自然科学基础系列教材

工科大学数学教程

概率论与数理统计

许承德　主编

王勇　孙淑珍　何文章　杜凤芝　李燕杰　副主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书内容共分六个部分：第一部分为事件及其概率的概念与运算（第一、二章）；第二部分为随机变量及其分布（第三、四章）；第三部分为随机变量的数字特征与极限定理（第五章）；第四部分为数理统计的基本概念（第六章）；第五部分为估计和检验的基本方法（第七、八章）；第六部分为线性模型的统计分析初步（第九章）。每章后附有习题，其中较多地收入了历年硕士研究生入学考试试题。

本书除供高等工业学校本科各专业使用外，也可供财经、农、林、医类某些专业选用，还可作为准备考硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

概率论与数理统计

Gailülun yu shulitongji

许承德　主编

*

责任编辑　田　秋

封面设计　卞秉利

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006

传　　真　0451－86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14　字数 322 千字

版　　次　2000 年 6 月第 3 版　2006 年 12 月第 10 次印刷

书　　号　ISBN 7-5603-0530-X/O·42

定　　价　17.00 元

前　言

培养基础扎实、勇于创新型人才，历来是大学教育的一个重要目标. 随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出. 在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用. 为适应培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，我们按照原国家教委关于系列课程改革的精神，多年来在数学教学改革方面进行了探索，取得一定的成效. 在此基础上，编写了这套教材，其中包括：工科数学分析（上下册），线性代数与空间解析几何，概率论与数理统计，计算方法，数学实验. 这套教材是参照原国家教委 1995 年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和 1997 年研究生入学考试大纲编写的. 为满足不同专业、不同层次学生的需要，这套教材适当增加了部分内容，对学生能力的要求也有所提高.

本教材的编写力求具有以下特色：

1. 将各门课程的内容有机结合、融汇贯通，既保证了教学质量的提高，又压缩了教学时数.

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质. 对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入. 取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础.

3. 例题和习题丰富，特别是综合性和实际应用性的题较多，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力.

4. 以简介和附录的形式为学生展望新知识留下窗口，以开阔学生的视野，为进一步拓宽数学知识指出方向.

本教材主要由哈尔滨工业大学数学系各教研室教师编写. 东北电力学院，黑龙江科技学院，鞍山师范学院，大庆石油学院等学校的教师参加了部分章节的编写工作. 哈尔滨工业大学数学系富景隆、杨克劭、曹彬、戚振开、薛小平五位教授分别审阅了教材的各部分内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

哈尔滨工业大学工科数学教材编写委员会

2000 年 5 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

人们在实践活动中所遇到的现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定性现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定性现象**.

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的. 例如：在标准大气压下，将水加热到100℃，水必然沸腾；用手向空中抛出的石子，必然下落；作等速直线运动的物体，如无外力作用，必然继续作等速直线运动等等，这些现象都是必然现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象；对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的. 例如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中，随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同等等，这些现象都是随机现象.

对随机现象，是否有规律性可寻呢？人们经过长期的反复实践，发现这类现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性. 例如：

(a) 掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占1/2. 历史上，蒲丰(Buffon)掷过4040次，得到2048次正面；皮尔逊(K. Pearson)掷过24000次，得到12012次正面.

(b) 对一个目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀.

(c) 从分子物理学观点来看，气体分子对器壁的压力是气体分子对器壁碰撞的结果. 由于分子是时刻不停地、杂乱无章地运动着，速度和轨道都是随机的，因而对器壁的碰撞也是随机的. 初看起来器壁所受的压力是不稳定的；可是实验证明，由于分子数目非常大，各分子运动所具有的随机性在集体中互相抵消、互相平衡了，使得器壁所受的总压力呈现一种稳定性. 分子数目越大，压力越稳定.

