KAOYAN 2008

名师导学系列

2008年
考研数学
历年真题解析与应试对策
（经济类）

主编　徐　兵　肖马成　周概容

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

名师导学系列

2008年考研数学
历年真题解析与应试对策

（经济类）

主　编　徐　兵　肖马成　周概容

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

2008年考研数学历年真题解析与应试对策. 经济类/徐兵主编. —北京：高等教育出版社，2007.3

ISBN 978-7-04-021313-3

Ⅰ. 2… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 028948 号

策划编辑 刘 佳 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波
责任绘图 郝 林 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010—58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800—810—0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010—58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2007年3月第1版
印　　张	22.25	**印　　次**	2007年3月第1次印刷
字　　数	530 000	**定　　价**	35.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 21313—00

前　言

有些考生觉得2007年研究生入学数学试题比2006年试题难。可能这些考生没有进一步思考下面的问题：是什么原因使这些考生产生这种现象？2007年真比2006年试题难吗？难在哪里？考生在复习中出现了哪些不足？

由历年来教育部考试中心发布的统计资料，考生可以发现一个值得深思的问题：

为什么试卷中的题目绝大多数是中等难度题与容易题的情形下，考生的成绩这么低？后来的备考生应该从中汲取什么教训？

再读一读教育部考试中心发布的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试分析"，教育部考试中心针对每年考生现状，对考生提出"思考与建议"，这几年来，几乎一字不变地建议考生：

"注重数学基础。在阅卷中发现一些考生在答题的过程中出现很多很初等的错误，这是基本功不扎实的表现，可能是考生在复习中存在的偏差，一些考生在复习时过分追求难题，而对基本概念、基本方法和基本性质重视不够，投入不足。从试题可以看出，基本概念、基本方法和基本性质是考查的重点。因此要注重基础是复习方向，要求考生不仅能明确概念的要素、性质和基本特征，还要理解概念与性质的内涵与外延。"

教育部考试中心为备考生提出了复习的方向，这是提高考试成绩的根本途径。

针对上述问题，高等教育出版社的编辑经过多方面调研，确定为备考生提供一套既有针对性又有特色的历年考研真题解析与应试对策书。目的是能提高备考生复习效率，引导备考生把握住正确的复习方向，达到提高考试成绩的效果。高等教育出版社的编辑与本书作者论证本书的定位与本书的编写特色。认为研究生入学数学考试试题是我国多所大学、诸多命题专家经过多年辛勤努力、集体创造的数学教学研究精品成果，它已成为历年来教师向备考生推荐的必读资料，也是备考生争相学习的必选资料。一个现实的问题是：如果备考生在复习过基本知识之后，面对一些选出的往年试题，觉得几乎个个题目都遇到困难，是否深深地伤害了你的自信心？如果面对一些选出的往年试题，你每道题几乎都能入手，又能否说明你已经较好地掌握了基本知识？如果你完整地演算了一份往年考试试卷，自己评定出成绩之后，是否你能依此判断出掌握知识的程度如何？在以后的时间内能有多少成绩的提升空间？目前全国有十几种版本的考研真题汇编，但是都不可能帮助备考生解决上述问题。我们对这些问题进行了深入的研究，积多年教学与考研辅导经验，共同的认识是：

学习往年考试真题时，要考查这个题目的知识点、解题思路、特殊的解题技巧、通常可能出现的运算错误、题目可能的变化形式、题目的难度系数等。以便对这个题目有全面的了解，知道它在试卷中的作用。

经过这样训练之后，当你遇到的几个题目，它们的难度系数都为0.2～0.3，既使你几乎每个题都遇到困难，也不至于伤害你的自信心。如果这几个题目难度系数都为0.6～0.7，既使你基本上能上手，也不会过于盲目乐观。当你做完一套完整试卷之后，你可以对照前面提出

