

A First Course in Abstract Algebra with Applications

(Third Edition)

抽象代数基础教程

(原书第3版)

(美) Joseph J. Rotman 著
伊利诺伊大学

李样明 冯明军 译



机械工业出版社
China Machine Press

36

A First
Course in
Abstract Algebra
with Applications
(Third Edition)

0153/39

2008

抽象代数基础教程

(原书第3版)

(美) Joseph J. Rotman 著
伊利诺伊大学

李样明 冯明军 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书全面系统地讲解代数学的基础知识,包括群论、环论、域论及主理想整环、多元多项式理论等。本书范例丰富,描述风趣易懂。另外,每一小节后均配有一定数量、难易不等的习题,书后还附有解答与提示,便于教学和自学。

本书可供高等院校数学系师生及相关工程技术人员参考。

Simplified Chinese edition copyright © 2008 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *A First Course in Abstract Algebra with Applications, Third Edition* (ISBN 0-13-186267-7) by Joseph J. Rotman, Copyright © 2006, 2000, 1996.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2006-1939

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数基础教程/(美)罗特曼(Rotman, J. J.)著;李样明,冯明军译. -北京:机械工业出版社,2008.1

(华章数学译丛)

书名原文: *A First Course in Abstract Algebra with Applications, Third Edition*

ISBN 978-7-111-21262-1

I. 抽… II. ①罗… ②李… ③冯… III. 抽象代数—高等学校—教材 IV. O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 047796 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:李南丰

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2008 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm·29.5 印张

定价:65.00 元

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换

本社购书热线:(010)68326294

译者序

Joseph J. Rotman 是美国伊利诺伊大学厄巴纳-尚佩恩分校数学系教授。他在环与代数的研究中颇有建树，在相关杂志上发表论文 30 多篇，但他最擅长的还是写书。他著有多部数学方面的专著，其中包括《Advanced Modern Algebra》^①、《Galois Theory》及这本《A First Course in Abstract Algebra》等。

本书第 1 版出版于 1996 年，这里翻译的是最新的第 3 版。此书被美国许多高校选为本科生及研究生的代数学教科书或教学参考书。该书全面论述了代数学的基础知识，如群论、环论、域论、主理想整环以及多元多项式理论等。另外，本书对于教授和学习方法做了精心的安排，并提出了多种建议。关于此书的特点，作者在前言中已做了详细的阐述，我们在此着重指出以下几点（这也是国内众多代数学教材所缺乏的）：1. 本书较为详细地介绍了许多数学术语的语源，这使得枯燥的数学名词变得十分有趣；2. 本书注意介绍了在代数学中结合应用现代计算机理论的知识；3. 许多概念都有作者本人独特的见解，便于读者掌握这些概念的实质，例如，第 4 章对向量空间的“基”定义，作者就强调了它首先是一组有序的向量，国内相应的教材处理得就没这么细致。

新中国成立以来，国内已出版了许多近世代数学方面的译作，但是影响最大的当属以下两本：一是曹锡华、曾肯成和郝炳新等翻译的 B. L. Waerden 的《Algebra》；另一本是冯克勤翻译的 T. W. Hungerford 的《Algebra》。这两本书对我国代数学的普及和发展均起了推动作用，使得我国从事代数学研究和教学的人（包括译者本人）受益匪浅。但这两本书都略显陈旧，前者出版于 20 世纪 50 年代，后者出版于 20 世纪 70 年代。近年来，代数学研究得到迅猛发展，出现了许多新的分支，且重心也发生了改变，以前重要的内容现在已变得不那么重要了。不仅如此，在数学的许多其他分支中，代数学也逐渐成为不可缺少的基本工具。更为重要的是，由于计算机技术的发展和普及，以及由此而引发的离散数学的兴起，使得代数学在通信、系统工程和计算机科学等许多领域中得到了非常广泛的应用，代数学已成为一些先进国家在这些领域中从事开发的研究人员的基本工具。我国代数学的研究、教学和普及工作也需要适应这种发展形势的要求。在我国高等院校中，代数课程的教学课时数远低于分析学课程，而且教学内容也需要补充和更新。我们在机械工业出版社的邀请下将 Joseph J. Rotman 的《A First Course in Abstract Algebra》一书翻译成中文，就是希望对当前我国的代数学教学、普及和研究工作能起到积极的作用，希望国内的读者能接触以及了解国外大学的先进教材。

