面向21世纪全国高职高专数学规划教材

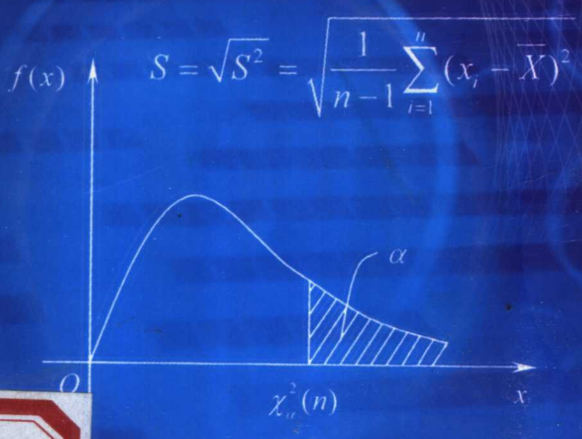
五年制高职数学

wunianzhi gaozhi shuxue

（第4册）

吕保献　李祖亮　主　编

王友琼　张新元　副主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

面向21世纪全国高职高专数学规划教材

五年制高职数学

（第4册）

吕保献　李祖亮　主编

王友琼　张新元　副主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的。在内容编排上，删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

五年制高职数学教材分4册出版。第4册内容包括：常微分方程，无穷级数，拉普拉斯变换，线性代数初步，概率论初步，数理统计初步，Mathematica 软件的应用（下）等。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

图书在版编目（CIP）数据

五年制高职数学（第4册）/吕保献，李祖亮主编．—北京：北京大学出版社，2005.7
（面向21世纪全国高职高专数学规划教材）
ISBN 7-301-08843-4

I. 五… II. ①吕…②李… III. 高等数学—高等学校：技术学校一教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第031075号

书　　名：五年制高职数学（第4册）
著作责任者：吕保献　李祖亮　主编
责 任 编 辑：黄庆生　汉明
标 准 书 号：ISBN 7-301-08843-4/O・0643
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印 刷 者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　17印张　365千字
2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
定　　价：26.00元

前　言

为适应我国高等职业技术教育蓬勃发展的需要，加速教材建设步伐，我们受北京大学出版社的委托，根据教育部有关文件精神，考虑到高等职业技术院校基础课的教学，应以应用为目的，以“必需、够用”为度，并参照《五年制高职数学课程教学基本要求》，由高等职业技术院校中长期从事高职数学教学的资深教师编写本套教材。可供招收初中毕业生的五年制高职院校的学生使用。

本套数学教材是“面向21世纪全国高职高专数学规划教材”之一，它是按照高等职业技术学校的培养目标编写的，以降低理论、加强应用、注重基础、强化能力、适当更新、稳定体系为指导思想。在内容编排上，注重理论联系实际，注意由浅入深，由易到难，由具体到抽象，循序渐进，并兼顾体系，加强素质教育和能力方面的培养。删去了一些繁琐的推理和证明，比传统数学教材增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受数学的思想方法和思维习惯，具有简明、实用、通俗易懂、直观性强的特点，适合教师教学和学生自学。

全套教材分四册出版。第1册内容包括：集合与不等式，函数，幂函数、指数函数与对数函数，三角函数，加法定理、正弦型曲线与复数等。第2册内容包括：直线方程，二次曲线，数列，排列、组合、二项式定理和立体几何等。第3册内容包括：极限与连续，导数、微分及其应用，不定积分，定积分及其应用，空间解析几何，二元函数微积分初步，Mathematica软件的应用（上）等。第4册内容包括：常微分方程，无穷级数，拉普拉斯变换，线性代数初步，概率论初步，数理统计初步，Mathematica软件的应用（下）等。本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中带“*”号的部分为选学内容。

教材中每节后面配有一定数量的习题。每章后面的复习题分主、客观题两类，供复习巩固本章内容和习题课选用。书末附有习题答案供参考。

第4册由吕保献、李祖亮担任主编，由王友琼、张新元担任副主编，吕保献负责最后统稿。其中第1章由吕永明编写，第2章由王友琼编写，第3章、第5章由李祖亮编写，第4章由张新元编写，第6章、第7章由吕保献编写。

由于编者水平有限，书中不当之处在所难免，恳请教师和读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2005年2月