的基本问题，检查自己的试卷，判定自己掌握基本知识的程度，找出问题的症结，明确努力的方向，确定出自己成绩可能提升的空间。

本书作者在上述共识的基础上，参考教育部考试中心历年《硕士研究生入学考试数学试卷分析》、《数学试题编制实例分析》，结合多年参加考研阅卷及考研辅导的积累资料，以将精品成果“考研试题”为本，编写出考研辅导的珍品辅导书为目的。使本书体现以下几个特点：

1. 分析各部分知识的基本问题，归纳基本运算方法，以利于备考生理出知识框架。

2. 在范例解析中，对所选试题指出了考查的知识点，以利于备考生明确试题的立意。

3. 对试题给出了解析，分析了解题思路。对部分试题给出了考生的典型运算错误、指出错误产生的原因，以利于备考生防范。

4. 对部分试题给出了特殊解题技巧，或试题可能变化的形式，或对试题中某些条件的作用进行解析：可能由此得出隐含条件；也可能是为了达到降低考试难度的目的，故意放宽已知条件，即题中给出的条件是“多余”条件或“宽松”条件等等。有利于备考生深入复习。

5. 给出了近年来试题难度系数，以利于备考生在复习时，明确这个题目在试卷中的作用，有利于检查自己对知识掌握的程度。

下面以具体例题来说明，以利于读者了解本书的风格与特色，摘录如下：

例 1 书中 1.1.2 例 9(97205)* 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

本题考查的知识点 无穷小量的性质：无穷大量的倒数为无穷小量、无穷小量与有界函数之积为无穷小量。

解析 所给极限为$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，不能利用极限四则运算法则，也不能利用洛必达法则求之。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1。$$

本题难度系数 0.45。

本题解题技巧 在上述运算(*)处，将无穷大量运算转化为无穷小量运算。

典型运算错误 在上述运算(*)处，当 $x\to-\infty$时，且$|x|$足够大时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，这是解题关键。相当多考生在此处出现错误。误答为 3。这是错误地认为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=3。$$

* 注 (97205)表示 1997 年数学(二)试卷、分值为 5 分的题。书中其他例题仿此。

说明 本题在命制时，曾考虑以下两种变式：

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。此变式较例 1 简单。只需注意 $|x|=x$。

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。此变式较例 1 复杂，需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形。

例 2 1.3.2 例 14(97403) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$________。

本题考查的知识点 定积分的概念与几何意义。

解析 由于当 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在时，它为一个确定的数值，可设 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$，因此

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2},$$

两端在[0,1]上积分，可得

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

$y=\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点为圆心，半径为 1 的上半圆周，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示上述四分之一圆的面积，可知 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$，故

$$f(x)=\frac{\pi}{4-\pi}。$$

本题难度系数 0.29。

典型运算错误 ① 不知道 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 存在时，它为一个确定的数值，因此不知应该从何处入手。(本题应加补“$f(x)$为连续函数”或“$f(x)$在[0,1]上可积”的条件。)

② 不会利用定积分的几何意义求 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。而是对这个积分利用换元积分法计算，使问题复杂，且可能导致错误。

例 3 1.1.2 例 29(04104,04204) 把 $x\to0^-$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排列在后面的是前一个的高阶无穷小．则正确的排列次序是(　　)。

A. α，β，γ　　B. α，γ，β　　C. β，α，γ　　D. β，γ，α

本题考查的知识点 无穷小量阶的比较。

解析 所给问题为三个无穷小量阶的比较问题。可以利用 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\gamma}{\beta}$来比较，但是有可能经过三次极限运算才能算出需要的结论。由洛必达法则的结论可以得到启发：只需比较在$x\to0^+$时，α'，β'，γ'的无穷小量的阶数：