① 该书中文版《高等近世代数》由机械工业出版社出版。——编辑注

本书分为七章，前三章及习题提示部分由冯明军执笔翻译，其余部分的翻译工作及全书的统稿工作由李样明完成。在翻译过程中，得到了机械工业出版社华章分社编辑的许多帮助及理解，钟运强、叶剑雄等多位学生为我们输入了大量的汉字，在此对他们一并表示感谢。

译者在翻译过程中发现了原书的某些错误(主要是印刷方面的)，这些错误均经原作者认可并在中译本中做了改正，在此不一一列出了。

由于本书篇幅较大且译者学识浅陋，译稿中难免出现错误和疏漏，欢迎大家指正。

译 者

2007 年 5 月于广州

译者简介



李样明, 男, 1965 年 5 月出生, 江西东乡人, 硕士(郑州大学, 导师: 裘光明教授, 黄建华教授)、博士(中山大学, 导师: 王燕鸣教授), 博士后(浙江大学, 合作导师: 李方教授). 广东教育学院数学系教授, 广东教育学院学术委员会委员, 国际期刊《JP Journal of Algebra, Number Theory and Application》和《Far East Journal of Mathematics》的编委, 广东省自然科学基金基础数学组评审专家, 广东省高等学校“千百十”工程中第四批省级培养对象, 南昌大学兼职教授和硕士生导师, 美国数学会会员.

李样明教授的主要研究兴趣是有限群的结构理论和四元数矩阵理论, 近年在《Journal of Algebra》、《Journal of Pure and Applied Algebra》、《Communication in Algebra》、《Algebra Colloquium》、《Journal of Group Theory》、《Proc. Amer. Math. Soc.》、《Archiv der Mathematik》、《Acta Math. Hungary》、《Siberian. Math. Journal》、《Publ. Math. Debrecen》、《Israel Journal Mathematics》、《Bull. Austral. Math. Soc.》和《数学学报》等国际、国内权威或核心杂志上发表论文 50 多篇, 其中有近 20 篇被 SCI 收录. 李样明教授先后主持并完成中国博士后基金、浙江省博士后择优基金、广东省自然科学基金和广东省高校自然科学基金等 5 个项目, 作为主要成员(排名第二)参加中山大学王燕鸣教授主持的国家自然科学基金、教育部重点博士点基金等 3 个项目. 李样明教授的教学经验丰富, 教龄近二十年(在南昌大学、广东教育学院各工作了将近十年), 先后为研究生、本科生等讲授《有限群基础》、《可解群》、《高等代数》、《近世代数》、《初等数论》、《高等数学》、《大学英语》和《专业英语》等多门课程. 目前已在南昌大学招收硕士研究生 5 名.



冯明军, 男, 1976 年 8 月出生, 湖北黄冈市人, 硕士(江西师范大学), 广东教育学院数学系讲师. 冯明军老师的的教学经验丰富, 先后讲授过《高等代数》、《近世代数》、《初等数论》、《高等数学》、《大学英语》和《专业英语》等多门课程. 在省级以上学术刊物发表专业论文多篇, 并且作为主要成员参加了李样明教授主持的广东省自然科学基金和广东省高校自然科学基金等 3 个省级以上课题.