目　　录

第 1 章　常微分方程

1.1　微分方程的概念

1.1.1　两个实例

在初等数学中，我们把含有未知量的等式称为方程．为了说明微分方程的基本概念，我们先来看两个例子．

例 1　设某一平面曲线上任意一点(x,y)处的切线斜率等于该点横坐标x的2倍，且曲线通过点$(1,3)$，求该曲线方程．

解　设所求曲线方程为$y=f(x)$，根据导数的几何意义，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \text{ 或 } \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x\,. \tag{1-1}$$

这是一个含有所求未知函数y的导数或微分的方程．为求得y，对（1-1）式两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C\,.$$

其中C为任意常数．根据题意，曲线通过点$(1,3)$，因此，所求函数不仅满足式（1-1），同时还应满足条件

$$f(1)=3 \text{ 或 } y\big|_{x=1}=3\,. \tag{1-2}$$

将（1-2）式代入$y=x^2+C$，得$C=2$，故所求的曲线方程为

$$y=x^2+2\,.$$

例 2　列车在直线轨道上以20米/秒的速度行驶，当制动时，其加速度为-0.4米/秒^2，求制动后列车的运动规律．

解　设列车开始制动后t秒钟内行驶了s米，欲求未知函数$s=s(t)$，根据二阶导数的力学意义，函数$s=s(t)$应满足关系

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4\,. \tag{1-3}$$

积分，得
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \tag{1-4}$$
再积分，得
$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2, \tag{1-5}$$
根据题意，s 应满足
$$s|_{t=0}=0,\quad v|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=20, \tag{1-6}$$
把这两个条件代入（1-5）和（1-4）式，得
$$C_1=20,\quad C_2=0,$$
于是，制动后列车的运动规律为
$$s=-0.2t^2+20t.$$

1.1.2 微分方程的基本概念

定义 1.1 含有未知函数导数（或微分）的方程称为**微分方程**．如果微分方程中未知函数是一元函数，这样的微分方程称为**常微分方程**；如果微分方程中未知函数是多元函数，这样的微分方程称为**偏微分方程**．本章只研究常微分方程，故简称为**微分方程或方程**．

例如，式（1-1）和（1-3）都是微分方程．再比如：
$$y'+2xy=x^2, \tag{1-7}$$
$$y''+y'=0, \tag{1-8}$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0, \tag{1-9}$$
等都是微分方程．

方程中未知函数导数的最高阶数，称为该微分方程的**阶**．例如式(1-1)、(1-7)和(1-9)是一阶微分方程．式（1-3)、(1-8）是二阶微分方程．

如果函数 $y=f(x)$ 满足一个微分方程，则称它是该**微分方程的解**．有时微分方程的解也可能是隐函数形式．

如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数，且任意常数的个数与方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的**通解**．

例如，$y=x^2+C$ 是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的通解，$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 是 $\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 的通解．

通解中的任意常数必须是相互独立的．例如，$y=C_1x+C_2x$ 中的两个常数不是独立的，因为该函数能写成 $y=(C_1+C_2)x$，而 C_1+C_2 只能算作一个任意常数 $C=C_1+C_2$．又如 $ax+by+c=0$ 中的三个常数也不是独立的，因为若令 $\frac{a}{c}=C_1$，$\frac{b}{c}=C_2$（c≠0），则上式成为

$C_1x+C_2y=-1$，实质上只有两个独立的任意常数.

当自变量取某值时，要求未知函数及其导数取给定值，这种条件称为**初始条件**，满足初始条件的解称为微分方程的**特解**.

例如（1-2）和（1-6）都是初始条件，由这些初始条件所得到的解 $y=x^2+2$，$s=-0.2t^2+20t$ 分别是 $\frac{dy}{dx}=2x$ 和 $\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4$ 的特解.

1.1.3　可分离变量的微分方程

定义 1.2　形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的微分方程称为**可分离变量的微分方程**. 此式经分离变量，得 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$，再两端积分，得

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx\quad(g(y)\neq 0).$$

即可求得微分方程的通解.

例 3　求微分方程 $y'+xy=0$ 的通解.

解　原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=-xy,$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-xdx\quad(y\neq 0),$$

两边积分，得

$$\int\frac{dy}{y}=\int(-x)dx,$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

所以

$$|y|=e^{-\frac{1}{2}x^2+C_1}=e^{C_1}e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

即

$$y=\pm e^{C_1}e^{-\frac{1}{2}x^2}=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\quad(C=\pm e^{C_1}).$$

所以方程通解为

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

例 4 求微分方程 $y'=-\dfrac{y}{x}$ 满足 $y|_{x=2}=3$ 时的特解.