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来. 这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

革命导师恩格斯指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内

部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律．”[1]

概率论就是研究随机现象统计规律的一门数学学科．

1.1.2 随机试验与事件、样本空间

对随机现象的研究，总是要进行观察、测量或做各种科学试验，为了叙述方便起见，人们统称为试验．例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格；向坐标平面内任投一根针，测量此针的针尖指向与 x 轴正向之间的交角，等等；这些都是试验．仔细分析，这些试验具有如下的共同特点：

(a) 试验可以在相同条件下重复进行；

(b) 试验的所有可能的结果不止一个，而且是事先已知的；

(c) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言．

如掷硬币的例子，试验是可以在相同条件下重复进行的，试验的可能结果有两个，即正面和反面；每次试验必出现其中之一，但投掷之前是不可能预言正面出现还是反面出现．

人们将满足上述三个条件的试验，称为**随机试验**，简称**试验**，以字母 E 表示．

为了研究随机试验，首先要知道这个试验的所有可能结果是哪些．随机试验的每一个可能结果称为**基本事件**也称作**样本点**，用 e 表示．全体基本事件的集合称为**样本空间**，记为 S．

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间．对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定．下面看几个例子．

例 1 掷一均匀对称的硬币，观察正反面出现情况，这是个随机试验．可能结果有两个：正（正面朝上），反（反面朝上）．故样本空间

$$S=\{正,反\}.$$

例 2 将上述硬币掷两次，观察正反面出现情况，这也是一个随机试验．可能结果有四个：(正正)，(正反)，(反正)，(反反)．这里括号内的第一个和第二个字，分别表示第一次和第二次掷的结果．故样本空间

$$S=\{(正正),(正反),(反正),(反反)\}.$$

例 3 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数，这个试验的基本事件（记录结果）是一非负的整数，由于难以规定一个呼叫次数的上界，所以样本空间

$$S=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 4 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命．设 t 表示寿命，则样本空间

$$S=\{t:t\geqslant 0\}.$$

例 5 观察某地区一昼夜最低温度 x 和最高温度 y．设这个地区的温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1，则样本空间

$$S=\{(x,y):T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

---

[1]《马克思恩格斯选集》第四卷，第 243 页．

在试验中可能发生也可能不发生的事情称为**随机事件**，简称**事件**，以字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 有了样本空间的概念便可以用集合的语言来定义事件. 下面先从一个例子来分析.

例 6 在例 2 中，若设事件 $A=$“第一次出现正面”. 在一次试验中，A 发生当且仅当在这次试验中出现基本事件(正正)，(正反)中的一个. 这样可以认为 A 是由(正正)，(正反)组成的，而将 A 定义为它们组成的集合

$$A=\{(\text{正正}),(\text{正反})\}.$$

又如事件 $B=$“两次出现同一面”，B 发生当且仅当基本事件(正正)，(反反)中的一个出现，而将 B 定义为它们组成的集合

$$B=\{(\text{正正}),(\text{反反})\}.$$

类似地，事件 $C=$“至少有一次出现正面”，可定义为集合

$$C=\{(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正})\}.$$

事件 $D=$“第一次出现反面”，可定义为集合

$$D=\{(\text{反正}),(\text{反反})\}.$$

一般地，人们将事件定义为基本事件的某个集合，即样本空间的某个子集，称事件 A 发生，当且仅当 A 中某一基本事件出现.

样本空间 S 和空集 $\varnothing$ 作为 S 的子集也看作事件. 由于 S 包含所有的基本事件，故在每次试验中，必有一个基本事件 $e\in S$ 发生，即在试验中，事件 S 必然发生；因此，S 是**必然事件**. 又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个基本事件，故在任一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生；因此，$\varnothing$ 是**不可能事件**. 常用 $S,\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件.

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究的方便，还是把它们作为随机事件的两个极端情形来处理.

再看几个事件的例子.

例 7 在例 3 中，若设 $A=$“呼叫次数不超过三次”，$B=$“呼叫次数大于五次”，则 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{6,7,8,\cdots\}$.

例 8 在例 4 中，设 $A=$“寿命小于五小时”，则 $A=\{t:0\leqslant t<5\}$.

例 9 在例 5 中，设 $A=$“最高温度与最低温度之差不超过 10℃”，则

$$A=\{(x,y):y-x\leqslant 10,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

1.2 事件的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系. 详细分析事件之间的关系，不仅帮助人们更深入地认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂的事件.

在下面的叙述中，为直观起见，用平面上的一个矩形域表示样本空间 S，矩形内的每一点表示样本点(基本事件)；并用矩形内的两个圆分别表示事件 A 和事件 B.