$\alpha'=\cos x^2$，$\beta'=2x\tan x\sim 2x^2$，$\gamma'=\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sim\dfrac{x}{2}$，可知当 $x\to 0$ 时，依题意排列为 α'，γ'，β'，因此有

$$\alpha,\ \gamma,\ \beta$$

应选 B。

本题难度系数 数学(一)为 0.591，数学(二)为 0.613。

本题解题技巧 这个题目的解题思路是利用洛必达法则的结论而得出的。由洛必达法则可知，当 $x\to x_0$ 时，α，β 为无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在(或为$\infty$)，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$。因此，为了比较当 $x\to x_0$ 时，α，β 的阶，可以考虑当 $x\to x_0$ 时比较 α'，β' 的阶。

例 4 1.2.1 例 18(02106) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$。若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a，b 的值。

本题考查的知识点 高阶无穷小的定义、洛必达法则或利用导数定义求极限。

解析 **解法 1** 利用洛必达法则。

由于当 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 为 h 的高阶无穷小，又由可导必连续，连续必有极限，可得

$$\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0),$$

由于 $f(0)\neq 0$，必有 $a+b-1=0$。

又由洛必达法则，有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

由于 $f'(0)\neq 0$，必有 $a+2b=0$。

于是可解得 $a=2$，$b=-1$。

解法 2 利用导数定义求极限。

由题设条件可知

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{a[f(h)-f(0)]}{h}+\frac{2b[f(2h)-f(0)]}{2h}+\frac{af(0)+bf(0)-f(0)}{h}\right\} \qquad (*)$$

由于 $f'(0)$存在，(*)中前两项极限存在，如果第三项极限不存在，则与左边极限为零矛盾。因此应有

$$(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\neq 0$，可知 $a+b-1=0$。

因此由(*)可得 $0=(a+2b)f'(0)$，由于 $f'(0)\neq 0$，可知 $a+2b=0$。

可解得 $a=2$，$b=-1$。

本题难度系数 0.80。

典型运算错误 有些考生认为当 $h\to 0$ 时，$af(h)+bf(2h)-f(0)$是比 h 高阶的无穷小，

因此有

$$\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h^{1+\delta}}=0,\ \delta>0 \qquad (**)$$

虽然也得到 $a=2$，$b=-1$，但是上述运算中出现了概念性错误。因为事实上并不一定存在 $\delta>0$，使$(**)$成立。

说明 解法 2 并不要求 $f(x)$有一阶连续导数，只要 $f'(0)$存在即可。这表明题目的条件比较宽松。这不是命题时出现疏漏，而是有意放宽条件，从而增加了解题方法，降低了题目的难度。

例 5 1.2.1 例 8(98103) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导的点的个数为(　　)。

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

本题考查的知识点 分段函数在分段点处的可导性。

解析 所给问题虽然是判定带有绝对值表达式的函数可导性问题，但是注意问题的特殊性，考察不可导的点的个数，而不是求导数表达式。

$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处不可导。

当 $a>0$ 时，$f(x)=x^a|x|$在 $x=0$ 处可导。　　$(*)$

这两个结论可以当作公式使用。还可以推广到$|x-x_0|$的情形。以此为依据，可以简化运算。

由于

$$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x-2)(x+1)|x||x-1||x+1|,$$

可知 $f(x)$在点 $x=0$，$x=1$ 处不可导；但在 $x=-1$ 处可导，故 $f(x)$不可导的点有两个。本例应选 B。

本题难度系数 0.46。

本题解题技巧 将$(*)$处的结论当作公式使用，并推广到$|x-x_0|$的情形。这属于性质的外延。

典型运算错误 对于上述试题，绝大多数考生不会利用前述公式求解，而是将所给函数化为分段函数之后，再逐一考察分段点处的可导性，导致了运算复杂化，并增加了出错误的机会。

从上述五个例题可以看出本书的立意，本书试题解析中所包含的特点。解析中有试题考查的知识点、解题思路、典型运算错误、特殊解题技巧、题目的变式、题设条件的解说、试题的难度系数及由性质、概念的内涵、外延而导出的一些有效解题技巧，这些构成了本书的特色，成为本书的亮点。这些内容包含着作者多年研究教学、研究考研试题的研究成果，是备考生不可多得的复习资料。这些知识及解题思路是通常辅导书中少见，但对备考生是有很大帮助的。