前言

本书介绍了数论、群和交换环的知识。群论是伽罗瓦在 19 世纪早期发明的，那时他完全用群论确定了其根可用广义的二次求根公式来求解的多项式。当今，群论是讨论几何及其他学科中各种对称性的精确的工具。本书除了介绍伽罗瓦的思想外，还分类了称为楣(frieze)的平面设计，以及用群论来求解一些复杂的计数问题，例如，若每个珠子是红色的、白色的或者蓝色的，则穿有 6 颗珠子的手镯共有多少种？在交换环这个合适的上下文中，可以研究数论，也可以研究多项式理论中的许多方面的内容。整数的最大公因数和模算术等思想可以毫不费力地推广到单变量的多项式环中。书中给出了公共存取码、日历、拉丁方、幻方及实验设计等应用。接着讨论纯量在任意域(不仅仅是实数域)中的向量空间，此研究使得我们能够解决涉及尺规作图的经典的希腊问题：三等分一个角、2 倍一个立方体、化圆为方以及构造正 n -边形。有限域上的线性代数被应用于编码理论中，说明人们是如何对噪声信道上发送的信息(如从其他星球传到地球的图片)进行译码的。书中证明了求三次和四次多项式的根的经典公式，此后利用群和交换环的知识证明了伽罗瓦定理(其根可由这样的公式给出的多项式有可解的伽罗瓦群)及其推论和阿贝尔定理(存在五次多项式，其根不能由这些公式的推广形式给出)。这些仅仅是伽罗瓦理论的一个简介，希望对这门优雅的学科有更多了解的读者必须学习进一步的课程。代数是迷人的，希望我对它的热情能够传给读者。

为适应具有不同基础的读者，此书包含了超过适用于一个或两个学期的内容。前四章包含了通常适用于第一学年的所有内容，但是许多部分不必讲授，其原因在于或者它们是已知的(数学归纳法、二项式定理、复数、线性代数)，或者它们不是很重要，或者它们会包含在进一步的课程中。然而，教师依然可从这些可选部分及后面的章节中为那些对此感兴趣的学生指定一些内容。感兴趣的读者可读到本书的最后，本书的后几章进一步研究了群和环。在第 6 章中，证明了有限交换群是循环群的直积，给出了有限群的最大 p -子群的存在性(和意义)，讨论了楣(frieze)的对称群的分类。最后一章是多元多项式的一个简介，包括希尔伯特基定理、簇、 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 上的希尔伯特零点定理以及与格罗布纳基相关的算术方法。因此，最后两章展示了早期思想发展后的某些方向，它们可作为当前课程之外的代数方面的参考。

本版的一些新特征如下：

- 重新写了内容，使得表达更通顺。
- 在前五章中，最重要的节、小节、定义、定理及例子旁加有箭头指示。
- 第 2 章和第 3 章分别介绍了群和交换环，它们本质上是彼此独立的，因此，只要少许改变，就可以先学群或者先学交换环。
- 包含了任意域上的线性代数的更多知识。这样就增加了关于码的新节，其内容深至里德-索罗门(Reed-Solomon)码的译码。
- 增加了一节介绍分类平面上的楣(frieze)群。

• 习题:

(i)前一版中有 414 道习题, 而此版共有 574 道习题.

(ii)每一组习题都从一道判断题开始, 用以复习此节中重要的知识点.

(iii)在课文中直接引用的每一道习题都标注有 * 号.

(iv)那些标注有 H 的习题, 在本书后均有提示, 读者在看提示之前应自己先考虑该问题.

• 将所有的引理、定理、命题、推论和例子都进行了统一的编号, 这样参考时会更容易一些.

• 包含特殊符号的介绍, 其中给出了引入符号的页码.