解 原方程变形为

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\ln|x|+C_1,$$

所以

$$|xy|=e^{C_1},$$

即

$$xy=\pm e^{C_1}=C,$$

所以方程的通解为

$$xy=C,$$

将 $y|_{x=2}=3$ 代入上式，得

$$C=6,$$

因此所求的特解为

$$xy=6.$$

以后，为省去 $C=\pm e^{C_1}$ 这个过程，我们在进行积分时，可直接把常量记 $\ln C$.

例 5 求微分方程 $y(1+x^2)dy=-x(1+y^2)dx$ 的通解.

解 原方程变形为

$$\frac{y}{1+y^2}dy=-\frac{x}{1+x^2}dx,$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$

因此所求方程的通解为

$$(1+x^2)(1+y^2)=C \text{ 其中 } C=C_1^2.$$

习 题 1-1

1．下列等式中，哪些是微分方程？哪些不是微分方程？若是微分方程，指出其阶数：

（1）$y''+3y'+2y=0$；　　（2）$y^2+3y+2=0$；

（3）$y'=3x+2$；　　（4）$y^2=3x+2$；

（5）$y''=\sin x$；　　（6）$y''+2x(y')^3=0$．

2．验证下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

（1）$xy'=2y$，$y=5x^2$；

（2）$y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$；

（3）$y''+2y'-3y=0$，$y=x^2+x$；

（4）$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$，$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$（其中 C_1、C_2 为任意常量）．

3．求下列微分方程的通解：

（1）$y'=2xy$；　　（2）$\dfrac{dy}{dx}=\sin x$；

（3）$(1+y)dx+(x-1)dy=0$；　　（4）$y'\tan x=y$．

4．求下列微分方程的特解：

（1）$y''=x-1$，$y|_{x=1}=-\dfrac{1}{3}$，$y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$；　　（2）$xy'-y=0$，$y|_{x=1}=2$．

1.2　一阶线性微分方程

本节我们将介绍一阶线性微分方程及其解法．

1.2.1　一阶齐次线性微分方程及其解法

定义 1.3　形如

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{1-10}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**．“线性”是指在方程中含有未知函数 y 和它的导数 y' 的项都是关于 y 和 y' 的一次项，等式右端的 $q(x)$ 称为**自由项**．

当 $q(x)\equiv 0$ 时，方程

$$y'+p(x)y=0 \tag{1-11}$$

称为**一阶齐次线性微分方程**．当 $q(x)\neq 0$ 时，方程（1-10）称为**一阶非齐次线性微分方程**．

式（1-11）是一个可分离变量的方程，分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

再两边积分，得

$$\ln y=-\int p(x)dx+\ln C,$$

所以一阶齐次线性微分方程（1-11）的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{1-12}$$

这里，按照不定积分的定义，在不定积分的记号内包含了积分常数，但公式（1-12）已将不定积分的积分常数先写了出来，这只是为了方便地写出这个齐次方程的求解公式.因而用公式（1-12）进行具体运算时，其中的不定积分 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 只表示了 $p(x)$ 的一个原函数，在以下的推导过程中，我们也作这样的规定.

例 1 求微分方程 $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$ 的通解.

解法一 利用分离变量法

这是一阶齐次线性微分方程．先分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln y = \ln(1+x^2) + \ln C,$$

因此所求方程的通解为

$$y = C(1+x^2).$$

解法二 利用公式（1-12）求解

因为

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2},$$

所以由公式（1-12）得，原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = Ce^{-\int(-\frac{2x}{1+x^2})\mathrm{d}x} \\ &= Ce^{\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}} = Ce^{\ln(1+x^2)} \\ &= C(1+x^2). \end{aligned}$$

1.2.2 一阶非齐次线性微分方程的解法

不难看出，方程（1-10）和（1-11）既有联系，又有差别，因此可以设想它们的解也应该有一定的联系而又有所差别．容易验证，不论 C 取任何常数，式（1-12）只能是方程（1-11）的解而不是方程（1-10）的解，我们设想，在（1-12）中将常量 C 变易为 x 的待定函数 $c(x)$，使它满足（1-10）从而求出 $c(x)$，为此令

$$y = c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{1-13}$$

为非齐次方程（1-10）的解．于是

$$y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx}, \tag{1-14}$$

将（1-13）与（1-14）代入（1-10），得

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

化简，得

$$c'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx},$$

两边积分，得

$$c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C,$$

将所得的$c(x)$代入（1-13），我们得到一阶非齐次线性微分方程（1-10）的通解公式为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right). \tag{1-15}$$

这种将常数变易为待定函数，然后求出非齐次线性微分方程（1-10）的通解的方法称为**常数变易法**.