(a) 事件的包含与相等

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B(图 1.1)，则称**事件 B 包含事件 A**，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

显然，这时事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 故 B 包含 A，也常定义为："若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A".

例如，在 1.1 节例 6 中，由于 $A=\{(正正),(正反)\}$，$C=\{(正正),(正反),(反正)\}$，故有 $A\subset C$.

对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset S$.

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

(b) 事件的积(或交)

同时属于 A 和 B 的样本点的集合(图 1.2)称为 A 与 B **之积**(**或交**)，记为 $A\cap B$ 或 AB.

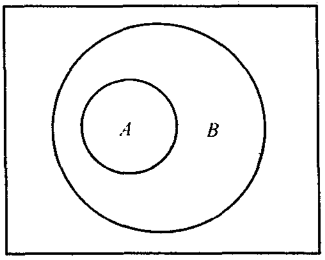

图 1.1 $A\subset B$

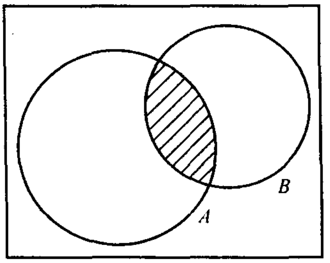

图 1.2 $A\cap B$

显然，事件 AB 发生等价于事件 A 与事件 B 同时发生，常称 AB 为 A 与 B **同时发生的事件**.

例如，在 1.1 节例 6 中，$AB=\{(正正)\}$，$AC=A$；在 1.1 节例 7 中，$AB=\varnothing$. 对任意事件 A，有 $SA=A$；且若 $A\subset B$，则有 $AB=A$.

(c) 互不相容事件

若 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 不能同时发生(图 1.3)，则称 A 与 B 为**互不相容的事件**(**或互斥事件**).

例如，在 1.1 节例 7 中，A 与 B 是互不相容的事件. 再如必然事件 S 与不可能事件 $\varnothing$ 是互不相容的事件.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**互不相容的**.

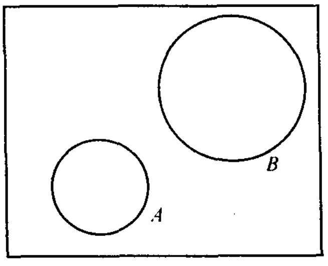

图 1.3 $AB=\varnothing$

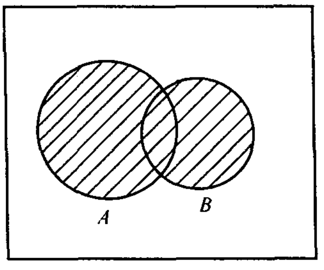

图 1.4 $A\cup B$

(d) 事件的和(或并)

至少属于 A 和 B 二者之一的所有样本点组成的集合(图 1.4),称为 A 与 B 之**和**(或**并**),记为 $A\cup B$.

显然,事件 $A\cup B$ 发生,表示 A 发生或 B 发生或 A 与 B 同时发生,即 A 与 B 中至少有一个发生. 因此,常称 $A\cup B$ 为 A 与 B 中**至少有一个发生的事件**. 若 A 与 B 是互不相容的事件,则它们的和 $A\cup B$ 也记为 $A+B$.

例如,在 1.1 节例 6 中,由于 $A=\{$(正正),(正反)$\}$,$B=\{$(正正),(反反)$\}$,$D=\{$(反正),(反反)$\}$,故

$A\cup B=\{$(正正),(正反),(反反)$\}$,

$A+D=\{$(正正),(正反),(反正),(反反)$\}=S$.

(e) 事件的差

包含在 A 中而不包含在 B 中的样本点的集合(图 1.5),称为 A 与 B 之**差**,记为 $A-B$.

显然,事件 $A-B$ 发生,表示事件 A 发生而 B 不发生.

例如,在 1.1 节例 6 中,$A-B=\{$(正反)$\}$,$A-C=\varnothing$,$A-D=A$.

对任意事件 A,$A-A=\varnothing$,$A-\varnothing=A$,$A-S=\varnothing$.