当今, 抽象代数被看成是一门具有挑战性的课程, 许多聪明的学生在学习它时也似乎有相当的困难. 当然, 学生必须学会用一种新的方式思考. 公理方式的推理在某种程度上是新的, 而其他的方式也可能更为形象. 一些学生从未写过证明, 另一些学生也许曾经写过, 但由于缺乏使用可能已经不熟练了. 但这些障碍中没有一条能充分地解释已遇到的困难. 毕竟, 同样的障碍在开始学实分析课程时就存在了, 但大部分学生经过早期的努力, 在这些课程的学习中的确掌握了相应的内容. 然而, 在标准的代数课程的学习过程中困难是一直存在的, 无论是先教群还是先教环, 或者是调整一些内容. 我认为导致学习抽象代数困难的一个主要因素是群和环都是在第一门课程中引入的. 当学生刚刚开始对一个主题有所了解后, 就马上转而学另一个了. 而且, 在给出有意义的应用之前学习群论或交换环论给了学生一个错误的印象, 即这些理论或者没有实际价值, 或者(极有可能是这种情况)直到将来某时刻才有用. 设想一下, 基础的实分析和复分析课程都在第一个学期引入, 怎么会有充足的时间来证明中值定理和刘维尔定理呢? 如果代数作为一学年(两个学期)的课程来教, 那就不必将两个专题都挤在入门课程中, 这样, 将呈现出一门更真实、更有吸引力、更生动的代数课程. 如今, 这种选择较过去更加实际可行行了, 因为抽象代数的许多应用使得对它感兴趣的学生越来越多, 而他们之中很多都是非数学专业的. 因此我将此书重写, 以满足两类读者的需要. 一方面, 此新版本可作为那些喜欢当今流行的将群和环都在第一个学期中讲授的学生的教材, 书中有足够多的材料, 可作为后续课程的教材; 另一方面, 此书也可以作为一学年课程的教材. 本书内容有多种可能的组合: 建议在第一学期先讲授数论和交换环, 线性代数和群论放在第二学期讲授. 这些课程的详细教学大纲会在后面给出.

很少有数学教材会给出数学术语的语源. 因此这里要说明并分析一下, 为什么本书要给出很多术语的语源. 对于标准的扑克游戏而言, 现在已有很多变种. 在玩扑克游戏时, 发牌人通过给它命名来宣布他所选择的. 现在看来, 一些游戏的名字明显优于其他游戏的名字. 譬如, “最小的红色”是这样一个游戏, 在这个游戏中, 每个玩家手中的最小的红色的牌是“主将”, 这是一个好名字, 因为这个名字提醒玩家这个游戏自身的特色. 另一方面, “加重”就不是一个很好的名字, 尽管这个名字也有提示性, 但它不能把这个特殊的游戏与其他几个游戏区别开来. 在数学中, 大部分的术语都是精心选择的, 这意味着“最小的红色”这样的术语比“加重”这样的术语要多得多. 下面就是一个好名字的例子: 偶置换. 一个置换是偶的, 若它是偶

数个对换的乘积. 另一个好名字的例子是描述向量加法时的“平行四边形定律”. 但是, 很多好的名字, 在选择时它的意义是清楚的, 而后来变得比较晦涩了, 因为这些名字的根源不是在其他语言中就是在其他学科中. 三角几何的术语 *tangent* (正切函数) 和 *secant* (正割函数) 对那些懂拉丁语的人来说是合适的名称, 但对不懂拉丁语的人而言是晦涩的 (请看第 32 页[⊖] 关于它们起源的一个讨论). “数学” (*mathematics*) 这个术语现在就比较晦涩, 因为我们大部分人都不知道它其实是来自古希腊文中的词, 意思是“去学会” (*to learn*). “推论” (*corollary*) 这个术语则更晦涩了, 这个词来自拉丁文, 意思是“花”, 但是为什么将其称为花呢? 一个似是而非的解释是这样的: 在古罗马, 送花作为礼物是很常见的, 而推论就是定理赠予的礼物. “定理” (*theorem*) 这个术语来自希腊语, 意思是“去看”或者“去凝视” (剧院 (*theatre*) 有同样的词根), 是欧几里得最先这样使用的. “引理” (*lemma*) 这个术语也是从希腊语中来的, 意思是“拿到”或“收到”, 这个词是一个声明, 它被准许用在一个定理的证明过程中 (因为它已经被证明过了). 我认为数学术语的语源是值得去探究的 (并且非常有趣), 因为它经常帮助我们理解数学术语, 从而使数学术语不再那么晦涩了.