（1-15）式是一个可以直接利用的公式，但这个公式比较复杂，不好记忆，所以应理解和掌握以上叙述的求解基本思路和方法.

用常数变易法求一阶非齐次线性微分方程的通解的步骤为：

（1）求出非齐次线性微分方程所对应的齐次线性微分方程的通解；

（2）根据所求出的齐次线性微分方程的通解，设出非齐次线性微分方程的解（将求出的齐次方程的通解中的任意常数变易为待定函数$c(x)$即可）；

（3）将所设解代入非齐次微分方程，解出$c(x)$，并写出非齐次线性微分方程的通解.

例 2　求微分方程$y'-\dfrac{2}{x+1}y=(1+x^2)$的通解.

解　先求与原方程对应的齐次方程$y'-\dfrac{2}{x+1}y=0$的通解.

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{x+1}dx,$$

两边积分，得

$$\ln y=\ln(1+x)^2+\ln C,$$

所以，原方程对应的齐次方程的通解为

$$y=C(1+x)^2.$$

将式中的常量C变易为待定函数$c(x)$，得

$$y=c(x)(1+x)^2,$$

于是

$$y'=c'(x)(1+x)^2+2c(x)(1+x),$$

把y和y'代入原方程，得

$$c'(x)(1+x)^2+2c(x)(1+x)-\frac{2}{x+1}c(x)(1+x)^2=(1+x)^2,$$

化简，得

$$c'(x)=1,$$

所以

$$c(x)=x+C.$$

将$c(x)=x+C$代入$y=c(x)(1+x)^2$，即得原方程的通解为

$$y=(1+x)^2(x+C).$$

例3 求微分方程$y'=\dfrac{y+x\ln x}{x}$的通解.

解 方程变形为

$$y'-\frac{1}{x}y=\ln x,$$

此方程为一阶非齐次线性微分方程.

先求与原方程对应的齐次方程$y'-\dfrac{1}{x}y=0$的通解.

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},$$

两边积分，得

$$\ln y=\ln x+\ln C,$$

所以，得到齐次方程的通解为

$$y=Cx.$$

将上式中的常数C变易为待定函数$c(x)$，可设原方程的通解为

$$y=c(x)x,$$

于是

$$y'=c'(x)x+c(x).$$

把y和y'代入原方程，得

$$c'(x)x+c(x)-\frac{1}{x}c(x)x=\ln x,$$

化简，得

$$c'(x)x=\ln x,$$

所以

$$c(x)=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$$

因此原方程的通解为

$$y=\frac{x}{2}(\ln x)^2+Cx.$$

现将一阶微分方程的几种类型和解法归纳如下（见表 1-1）.

表 1-1　一阶微分方程的解法

方程类型		解法
变量可分离的微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$		分离变量，两边积分
一阶线性微分方程	齐次 $y'+p(x)y=0$	分离变量，两边积分 或用公式 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$
	非齐次 $y'+p(x)y=q(x)$	用公式 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$ 或常数变易法

习　题　1-2

1．下列方程哪些是一阶线性微分方程？

（1）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$；　（2）$y'+y^2=0$；

（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6xy=3x$；　（4）$(x^2+1)\ y'+2xy=\cos x$；

（5）$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2$；　（6）$y'=x^3$.

2．求下列微分方程的通解：

（1）$y'+2y=4x$；　（2）$y'+y=\mathrm{e}^{-x}$；

（3）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3xy=2x$；　（4）$(1+t^2)\mathrm{d}s-2ts\mathrm{d}t=(1+t^2)^2\mathrm{d}t$.

3．求下列微分方程满足初始条件的特解：

（1）$y'-y=\cos x$，$y|_{x=0}=0$；　（2）$y'-y=2x\mathrm{e}^{2x}$，$y|_{x=0}=1$；