(f) 对立事件

S 与 A 之差 $S-A$,称为 A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$(图 1.6).

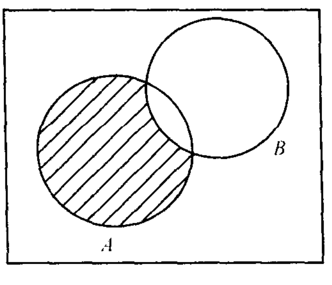

图 1.5　$A-B$

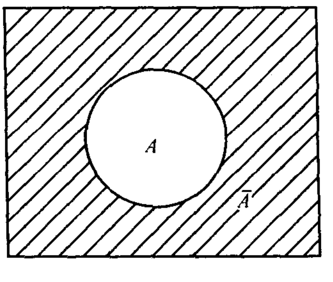

图 1.6　$\overline{A}$

由定义可知,在任一次试验中,A 与 $\overline{A}$ 不可能同时发生,但 A 与 $\overline{A}$ 二者之中必然有一个发生. 因而有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=S.$$

此外,显然有

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad A-B=A\overline{B}.$$

事件的和与事件的积都可以推广到 n 个事件及可列无限多个事件上去.

用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"的事件,称之为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和. 当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时,它们的和可写成 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”的事件，称之为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积.

用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 中至少有一个发生”的事件，称之为 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 的和.

用 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 同时发生”的事件，称之为 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 的积.

上面利用集合的概念描述了事件的概念、关系及运算，为了将它们与集合论中的相应部分作对照，列表如下：

符　号	概　率　论	集　合　论
S	样本空间，必然事件	空间（全集）
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件（样本点）	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	A 与 B 没有公共元素

由于事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系及运算是相当的，故根据集合的运算性质可推得事件的运算性质如下：

(a) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，　$AB = BA$；

(b) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，　$(AB)C = A(BC)$；

(c) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

(d) 对偶原理：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对偶原理在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多个事件的情况，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \tag{1.1}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}. \tag{1.2}$$

用语言表述为：事件和的对立事件等于对立事件的积，事件积的对立事件等于对立事件的和.

例 1　在检查某种圆柱形零件时，要求它的长度和直径都必须合格. 设 A, B, C 分别表示事件“直径合格”，“长度合格”，“产品合格”，则

(a) $C \subset A$，　$C \subset B$；

(b) $\overline{C}, \overline{B}, \overline{A}$ 分别表示“产品不合格”，“长度不合格”，“直径不合格”；

(c) $C = A \cap B$；

(d) $\overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

(e) $C=A-\overline{B}$.

例 2 某射手向一目标进行三次射击，令

A_i="第 i 次射击命中目标"，$i=1,2,3$；

B_j="在三次射击中，命中 j 次"，$j=0,1,2,3$. 则

$$B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3};$$
$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3;$$
$$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3;$$
$$B_3=A_1A_2A_3.$$

1.3 古典概率

当做一个随机试验时，常常会发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同. 事件出现的可能性的大小，是客观存在的，它揭示了这些事件的内在的统计规律. 在生产实际中，了解和掌握事件发生的可能性大小是有重要意义的. 例如，知道了某电话总机在 24 小时内出现某些呼唤次数的可能性的大小，就可以根据要求，合理地配置一定的线路设施以及管理人员等.

为了研究事件发生的可能性，就需要用一个数字来描述这种可能性的大小，人们就把刻画这种可能性大小的数值叫做事件的概率. 事件 $A,B,C,\cdots$ 的概率分别用 $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，$\cdots$表示. 由此可知，概率是随机事件的函数.

对于一个给定的事件 A，概率 $P(A)$到底是一个什么数？怎样求？本节先对一种最简单的情况加以讨论.

1.3.1 古典概率定义

先看一个简单的例子，投掷一均匀的硬币，考虑出现正面和出现反面这两个事件的概率.

由于硬币是均匀的，因而出现正面和出现反面的可能性是一样的. 故人们有理由认为出现正面和出现反面这两个事件的概率都是 1/2.

这个例子具有下面两个特点：

(i) 样本空间包含的基本事件的个数是有限的；

(ii) 每个基本事件发生的可能性是相等的.

