高等数学学习指导

下册

高志强　王小胜　路瑞华　栗文国　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学学习指导

下　册

高志强　王小胜　路瑞华　栗文国　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书根据教育部颁发的《数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结多年来积累的教学和考研辅导经验，通过对题型和具体题目的认真筛选编写而成。

全书分为上、下两册，下册包括多元函数的微分法及应用、重积分、曲线曲面积分、无穷级数、微分方程等内容。

本书参照同济大学数学系所编、高等教育出版社出版的《高等数学》（上、下册）而编写，可作为《高等数学》课程的复习参考书和教师习题课参考书，也可作为学生考研参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导．下/高志强等编．—北京：北京理工大学出版社，2007.10

ISBN 978-7-5640-1366-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．高…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 160628 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／11.5
字　　数／265 千字
版　　次／2007 年 10 月第 1 版　　2007 年 10 月第 1 次印刷
印　　数／1～8000 册
总 定 价／36.00 元（共 2 册）

责任校对／陈玉梅
责任印制／吴皓云

目　录

第八章　多元函数的微分法及应用

《考纲》要求

多元函数的基本概念．二元函数的几何表示，极限及连续性．有界闭域上连续函数的性质．偏导数、高阶偏导数，全微分、多元复合函数的求导法则．全导数、隐函数求导公式，偏导数的几何应用．方向导数与梯度，多元函数的极值及其求法，最大值、最小值问题，条件极值，拉格朗日乘数法，二元函数泰勒公式．

第一节　多元函数的概念

一、基本概念

定义　设D是$\mathbf{R}^2$的一个非空子集，称映射$f:D\to\mathbf{R}$为定义在D上的二元函数，记为$z=f(x,y),(x,y)\in D$或$z=f(P),P\in D$．其中点集D称为函数的定义域．集合$f(D)=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为函数的值域．

类似地，当$D\subset\mathbf{R}^n$（D非空），称映射$f:D\to\mathbf{R}$为定义在D上的n元函数，记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\text{ 或 }u=f(P),P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

二元函数的几何意义：$z=f(x,y)$表示空间的一张曲面．其等值图形是平面曲线．与一元函数比较有表 8–1.

表 8–1　二元函数与一元函数比较

函数	定义域	几何意义	等值图形
一元函数	区间	平面曲线	离散点
二元函数	平面域	空间曲面	平面曲线

二、求二元函数的定义域

关于多元函数的定义域，与一元函数类似：当多元函数描述的是实际问题时，其定义域是使实际问题有意义的自变量的取值区域；当其是由一般算式表达的多元函数时，就是使算式有意义的自变量的值所组成的点集．

例 1　圆柱体体积V和其底半径r、高h具有二元函数关系$V=\pi r^2h$，其定义域由问题的实际意义取$D=\{(r,h)\,|\,r>0,h>0\}$．

例 2　求下列函数的定义域，并画出其图形．

（1）$z=\dfrac{1}{\sqrt{y-x^2}}$；（2）$z=\ln(y^2-4x+8)$．

解 （1）要使函数表达式有意义，自变量 x, y 需同时满足

$$\begin{cases} y-x^2 \geqslant 0, \\ \sqrt{y-x^2} \neq 0. \end{cases}$$

即 $$y-x^2>0.$$

所以函数的定义域 $D=\{(x, y) \mid y>x^2\}$，其图形如图 8–1.

（2）要使函数表达式有意义，自变量 x, y 需同时满足

$$y^2-4x+8>0，即\ y^2>4(x-2).$$

所以函数的定义域 $D=\{(x, y) \mid y^2>4(x-2)\}$，其图形如图 8–2.

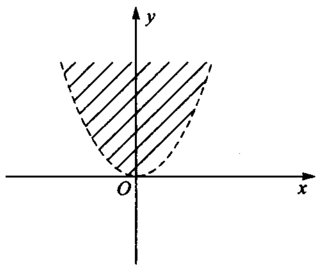

图 8–1

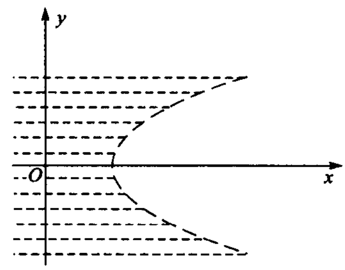

图 8–2

三、求函数表达式

例 3 设 $f(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$.

解 $$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}=\frac{x^2 y^2 \cdot \frac{1}{x}}{x^2+y^2}=\frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

例 4 已知 $f(x+y, x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$，且 $f(x, 0)=\sin x$，求 $f(x, y)$ 的表达式.

