6}, p \in \mathbf{Z}\right\}.$$

由于  $3(n-1)+1$  和  $3p+1$  都表示被 3 除余 1 的数,而  $6m+1$  表示被 6 除余 1 的数,所以  $M \subsetneq N = P$ ,故应选 B.

解法二:(简单列举集合中的元素) $M = \left\{\dots, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \dots\right\}$ ,  
 $N = \left\{\dots, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$ ,  $P = \left\{\dots, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \dots\right\}$ , 因此选 B.

[点评] 处理此类问题一般有两种方法:一是化简集合,从表达式中找两集合的关系;二是用列举法表示各集合,从元素中寻找关系.由于思路二只是停留在最初的归纳阶段,没有从理论上解决问题,因此提倡思路一,但思路二入手较易,不失为一种解客观题的好方法.

◆ [考题 4] 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$ ,若  $A\cap B = B$ ,求  $m$  的取值范围.

[解析]  $\because A\cap B = B, \therefore B \subseteq A$ .

$\therefore A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}, \therefore B = \emptyset$  或  $\{1\}$  或  $\{2\}$  或  $\{1, 2\}$ .

当  $B = \emptyset$  时,需  $m^2 - 8 < 0, \therefore -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ;

当  $B = \{1\}$  时,需  $\begin{cases} m^2 - 8 = 0 \\ 3 - m = 0 \end{cases}$  (舍去);

当  $B = \{2\}$  时,需  $\begin{cases} m^2 - 8 = 0 \\ 6 - 2m = 0 \end{cases}$  (舍去);

当  $B = \{1, 2\}$  时,有  $m = 3$ .

综上所述,  $m$  的取值范围是  $m = 3$  或  $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ .

[点评] 将  $A\cap B = B$  转化为  $B \subseteq A$ ,并且  $B = \emptyset$  也满足,讨论时不要遗漏.空集就像一个无处不在的幽灵,要处处设防,时刻提高警惕,才不至于掉进空集的陷阱之中.如再解与子集有关的问题时,一定提醒自己:子集中是否考虑了空集这一特殊子集.

◆ [考题 5] 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,若  $S, P$  满足  $S \cap P = \{2\}$ ,  $(\complement_U S) \cap P = \{4\}$ ,  $(\complement_U S) \cap (\complement_U P) = \{1, 5\}$ ,则( ).

$$A. 3 \in S, 3 \in P$$

$$B. 3 \in S, 3 \notin P$$

$$C. 3 \notin S, 3 \in P$$

$$D. 3 \notin S, 3 \notin P$$

[解析] 将全集中各个元素划分到每个区域是解决本题的关键.

数形结合,如图 1-3 所示,  $S, P$  将全集分为四个区域:  $S \cap P, (\complement_U S) \cap P, (\complement_U P) \cap S, (\complement_U S) \cap (\complement_U P)$ ,将各部分元素分别填入,知  $3 \in S \cap (\complement_U P)$ ,故选 B.

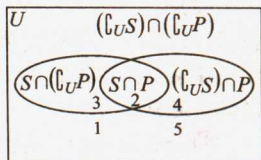


图 1-3

[点评] 熟悉韦恩图中各区域内元素的属性,可以避免复杂的推理过程,帮助我们快速解决相关问题.





### 3 综合创新

#### 6 集合语言与集合思想的应用

集合问题要重视集合语言的准确理解,可翻译成大家熟悉的代数语言或几何语言.

[例1]  $A = \{x | x^2 + px + q = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{2\}$ ,表示方程  $x^2 + px + q = 0$  有两个相等的根 ( $\Delta = 0$ ),且根为 2. ( $2^2 + 2p + q = 0$ )

[例2] 设集合  $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ ,则集合  $M \cap N$  中元素的个数为( ).

(2004 年全国 III)

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

[解析]  $M \cap N$  中元素的个数,就是两图象——单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  与抛物线  $y = x^2$  的交点个数,即为 2 个,选 B.

[例3] 集合  $A = \left\{x \mid \frac{x^2 + a}{x - 4} = 1, x \in \mathbf{R}\right\}$  为单元素集.

[解] 首先由  $\frac{x^2 + a}{x - 4} = 1$  得

$$x^2 - x + 4 + a = 0. \quad ①$$

若  $A$  为单元素集,则方程①有两个不等于 4 的相同根或方程有两个不等根且其中有一根为 4.

[点评] 将例 1、例 2 的集合语言转化为代数或几何语言较例 3 容易,对于例 3,容易遗漏后半部分——方程有两不等根且其中有一根为 4.

#### 7 集合的开放题

集合考题中常出现一些创新题目,主要是一些信息迁移题,此类题能有效地考查考生接受信息以及类比迁移能力和继续学习的潜能,同时也体现了《考试大纲》对创新能力的考查.