除了再次感谢那些在前两版中帮助过我的人外, 我还要特别感谢 George Bergman, 他给了我许多建议, 并且慷慨地允许我使用许多有意义的习题. 感谢 Chris Heil, 他指出了我未发现的一些细小的错误. 感谢 Iwan Duursma, 他在码这个新的小节中帮助过我. 最后, 我要感谢 William Chin、Joel S. Foisy、Robert Friedman、Blair F. Goodlin、Zahid Hasan、Ilya Kapovich、Dieter Koller、Fatma Irem Koprulu、Mario Livio、Thomas G. Lucas、Leon McCulloh、Arnold W. Miller、Charles H. Morgan, Jr., Chuang Peng、Eric Schmutz、Brent B. Solie、Paul Weichsel 和 John Wetzel.

George Lobell 是直到此版书完成后才离开 Prentice Hall 的, 他一直在本书的内容和风格上给我明智的建议, 这个新的版本若没有他的帮助是不会有本质上的进步的, 我衷心地感谢他的指导.

Joseph J. Rotman
rotman@math.uiuc.edu

⊖ 这是指原英文书页码, 与书中页边标注的页码一致. ——编辑注

教学大纲建议

下面给出一些将本书用作一学期课程的教材的建议，一个学期包含大约 45 学时（一学时通常是 50 分钟；Paul Halmos 发现，一个微世纪，即一个世纪的百万分之一，就大约是 52.6 分钟）。这里提供了 5 个教学大纲，第一个（即表 1）是为当前流行的课程而设计的“标准”大纲：在一学期的课程中介绍群和环。此大纲有三个专题——第 1 章：数论；第 2 章：群；第 3 章：交换环。调换专题的顺序，将交换环先于群来讲授也是可以的，因为我重写了第 2 章和第 3 章，使得它们本质上是彼此独立的。另外，我不同意当今有些人的观点，即先介绍群比先介绍环更有效。第 3 章几乎没有提及群论，其现在的内容与前面版本中相应的内容一样多。

后两个大纲（即表 2 和表 3）中的任一个都是用于后续课程的（教材中有足够的用以构建其他后续课程的内容）。

我自己的讲授抽象代数的想法已经变了。现在我认为最好的做法是一学年两个学期的课程，其中在第一个学期中只讲授群或环。此外，建议在第一个学期中讲授数论和交换环，在第二个学期中讲授线性代数和群论。表 4 和表 5 就是为这样的课程设计的大纲。（当然，我认可提议先讲授群的人在争议中所说的优点。用此教材作为一学年的课程并这样组织的教学大纲应该很容易设计。）我认为先讨论交换环更自然一些。当我们从 $\mathbb{Z}$ 过渡到 $k[x]$ 时，可以将算术的结论和证明推广到多项式中去。若第二个学期从线性代数开始，则群的讨论就可处理得更更有意义些，因为除了置换群外，带有几何背景的矩阵群可作为群的第二个具体的例子。

表 1 标准的一学期教学大纲：41 学时

节	专 题	学 时
1.3	除法算式，欧几里得引理，欧几里得算法	3
1.4	算术基本定理	1
1.5	同余，费马，中国剩余定理	3
2.1	函数	1
2.2	置换	4
2.3	群和例子	2
2.4	子群和拉格朗日定理	2
2.5	同态	2
2.6	商群和同构定理	4
2.7	群作用	4
2.8	伯恩赛德计数（简介）	1
3.1	交换环和子环	1
3.2	域	1

(续)

节	专 题	学 时
3.3	多项式环 $R[x]$	1
3.4	同态	2
3.5	从数到多项式	3
3.6	多项式的唯一分解	1
3.7	不可约性(简介)	2
3.8	商环和有限域	3