本书微积分部分，由北京航空航天大学徐兵教授执笔；线性代数部分，由南开大学肖马成教授执笔；概率论与数理统计部分，由南开大学周概容教授执笔。作者们深信，只要读者认真学习此书，一定能在考试中取得好成绩。

作　者

于 2007 年 2 月

目　　录

第一篇　微　积　分

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　微　积　分

第一章　函数、极限与连续性

1.1.1　函　　数

一、基本问题

1. 函数符号的运用问题，包括分段函数、反函数、可变上(下)限积分形式的函数、可变限二重积分等.

2. 讨论函数的基本性质.

二、基本运算方法

1. 函数符号的运用.

2. (1) 判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理.

(2) 判定函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的有界性，常利用连续函数在闭区间上的最大(小)值定理，并判定 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域，常常可以利用求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值来确定.

3. 判定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性，常利用 $f'(x)$ 的符号来确定.

4. 判定函数 $f(x)$ 的奇偶性与周期性，常利用定义与性质来确定.

三、范例解析

近年来单独考查函数的题目已不多见. 基本都是在一些综合性题目中，考查函数符号或判定函数的性态. 这些函数可能是导函数、原函数、可变限积分表示的函数等. 例如

例 1 (04304,04404)　函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

本题考查的知识点　判定函数的有界性.

解析　所给问题为判定函数在区间 (a,b) 内有界性. 依本节"基本运算方法"中的 2 可知，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

由于 $f(x)$ 为分段函数. $f(x)$ 在点 $x=0$，$x=1$，$x=2$ 处无定义，在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$ 内 $f(x)$ 为初等函数，且在上述区间内 $f(x)$ 为连续函数.

$x=-1$，$x=3$ 属于 $f(x)$ 的定义区间，可知 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ 存在.

依题意可知只需考察

$$\lim_{x\to 0^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to 2^-} f(x),\ \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{\sin 2}{4},$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty,$$

可知 $f(x)$在$(-1,0)$内有界. 因此应选 A.

本题难度系数　0.461.

本题解题技巧　将问题转化为利用左极限、右极限来考察所给区间端点的极限.

例 2(97407)　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$是偶函数，则 $F(x)$也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$单调不增，则 $F(x)$单调不减.

本题考查的知识点　函数的奇偶性、函数的单调性、定积分的值与积分变元无关的性质.

解析　所给 $F(x)$为可变上限积分形式的函数. 问题(1)为判定函数 $F(x)$的奇偶性，应利用奇偶函数的定义. 问题(2)为判定函数 $F(x)$的单调性，应利用导数符号判定.

(1) 若 $f(x)$为偶函数，则有 $f(-x)=f(x)$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t.$$

令 $t=-u$，于是

$$\begin{aligned}F(-x)&=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u\\&=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x),\end{aligned}$$

可知 $F(x)$为偶函数.

(2)
$$\begin{aligned}F'(x)&=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)\\&\overset{(*)}{=\!=}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)\\&=x[f(\xi)-f(x)],\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 由已知 $f(x)$单调不增，

当 $x>0$ 时，$f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x<0$ 时，$f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，可知 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x=0$ 时，由式$(*)$可知 $F'(0)=0$，

因此对 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $F'(x)\geqslant 0$，从而知当 $f(x)$单调不增，必有 $F(x)$单调不减.

本题难度系数　0.37.

本题解题技巧　在上述运算$(*)$处利用定积分中值定理，以便能比较 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $xf(x)$ 值的大小.

此处也可以改换为：利用定积分的性质：

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(x)\mathrm{d}t = \int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t.$$

1.1.2 极　　限

一、基本问题

1. 求极限与极限性质的问题.

2. 无穷小量阶的比较.

二、基本运算方法

极限的定义指明了概念，也指明了极限值是个固定常数，它并没有提供求极限的方法，利用极限的定义验证了$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$，并得到了下列方法：

1. 利用连续函数性质求极限.