解法 1 令 $u=x+y, v=x-y$，则

$$x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v), f(u, v)=\frac{1}{4}(u+v)^2-\frac{1}{4}(u-v)^2+\varphi(u)=uv+\varphi(u).$$

即 $$f(x, y)=xy+\varphi(x).$$

再由 $f(x, 0)=\sin x$, 从而得 $\varphi(x)=\sin x$，

所以 $f(x, y)=xy+\sin x$.

解法 2 由于 $f(x+y, x-y)=(x+y)(x-y)+\varphi(x+y)$，

故 $$f(x, y)=xy+\varphi(x).$$

再由 $f(x, 0)=\sin x$, 从而得 $\varphi(x)=\sin x$，

所以 $f(x, y)=xy+\sin x$.

说明 求 $f(x, y)$ 的两种方法本质都是换元. 方法一是先换后代，具有一般性；方法二是先变后换，比较灵活简便，适用于一些简单的题. 例如 $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}(x>0)$，若令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{y}{x}$，所以 $z=f(u)=\sqrt{1+u^2}+u$.

这是通过简单的变量代换，把二元函数问题转化为简单的一元函数问题.

第二节　多元函数的极限和连续

由于二元函数的极限、连续与一般多元函数的情况完全类似，为简便起见，我们仅讨论二元函数，但所得结论可推广到一般多元函数.

一、二重极限、连续、二次极限的概念与结论

定义 1 设 $z=f(x, y)$ 是定义在平面区域 D 上的二元函数，当动点 $P(x, y)$ 在 D 内不论沿怎样的路径趋向于定点 $P_0(x_0, y_0)$（P_0 可以不属于 D），但不到达 P_0 时，函数值 $f(P)$ 总趋向于同一个数 A，则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的二重极限，记做

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A\text{，或}\quad \lim_{P\to P_0} f(x, y)=A\text{，}$$

也写成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A\text{，或}\quad f(x, y)\to A\quad ((x, y)\to(x_0, y_0)).$$

用“$\varepsilon-\delta$”语言可以叙述为：对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$（或 $0<|x-x_0|<\delta, 0<|y-y_0|<\delta$）时，必有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon\text{，}$$

就称 A 为 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的二重极限.

定义 2 设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)\in D$，若

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=f(x_0, y_0)\text{，}$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续；否则，称 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点.

若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x, y)$ 在 D 内连续. 一切多元初等函数在其定义域内都是连续的.

多元连续函数具有如下性质：

1)（有界性与最大值最小值定理）在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

2)（介值定理）在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

3)（一致连续性定理）在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

定义 3 二元函数 $f(x,y)$ 的二次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$，其含义是：首先将 y 看做参变数，令

$x \to x_0$，求出极限，设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = F(x_0, y)$．再令 $y \to y_0$，求上式的极限，设有 $\lim\limits_{y \to y_0} F(x_0, y) = A$，则称 A 为 $f(x, y)$（先 x 后 y）的二次极限. 记做

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = A.$$

类似地可定义二次极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$．

注　1）关于二重极限，有一点需特别指出：对一元函数的极限来说，“$x \to x_0$”只有两种途径：“$x \to x_0^-$”和“$x \to x_0^+$”；但对于二重极限来说，“$(x, y) \to (x_0, y_0)$”的途径却是无穷的. 但不管 P 沿怎样的途径趋于 P_0，函数值 $f(P)$ 都必须趋于同一个数 A，才能确认当 $P \to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限.

2）二次极限并不总是存在的，例如 $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{y} = 0$，但 $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x \sin \dfrac{1}{y}$ 不存在. 也可能两个二次极限都存在，但不相等，例如：$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x-y}{x+y} = 1$，$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-y}{x+y} = -1$．

3）二重极限和二次极限是两个不同的概念，二次极限是先后完成的两个极限过程，而二重极限却是一个极限过程，绝不要混用.

例 1　证明：$\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x} = 0$．

证明　$\left| (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x} - 0 \right| \leqslant x^2 + y^2$，

可见，$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$，则当 $0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$ 时，总有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x} = 0$．

二、二重极限的求法

1. 求二重极限的常用方法

1）应用函数的连续性求极限.

若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

2）利用已知极限（重要极限、无穷小量法等）求极限.

3）利用夹逼准则求极限.

例 2　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x, y) \to (0, 1)} \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2}$；　　（2）$\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{x(x+y)}$.

解（1）因为函数在$(0,1)$处连续，有$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$；

（2）由于$0\leqslant\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\dfrac{y^3}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}|y|$

$\leqslant|x|+|y|$，

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x=0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y=0$，

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{x(x+y)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin xy}{xy}\bullet\dfrac{y}{x+y}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin xy}{xy}\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y}{x+y}=1\times1=1.$$

例 3 求下列极限

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}$.