第一个特点是显然的；第二个特点，严格说来，是很难具备的. 因为实际的硬币两面花纹不同，凹凸分布不同，故硬币不是绝对均匀对称的. 不过这些因素对出现正(或反)面的影响很小，因而可以把它们忽略，而认为出现正面和出现反面是等可能的.

具有上述两个特点的试验，叫做古典概型试验，它是概率论初期研究的主要对象，一般有下面的定义.

定义 1.1 设 E 为一试验，若它的样本空间 S 满足下面两个条件：

(i) 只有有限个基本事件；

(ii) 每个基本事件发生的可能性相等.

则称 E 为**古典概型的试验**. 在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}. \tag{1.3}$$

用公式(1.3)计算古典概率时，必须计算样本空间中的基本事件总数以及事件 A 中包含的基本事件的个数. 这种计算常常用到排列与组合的知识，为此，下面列举它们的主要内容，供读者复习与参考.

1.3.2 排列与组合

1. 两个基本原理

(a) 加法原理　完成一件事，有两类不同的办法. 在第一类办法中有 m 种方法，在第二类办法中有 n 种方法，两类办法中的每一种方法都能完成这件事，那么完成这件事共有 $m+n$ 种不同的方法.

(b) 乘法原理　完成一件事，必须通过两个步骤. 第一步骤有 m 种方法，第二步骤有 n 种方法，那么完成这件事共有 mn 种不同的方法.

显然，这两条原理可以推广到多个过程的场合.

2. 排列

(a) 有重复排列　从 n 个不同的元素中，每次任取 m 个元素按一定顺序排成一列，并且每个元素可以重复抽取(例如有放回的抽取：取一个后，放回去，再取一个，然后又放回去，这样进行 m 次). 这种排列叫做**有重复排列**，所有不同的排列个数为

$$N=n^m\text{（这里的 } m \text{ 可以大于 } n\text{）}. \tag{1.4}$$

(b) 无重复排列　从 n 个不同的元素中，每次任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素按一定顺序排成一列，每个元素不能重复. 这种排列称为**无重复排列**，所有不同的排列个数为

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1). \tag{1.5}$$

当 $m=n$ 时，上式变为

$$P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!. \tag{1.6}$$

P_n^n 称为 n 个元素的**全排列数**，而 $P_n^m(m<n)$ 称为由 n 个元素中取 m 个的**选排列数**.

3. 组合

(a) 从 n 个不同的元素中，每次任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素(每个元素不能重复)不计次序并成一组，称为**组合**. 所有不同的组合个数为

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{P_n^m}{m!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \\ &=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^{n-m}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

规定 $C_n^0=1$.

(b) 常用组合公式

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}; \tag{1.8}$$

$$C_{m+n}^k=\sum_{i=0}^{k}C_m^iC_n^{k-i}; \tag{1.9}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n. \tag{1.10}$$

1.3.3 古典概率计算的例子

例 1 设电话号码由五个数码组成，每个数码可以是 0，1，2，…，9 中的任一个. 设 A_1 ＝“5 个数码全相同”，A_2＝“5 个数码全不相同”，A_3＝“5 个数码中有两个 3”，求这些事件的概率.

解 将每一可能的电话号码作为基本事件，它们可认为是等可能的. 由于数码是可重复的，故由(1.4)，基本事件总数为 10^5.

显然，A_1 中包含的基本事件数为 10，故

$$P(A_1)=\frac{10}{10^5}=\frac{1}{10^4}.$$

A_2 中包含的基本事件数是 $P_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$，故

$$P(A_2)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^5}=0.3024.$$

A_3 中包含的基本事件数是 $C_5^2\cdot 9^3$，这是因为数码 3 在电话号码中占两个位置的方法有 C_5^2 种，而其余 3 个数码中的每一个都可以从剩下的 9 个数码 0，1，2，4，…，9 中重复选取，有 9 种方法. 故

$$P(A_3)=\frac{C_5^2\cdot 9^3}{10^5}=0.0729.$$

例 2 设有一批产品共有 100 件，其中有 5 件次品，其余均为正品. 今从中任取 50 件，求事件 A＝“取出的 50 件中恰有 2 件次品”的概率.