表 2 第二学期, 教学大纲 A: 40 学时

节	专 题	学 时
4.1	向量空间和维数	5
4.1	高斯消元法	3
4.2	欧氏作图	3
4.3	线性变换	4
4.4	行列式和特征值	2
4.5	编码	6
5.1	经典公式	2
5.2	根式可解性	4
5.2	用群论语言的叙述	4
5.3	结束语	1
6.1	有限阿贝尔群	3
6.2	西罗定理	3

表 3 第二学期, 教学大纲 B: 38 学时

节	专 题	学 时
4.1	向量空间和维数	5
4.1	高斯消元法	3
4.2	欧氏作图	3
4.3	线性变换	4
4.4	行列式和特征值	2
6.1	有限阿贝尔群	3
6.2	西罗定理	3
6.3	楕圆的对称群(简介)	3
7.1	素理想和极大理想	1
7.2	唯一分解	3
7.3	诺特环	2
7.4	簇	6

表 4 一学年教学大纲, 学期 I : 39 学时

节	专 题	学 时
1.3	除法算式, 欧几里得引理, 欧几里得算法	4
1.4	算术基本定理	1
1.5	同余, 费马, 中国剩余定理	4
2.1	函数	1
3.1	交换环和子环	2
3.2	域	1
3.3	多项式环 $R[x]$	2
5.1	经典公式	2
3.4	同态	2
3.5	从数到多项式	4
3.6	多项式的唯一分解	2
3.7	不可约性	3
3.8	商环和有限域	4
3.9	拉丁方, 幻方, 射影平面(简介)	1
7.1	素理想和极大理想	1
7.2	唯一分解(简介)	1
7.3	诺特环(简介)	1
7.4	簇(简介)	3

表 5 一学年教学大纲, 学期 II : 42 学时

节	专 题	学 时
4.1	向量空间	5
4.1	高斯消元法	3
4.2	欧氏作图	3
4.3	线性变换	4
4.4	特征值	2
4.5	编码(简介)	3
2.2	置换	4
2.3	群和例子	2
2.4	子群和拉格朗日定理	2
2.5	同态	2
2.6	商群和同构定理	4
2.7	群作用	4
2.8	伯恩赛德计数(简介)	1
6.1	有限阿贝尔群(简介)	1
6.2	西罗定理(简介)	1
6.3	装饰的对称(简介)	1

致 读 者

在本书的前五章中，所有主要的节、小节、定理、定义及例子的旁边都加有箭头（其他部分尽管也有意义，但不像带箭头部分那样重要）。

教材中的习题有两个主要功能：加强读者对内容的掌握，提供一些解答使人愉快的难题。因此，严谨的读者应该尝试做所有的习题（许多习题不难）。

习题中有两个特殊的记号，一个是星号，如* 2.44，其意思是此习题在教材的其他地方被引用了；还有一个是字母 H，如 H2.47，其意思是在书后有此习题的提示。这些记号不是指习题的难易程度。

每一组习题都是从一道标有“判断对错并说明理由”的判断题开始的。例如，“4 次单位根是 i 和 $-i$ ”，则正确答案是“错，1 也是一个 4 次单位根”。断言“错”必须用一个具体的例子来说明。又如，“ $2+4+\cdots+100=50\times 51$ ”，则正确答案是“对，利用命题 1.6，我们有

$$2+4+\cdots+100=2[1+2+\cdots+50]=2\left[\frac{1}{2}(50\times 51)\right]=50\times 51.”$$