解（1）因为$0\leqslant\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|$，

由夹逼准则，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}y^2=0.$$

（3）令$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，当$(x,y)\to(0,0)$时，$\rho\to0$，

而 $0\leqslant\left|\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\dfrac{\rho^2|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|}{\rho}\leqslant2\rho$，

由夹逼准则，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2y^2}}\bullet\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0.$$

2. 按照二重极限的定义来求

若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，要求点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 有相同的极限. 因此判定二重极限不存在，常用以下两种方法：

1）按某一方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在；

2）找出两种不同（趋向于 $P_0(x_0,y_0)$）的方式，所得极限不相等，则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

例 4 证明下列极限不存在

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证明 （1）$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+kx}{x-kx}=\dfrac{1+k}{1-k}$，

显然它是随着 k 的不同取值而改变的，尤其取直线 $y=x$ 趋于原点时极限不存在，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

（2）$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2x^2}{x^2x^2}=1$，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{4x^2+1}=0,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

例 5 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx}{x^2+k^2}=0.$

这说明此函数沿任一过原点的直线趋于原点时其极限都为零，更一般地，当动点 $P(x,y)$ 沿非二次曲线：$y=kx^\alpha$ $(\alpha\neq2)$ 趋近于原点时，$f(x,y)$ 的极限也都为零.

事实上，当 $\alpha>2$ 时：

$$f(x,kx^\alpha)=\frac{x^2kx^\alpha}{x^4+k^2x^{2\alpha}}=\frac{kx^{\alpha-2}}{1+k^2x^{2(\alpha-2)}}\to0\quad(x\to0);$$

当 $\alpha<2$ 时：

$$f(x,kx^\alpha)=\frac{x^2kx^\alpha}{x^4+k^2x^{2\alpha}}=\frac{kx^{2-\alpha}}{x^{2(2-\alpha)}+k^2}\to0\quad(x\to0).$$

这并不能说明此极限存在，因为当 $P(x, y)$ 沿 $y = x^2$ 趋向于 $O(0,0)$ 时，

$$f(x, x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \quad (x \to 0),$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

三、二重极限与二次极限的关系

鉴于二重极限与二次极限的是两个不同的概念，它们之间的关系有：

1. 二重极限存在，但二次极限不存在

例 6 $f(x, y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

解 在例 3 中，知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} = 0$，

但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 都不存在.

2. 两个二次极限都存在且相等，但二重极限不存在

例 7 $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$，

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在（见例 5）.

第三节　偏导数、全微分及其计算

一、定义及说明

1. 偏导数定义

定义 1 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，偏导数定义为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

偏导也记为$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$、$z_x\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$、$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$等.

当$z=f(x,y)$在区域D内每一点(x,y)处对x的偏导数都存在，称此函数为$f(x,y)$对x的偏导函数，简称偏导数. 记做$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial x}$、$z_x$或$f_x(x,y)$.

类似有对y的偏导数$\frac{\partial z}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$z_y$、$f_y(x,y)$或$z'_y$、$f'_y(x,y)$等.

此定义可推广到三元以上的函数.

注 1）记号“$\frac{\partial z}{\partial x}$”、“$\frac{\partial z}{\partial y}$”是一个整体记号，不能分开，单独写记号“$\partial z$”、“$\partial x$”、“$\partial y$”是毫无意义的，这与一元函数的导数记号“$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”可看做微商（$\mathrm{d}y$与$\mathrm{d}x$的商）是不同的.

2）由偏导定义，在求$f_x(x_0,y_0)$时，可先将$y=y_0$代入$z=f(x,y)$中，再对x在$x=x_0$处求导即可. 事实上，

若记$\varphi(x)=f(x,y_0)$，则

$$\begin{aligned}\varphi'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f'(x_0,y_0).\end{aligned}$$

所以，求二元函数的偏导数，就是先把另一自变量看做常数，对该自变量求导.

例 1 求$z=x^2+xy+y^2$在点$(1,2)$处的偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$.

解法 1 由定义

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)+4-7}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+4(\Delta x)}{\Delta x}=4.\end{aligned}$$

解法 2 先求偏导，再代入点$(1,2)$计算

因为$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y$，所以$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=4$.

解法 3 先将$y=2$代入函数z再求导，记

$$\varphi(x)=f(x,2)=x^2+2x+4,$$

$$\varphi'(x)=2x+2,$$

$$\varphi'(1)=4,$$

从而，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=4.$$

由此可见，求偏导与一元函数求导在本质上是一样的.

2. 高阶偏导数

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$ 也存在偏导数，称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记做

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、第三两个偏导数称为混合偏导数，类似有三阶、四阶……以及 n 阶偏导数.

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 2 设 $z=x^y$，求二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^y\frac{1}{x}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x.$$

这里得到两个二阶混合偏导数相等不是偶然的，相应的结论后面给出.

3. 全微分

定义 2 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为：$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y,\quad 或\quad \mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

例 3 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，$g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，且 $g(x_0,y_0)=0$. 证明：$f(x,y)g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

证明 记 $z=f(x,y)g(x,y)$，$x-x_0=\Delta x, y-y_0=\Delta y$，$f(x_0,y_0)=A$，$g_x(x_0,y_0)=B$，$g_y(x_0,y_0)=C$.