解 将从 100 件产品中任取 50 件为一组的每一可能组合作为基本事件，总数为 C_{100}^{50}. 导致事件 A 发生的基本事件为从 5 件次品中取出两件，从 95 件正品中取出 48 件构成的组合，有 $C_5^2C_{95}^{48}$个，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^2C_{95}^{48}}{C_{100}^{50}}=0.32.$$

例 3 将 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书靠在一起的概率.

解 将 10 本书的每一种排列看作基本事件，则基本事件的总数为 10!.

设 A 表示指定的 3 本书靠在一起的事件，如果将 3 本书看作一本书与剩下的 7 本书进行排列，则有 8! 种，而 3 本书靠在一起的排法有 3! 种，故 A 中包含的基本事件个数 为 $8!\cdot 3!$. 所以

$$P(A)=\frac{8!\ 3!}{10!}=\frac{1}{15}=0.067.$$

例 4 将 r 个人随机地分配到 n 个房间里，设

A_1＝“某指定的 r 个房间中各有一人”，

A_2＝“恰有 r 个房间中各有一人”，

A_3＝“某指定房间恰有 k 人”.

求 A_1，A_2，A_3 的概率.

解 由于每一个人都可以分配到 n 个房间中的任一房间，所以将 r 个人分配到 n 个房间去共有 n^r 种分法. 每种分法当作一个基本事件，那么基本事件总数为 n^r.

(a) 将 r 个人分配到指定的 r 个房间，每个房间一人，共有 $r!$ 种分法. 故

$$P(A_1)=\frac{r!}{n^r}.$$

(b) 由于 r 个房间可以是任意的，即可以从 n 个房间中任意选出 r 个来，这种选法共有 C_n^r 种. 对于每种选定的 r 个房间，每一房间分配一个人的方法有 $r!$ 种. 故 A_2 中包含的基本事件数为 $C_n^r\times r!$. 因此

$$P(A_2)=\frac{C_n^r\times r!}{n^r}.$$

(c) 由于某指定房间中分配 k 个人的分法有 C_r^k 种，而其余 $r-k$ 个人任意分配到 $n-1$ 个房间的分法有 $(n-1)^{r-k}$ 种，所以 A_3 中包含的基本事件数为 $C_r^k\times(n-1)^{r-k}$. 因此

$$P(A_3)=\frac{C_r^k\times(n-1)^{r-k}}{n^r}.$$

例 5 袋中有 a 个黑球，b 个白球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求 $A=$"第 k 次摸出的球是黑球"的概率($k\leqslant a+b$).

解 把 a 个黑球与 b 个白球都看作是不同的(比如，设想它们都编了号)，且把 $a+b$ 个球的每一种排列看作基本事件，于是，基本事件总数为 $(a+b)!$.

由于第 k 次摸得黑球有 a 种可能，而另外 $a+b-1$ 次摸得球的排列有 $(a+b-1)!$ 种可能. 所以 A 中包含的基本事件数为 $a\times(a+b-1)!$. 因此

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}. \tag{1.11}$$

值得注意的是，这个结果与 k 值无关. 这表明无论哪一次取得黑球的概率都是一样的，或者说取得黑球的概率与先后次序无关. 这从理论上说明了平常人们采用的"抓阄儿"的办法是公平合理的.

1.3.4 概率的性质

定理 1.1 事件的古典概率具有如下的性质：

(i) 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) $P(S)=1$；

(iii) 若 A,B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.12}$$

证 由于任何事件 A 包含的基本事件数不超过基本事件的总数，故(i)成立. 又由于必然事件 S 包含一切基本事件，故(ii)成立. 现证(iii).

设 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_r}\},B=\{e_{k_1},e_{k_2},\cdots,e_{k_t}\}$.

由于 A,B 互斥，它们不包含相同的基本事件. 故

$$A+B=\{e_{i_1},\cdots,e_{i_r},e_{k_1},\cdots,e_{k_t}\}.$$

由公式(1.3)

$$P(A+B)=\frac{r+t}{n}=\frac{r}{n}+\frac{t}{n}=P(A)+P(B).$$

性质(iii)不难推广到任意 n 个事件中去，即若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.13}$$

式(1.12)、式(1.13)称为概率的加法公式.性质(iii)也称为概率的有限可加性.