断言“对”必须用一个本教材中提供的结论的“简短的证明”或者一个显然的论断来说明。

特殊符号

集合论和数论

$\mathbf{N}$	自然数集合	$1^{\ominus}$	$X \subsetneq Y$	X 是 Y 的一个真子集	85
$\mathbf{Z}$	整数集合	1	$\emptyset$	空集	85
$\binom{n}{r}$	二项式系数 n 中选 r	20	$X \times Y$	笛卡儿积	88
$\lfloor x \rfloor$	x 中的最大整数(下取整)	28	1_X	集合 X 上的恒等映射	88
$\Phi_d(x)$	d 次分圆多项式	31	$ X $	有限集合 X 中元素的个数	88
$\phi(n)$	欧拉 ϕ 函数	32	$\operatorname{im} f$	函数 f 的像	88
$\mathbf{Q}$	有理数集合	37	$f: a \mapsto b$	$f(a) = b$	89
$\mathbf{R}$	实数集合	37	$a \equiv b$	a 等价于 b	99
$\mathbf{C}$	复数集合	37	$[a]$	a 的等价类	100
$a \mid b$	a 是 b 的一个因子	39	$[a]$	a 的同余类	100
(a, b)	a 和 b 的 $\gcd$ (最大公因数)	39	$\mathbf{I}_m$	整数模 m 的剩余类全体	172
$[a, b]$	a 和 b 的 lcm (最小公倍数)	57	$x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$	表 $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ 中去掉 x_i 后所得的表	257
$a \equiv b \pmod m$	a 同余于 $b \pmod m$	59	δ_{ij}	克罗内克 δ 函数	369
$X \subseteq Y$	X 是 Y 的一个子集	85			

群论

S_X	集合 X 上的对称群	107	$[G: H]$	H 在 G 中的指数	156
S_n	n 次对称群	107	$\operatorname{SL}(n, k)$	特殊线性群	158
$\operatorname{sgn}(\alpha)$	置换 α 的示性数	121	$G \cong H$	G 同构于 H	159
$\operatorname{GL}(n, k)$	一般线性群	131	$\ker f$	f 的核	163
$\operatorname{Isom}(\mathbf{R}^2)$	平面的等距同构群	139	$H \triangleleft G$	H 是 G 的正规子群	164
$O_2(\mathbf{R})$	平面的正交群	139	$Z(G)$	G 的中心	166
D_{2n}	$2n$ 阶的二面体群	144	$\mathbf{Q}$	8 阶四元数群	167
$\Sigma(2, R)$	随机群	147	G/H	商群	179
$\mathbf{V}$	四元群	148	$H \times K$	直积	186
$H \leq G$	H 是 G 的子群	148	G_x	x 的稳定化子	197
$H < G$	H 是 G 的真子群	148	$\mathcal{O}(x)$	x 的轨道	197
A_n	n 元交错群	150	$C_G(a)$	$a \in G$ 的中心化子	198
aH	左陪集	154	$\operatorname{GL}(V)$	向量空间 V 的所有自同构	379

$\ominus$ 这是指英文原书页码, 与书中页边标注的页码一致。——编辑注

$H \oplus K$	直和	475	$N_G(H)$	$H \leq G$ 的正规化子	491
$\sum_{i=1}^n S_i$	子群的和	479	$UT(n, k)$	域 k 上的单位三角矩阵全体	496
$\bigoplus_{i=1}^n S_i$	子群的直和	479			