[例] 定义  $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$ ,则集合  $M - (M - N) = ( )$ .

- A.  $M$       B.  $N$   
C.  $M \cap N$       D.  $\emptyset$

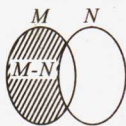


图 1-2

[解析] 由图 1-2 可知  $M - N$  如图的阴影部分所示,所以  $M - (M - N) = M \cap N$ . 故选 C.

◆ [考题 6] 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2x - 8 > 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$ ,若  $A \cap B \subseteq C$ ,求实数  $a$  的取值范围.

[解析] 集合  $A, B, C$  中的元素均是用不等式描述的,  $A, B$  中不含参数,可先求出  $A = \{x | -2 < x < 3\}$ ,

$$B = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -4\}, A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}.$$

$$\text{又 } C = \{x | (x - a)(x - 3a) < 0\}.$$

欲使  $A \cap B \subseteq C$ ,须分类讨论:

① 当  $a > 0$  时,  $C = \{x | a < x < 3a\}$ ,结合数轴知

$$\begin{cases} a \leq 2, \\ 3a \geq 3, \end{cases} \therefore 1 \leq a \leq 2;$$

② 当  $a = 0$  时,  $C = \emptyset$ ,不合题意;

③ 当  $a < 0$  时,  $C = \{x | 3a < x < a\}$ ,结合数轴知

$$\begin{cases} 3a \leq 2, \\ a \geq 3, \end{cases} \text{无解.}$$

综上,  $a$  的取值范围是  $[1, 2]$ .

[点评] 有些含参数的集合问题很难从整体入手,需要分割处理,把整体科学合理地划分为若干个局部问题独立解决,以达到整体问题的解决,这种重要的数学思想方法就是分类讨论的方法,要学会运用这种思维方法.

◆ [考题 7] 设全集  $I = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ,  $A, B$  是  $I$  的子集,若  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ ,就称集对  $(A, B)$  为“好集”,那么所有好集的个数为( ).

- A.  $6!$       B.  $6^2$       C.  $2^6$       D.  $3^6$

[解析] 要使  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ ,必须满足集合  $A, B$  中都含有元素 1, 2, 3,且对全集中的其他 6 个元素 4, 5, 6, 7, 8, 9 中的每个元素,要么在集合  $A$  中,要么在集合  $B$  中或不在集合  $A, B$  中,这三种情况只能选其一,于是这 6 个元素所处集合的不同情况为  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ .而这 6 个元素所处不同集合的个数即为好集的不同个数.故应选 D.

[点评] 新概念的引入不仅要求能深入理解新概念的信息,而且要能够调出已学习过的“旧”概念,进行相互对照.此类考题的关键在于一个“新”字,即背景新、概念新、题型新.解题时不要被“新”所迷惑,在理解与领会该概念后,掩藏在“新”的外衣下的往往是极为简单的知识点.

### 4 能力题型设计

[预测 1] 已知集合  $S = \{x \in \mathbf{R} | x + 1 \geq 2\}$ ,  $T = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,则  $S \cap T = ( )$ .

- A.  $\{2\}$       B.  $\{1, 2\}$   
C.  $\{0, 1, 2\}$       D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

难度系数 ☆☆☆☆ 高考出现几率 ☆☆☆☆☆

[预测 2] 集合  $P = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$ ,若对于运算“ $*$ ”:“若  $a \in P, b \in P$ ,则  $a * b \in P$ ”,则运算“ $*$ ”可以是:( ).

- A. 加法      B. 减法  
C. 除法      D. 乘法

难度系数 ☆☆☆☆☆ 高考出现几率 ☆☆☆☆☆

#### 点击考点

测试要点 1.4

2007 年天津高考题

测试要点 4.5

2007 年崇文区

高三期末

测试要点 3.7

2007 年湖北八校

联考

测试要点 3.4

2006 年安徽文

[预测 3] 设集合  $A = \{x | x^2 - x = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + x = 0\}$ ,则  $A \cap B$  等于( ).

- A. 0      B.  $\{0\}$   
C.  $\{-1, 0, 1\}$       D.  $\emptyset$

难度系数 ☆☆☆☆☆ 高考出现几率 ☆☆☆☆☆

[预测 4] 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,集合  $S = \{1, 3, 5\}$ ,  $T = \{3, 6\}$ ,则  $\complement_U(S \cup T)$  等于( ).

- A.  $\emptyset$       B.  $\{2, 4, 7, 8\}$   
C.  $\{1, 3, 5, 6\}$       D.  $\{2, 4, 6, 8\}$

难度系数 ☆☆☆☆☆ 高考出现几率 ☆☆☆☆☆