则

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x,y)g(x,y)-f(x_0,y_0)g(x_0,y_0)\\&=f(x,y)g(x,y)\end{aligned}$$

$$=(A+\varepsilon)[g(x,y)-g(x_0,y_0)]$$
$$=(A+\varepsilon)[B\Delta x+C\Delta y+o(\rho)]$$
$$=AB\Delta x+AC\Delta y+Ao(\rho)+\varepsilon B\Delta x+\varepsilon C\Delta y+\varepsilon o(\rho),$$

其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon=0$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

而
$$\lim_{\rho\to 0}[Ao(\rho)+\varepsilon B\Delta x+\varepsilon C\Delta y+\varepsilon o(\rho)]/\rho$$
$$=\lim_{\rho\to 0}\left[A\frac{o(\rho)}{\rho}+B\frac{\Delta x}{\rho}\varepsilon+C\frac{\Delta y}{\rho}\varepsilon+\varepsilon\frac{o(\rho)}{\rho}\right]$$
$$=0.$$

从而 $\Delta z=AB\Delta x+AC\Delta y+o(\rho)$，

所以 $f(x,y)g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

二、有关定理及结论

定理 1 如果 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关.（见例 2.）

可推广为：高阶混合偏导数在连续的条件下也与求导次序无关.

定理 2 （可微的必要条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全微分为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$. 反之不一定成立.（参见本节例 10.）

定理 3 （可微的充分条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微. 反之不一定成立.（参见本节例 11.）

结论 （1）函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则函数在该点必连续.

（2）函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 偏导数存在，并不能保证在该点连续. 反之，$z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续也不能保证在该点的偏导数存在.

三、二元函数中几个基本概念间的关系

在一元函数中，我们知道函数 $y=f(x)$ 在点 x 处连续、可导和可微之间的关系如图 8–3 所示. 对于二元函数 $z=f(x,y)$ 来说，在点 (x,y) 处连续、偏导存在、全微分存在、偏导函数连续之间有如图 8–4 的关系.

从图 8–4 中可看出：偏导函数连续的条件最强，可推出可微，可微可推出函数连续且偏导函数存在；反之，都不成立.

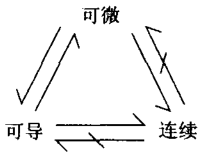

图 8–3

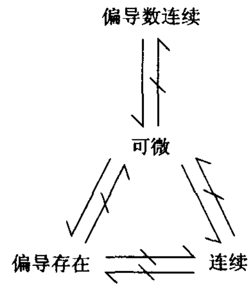

图 8–4

例 4 考虑二元函数的下面 4 条性质：

1） $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续；

2） $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续；

3） $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微；

4） $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

A. $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$　　B. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$

C. $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$　　D. $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$

解 本题主要是考察二元函数在一点处两个偏导数连续、可微、两个偏导数存在及连续四者之间的关系，由图 8–4 所列它们之间的关系可知选 A.

四、几个概念的几何意义

1）二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线对 x 轴的斜率.

同样，$f_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面 $z = f(x, y)$ 被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线对 y 轴的斜率.

2）二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分，在几何上表示曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_o) 处的切平面上点的竖坐标的增量.

例 5 曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 由偏导数的几何意义知 $\tan\alpha = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4)}$

而 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{2}$，进而 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)} = 1$，

所以 $\tan\alpha = 1$，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

五、典型问题的处理

1）求二元函数 $z=f(x,y)$ 在某点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$（$f_y(x_0,y_0)$）可先将 $y=y_0$（$x=x_0$）代入，然后转化为求一元函数的导数，这样计算较简单.

例 6 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解法 1 $f_x(x,y)=1+(y-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}2\sqrt{\dfrac{y}{x}}\dfrac{1}{y}$，

所以 $f_x(x,1)=1$.

解法 2 $f_x(x,1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,1)]=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1$.

例 7 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}\cos y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的偏导数.

解 $f_x(1,0)=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\right]_{x=1}=\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{2x})\right]_{x=1}=2\mathrm{e}^2$；

$$f_y(1,0)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y)\right]_{y=0}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\mathrm{e}^2\cos y)\right]_{y=0}=0.$$

显然，这种方法比先求偏导函数，然后再将点代入计算值要简单得多.

2）求偏导时，尤其求高阶偏导时，常利用函数关于自变量的对称性，简化求导.

例 8 设 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\dfrac{1}{x^2}=z\dfrac{1}{x^2}$；

由函数关于自变量的对称性，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\dfrac{1}{y^2}$.

例 9 验证 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

解 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$，

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}；$$

利用函数对自变量的轮换对称性，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

所以