交换环和线性代数

I 或 I_n	单位矩阵	131	$\text{Mat}_n(k)$	域 k 上的所有 $n \times n$ 矩阵	322
$\mathbb{Z}[i]$	高斯整数环	219	A^T	矩阵 A 的转置	324
$\mathcal{F}(R)$	实数集合 R 上的函数构成的环	224	$\text{Row}(A)$	矩阵 A 的行空间	327
$\mathcal{F}(R)$	环 R 上的函数构成的环	230	$\text{Col}(A)$	矩阵 A 的列空间	327
$\mathcal{B}(X)$	布尔环	229	$\text{Sol}(A)$	齐次方程组 $Ax=0$ 的解空间	327
$U(R)$	环 R 上的单位构成的群	228	$\dim(V)$	向量空间 V 的维数	334
F_p, F_q	具有 p 或 q 个元素的有限域	231	E/k	域扩张	340
$\text{Frac}(R)$	整环 R 的分式域	233	$[E: k]$	域扩张 E/k 的次数	340
$R^\times$	环 R 中的非零元全体	235	$\text{Hom}_k(V, W)$	$V \rightarrow W$ 的 k -线性变换全体	366
$\deg(f)$	多项式 $f(x)$ 的次数	236	${}_Y[T]_X$	线性变换 T 关于基 X, Y 的矩阵	369
$k[x]$	域 k 上的多项式环	238	$\det(A)$	矩阵 A 的行列式	384
$k(x)$	域 k 上的有理函数全体	241	$\text{tr}(A)$	矩阵 A 的迹	391
$k[[x]]$	域 k 上的形式幂级数环	243	$\text{Van}(a_1, \dots, a_n)$	范德蒙德行列式	397
$R \cong S$	R 同构于 S	243	$\text{Supp}(w)$	$w \in k^n$ 的支撑	407
$(a_1, \dots, a_n)$	由 $a_1, \dots, a_n$ 生成的理想	249	$Z(w)$	$w \in k^n$ 的零点集	407
(a)	主理想	249	$\text{Gal}(E/k)$	E/k 的伽罗瓦群	454
$R \times S$	直积	252	$\text{Var}(I)$	理想 I 的代数集	542
$a+I$	陪集	292	$\text{Id}(V)$	代数集 V 的理想	545
R/I	商环	292	$\sqrt{I}$	理想 I 的根	547
$k(z)$	添加 z 至域 k 中	299	$\text{DEG}(f)$	多项式 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的多重次数	561
$A \cdot B$	矩阵 A 和 B 的阿达马积	306			
$A \otimes B$	矩阵 A 和 B 的克罗内克积	308			

目 录

译者序		
译者简介		
前言		
教学大纲建议		
致读者		
特殊符号		
第 1 章 数论	1	
1.1 数学归纳法	1	
1.2 二项式定理与复数	13	
1.3 最大公因子	26	
1.4 算术基本定理	40	
1.5 同余	42	
1.6 日期与天数	55	
第 2 章 群 I	61	
2.1 一些集合理论	61	
2.1.1 函数	63	
2.1.2 等价关系	71	
2.2 置换	76	
2.3 群	89	
2.4 子群和拉格朗日定理	104	
2.5 同态	112	
2.6 商群	121	
2.7 群作用	136	
2.8 用群计算	148	
第 3 章 交换环 I	154	
3.1 基本性质	154	
3.2 域	163	
3.3 多项式	166	
3.4 同态	172	
3.5 从数到多项式	179	
3.6 唯一分解	196	
3.7 不可约性	200	
3.8 商环与有限域	207	
3.9 一个数学历程	218	
3.9.1 拉丁方	218	
3.9.2 幻方	221	
3.9.3 试验设计	224	
3.9.4 射影平面	226	
第 4 章 线性代数	229	
4.1 向量空间	229	
4.2 欧氏作图	254	
4.3 线性变换	262	
4.4 特征值	275	
4.5 码	287	
4.5.1 分组码	287	
4.5.2 线性码	292	
4.5.3 译码	305	
第 5 章 域	312	
5.1 经典公式	312	
5.2 一般五次方程的不可解性	325	
5.2.1 求根公式与根式可解性	332	
5.2.2 二次多项式	333	
5.2.3 三次多项式	333	
5.2.4 四次多项式	333	
5.2.5 用群论语言的叙述	334	
5.3 结束语	341	
第 6 章 群 II	344	
6.1 有限阿贝尔群	344	
6.2 西罗定理	354	
6.3 装饰的对称	363	
第 7 章 交换环 II	378	
7.1 素理想和极大理想	378	
7.2 唯一分解	382	

7.3 诺特环	390	附录 A 不等式	425
7.4 簇	394	附录 B 伪码	427
7.5 广义的除法算式	407	部分习题提示	429
7.5.1 单项式序	408	参考文献	439
7.5.2 除法算式	412	索引	442
7.6 格罗布纳基	416		