由性质(i)～(iii)，又可推得以下的结果.

(iv) $P(\overline{A})=1-P(A)$. (1.14)

证 因 $A,\overline{A}$ 互不相容，由式(1.12)

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

又因 $A+\overline{A}=S$，故 $P(A+\overline{A})=1$.代入上式，则得式(1.14).

(v) $P(\varnothing)=0$.

证 于式(1.14)中，令 $A=S$，则 $\overline{A}=\varnothing$，于是

$$P(\varnothing)=1-P(S)=0.$$

(vi) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，且

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.15}$$

证 因 $A\subset B$，故

$$B=A+(B-A).$$

其中 A 与 $B-A$ 互斥，见图 1.7.由式(1.12)

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

故得

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

因为 $P(B-A)\geqslant 0$，所以由上式又可得

$$P(A)\leqslant P(B).$$

推论 设 A、B 为任意两事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.16}$$

(vii)（一般概率加法公式）对任二事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.17}$$

证 因 $A\cup B=A+(B-AB)$，A 与 $(B-AB)$ 互斥，见图 1.8.由式(1.12)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB).$$

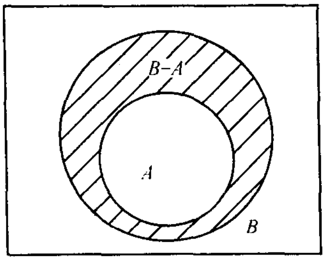

图 1.7

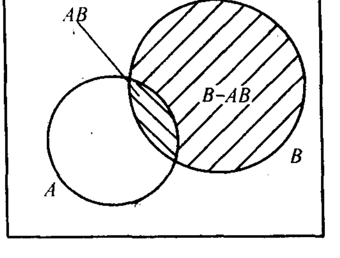

图 1.8

又因 $AB\subset B$，故由式(1.15)

$$P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

从而得到

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由式(1.17)，又可得

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

性质(vii)可以推广到任意 n 个事件上去. 当 $n=3$ 时，有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\ -P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3). \quad (1.18)$$

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\ +\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \quad (1.19)$$

式(1.19)可用数学归纳法证明.

上述概率的各个性质，对计算事件的概率很有好处. 例如，当直接计算 $P(A)$ 比较麻烦而计算 $P(\overline{A})$ 比较方便时，就可先求 $P(\overline{A})$，然后利用性质(iv)求 $P(A)$，举例如下.

例 6 在例 1 中，若设 $A=$“五个数码中至少有两个相同”，求 $P(A)$.

解 事件 A 比较复杂，它包括“5 个数码两个相同”“5 个数码三个相同”“5 个数码四个相同”“五个数码全相同”等四个事件. 因此，直接计算 $P(A)$ 是比较麻烦的. 现在考虑事件 $\overline{A}=$“5 个数码全不相同”，由例 1 知，$P(\overline{A})=0.3024$. 利用性质(iv)，即可算得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.6976.$$

例 7 设有 180 只产品，其中含有 8 只次品，今从中任取 4 只，问“次品超过 1 只”的概率是多少?

解 用 A_i 表示“含有 i 只次品”的事件($i=0,1,2,3,4$)，则

$$P(A_i)=C_8^iC_{172}^{4-i}/C_{180}^4.$$

对 $i=0,1$，分别算得：$P(A_0)=0.832$，$P(A_1)=0.158$.

用 A 表示“次品超过 1 只”的事件，则

$$\overline{A}=A_0+A_1.$$

故得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)-P(A_1)=0.010.$$

例 8 由 10，11，…，99 中任取一个两位数，求这个数能被 2 或 3 整除的概率.

解 设 $A=$“被 2 整除”，$B=$“被 3 整除”，则

$A\cup B=$“被 2 或被 3 整除”，

$AB=$“同时被 2 和被 3 整除”.

由于 10 到 99 中的两位数有 90 个，其中能被 2 整除的有 45 个，能被 3 整除的有 30 个，而能被 6 整除的有 15 个. 故

$$P(A)=\frac{45}{90},P(B)=\frac{30}{90},P(AB)=\frac{15}{90}.$$