(1) 若 $f(x)$在点 x_0 处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$f(u)$在点 u_0 处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$.

2. 利用极限的四则运算法则求极限.

3. 利用两个重要极限公式求极限.

4. 利用等价无穷小量代换简化运算.

常见的等价无穷小量代换：当 $x\to 0$ 时

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x,\ 1-\cos x\sim \frac{x^2}{2},\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x.$$

5. 利用无穷小量性质求极限.

6. 利用极限的概念与性质求极限.

7. 求分段函数在分段点处的极限时，当函数在分段点两侧表达式不同时，需利用左极限与右极限.

8. 利用洛必达法则求极限.

9. 利用定积分定义求极限.

10. 利用极限运算进行无穷小量阶的比较.

三、范例解析

1. 极限的性质

例 1（06304,06404） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

本题考查的知识点　利用数列的性质求极限.

解析　令 $x_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，当 $n=2k$ 为偶数时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k}=1;$$

当 $n=2k-1$ 为奇数时，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k-1+1}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=1,$$

可知 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1.$$

本题难度系数 数学(三)为0.871，数学(四)为0.696.

本题解题技巧 利用数列极限的性质：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

典型运算错误 有些考生误认为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$ 为重要极限形式，而导致错误.

2. 利用连续函数性质求极限

例 2（02303） 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

本题考查的知识点 连续函数求极限的性质、重要极限公式.

解析 根据连续函数的性质，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n&=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\\&\overset{(*)}{=\!=}\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n\ (1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\\&=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}\quad\left(a\neq\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

本题难度系数 0.61.

本题解题技巧 如果将重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 推广到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab},\quad\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab},$$

并将推广之后的表达式当作公式使用，则在上述(*)处，直接利用上述结论，免掉变形，即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n&=\ln\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\\&=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.\end{aligned}$$

3. 利用极限的四则运算法则求极限

例 3（98303，98403） 设函数 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$

________.

本题考查的知识点 极限公式：当 $b_0\neq0$ 时

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n,\\0, & m>n,\\\infty, & m<n.\end{cases}$$

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(a\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln a^{1+2+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ln a$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.$$

本题难度系数 0.78.

例 4(01203) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

本题考查的知识点 极限的四则运算法则.

解析 所给极限为$\dfrac{0}{0}$型，不能直接利用极限四则运算法则.

本例求极限的函数分子中含有根式，且在 $x\to1$ 时，带有根式的分子表达式极限为零. 对于分子含有根式的函数的求极限问题，通常可以先进行分子有理化，使恒等变形以后的表达式中带有根式的因子的极限不为零，能对其单独求极限.

若变形后问题化为分母极限不为零的分式极限，则可以利用极限四则运算法则求之.

若变形后问题仍为$\dfrac{0}{0}$型极限，则可以考虑利用洛必达法则等方法解之.

将求极限的函数恒等变形，可得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x+2)(x-1)}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{6}.$$

本题难度系数 0.79.

说明 本题也可以利用洛必达法则求解.

例 5(90403) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

本题考查的知识点 极限的四则运算法则、无穷小量的性质.

解析 所给极限为$\infty-\infty$型，且两个表达式均含有根式，可仿例 4 的方法，将其分子有理化.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

4. 利用两个重要极限公式求极限

例 6（05304，05404） 极限$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

本题考查的知识点 重要极限公式或等价无穷小量代换.

解析 当$x\to\infty$时，$\dfrac{2x}{x^2+1}\to 0$，因此由等价无穷小量代换可知$\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$，

所以
$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$$

本题也可以利用重要极限公式求解

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{2x}{x^2+1}}\cdot x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=2.$$

本题难度系数 数学（三）为 0.649，数学（四）为 0.661.

例 7（01306，01406） 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求c.

本题考查的知识点 拉格朗日中值定理、重要极限公式.

解析

由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{c}{x}}{1-\dfrac{c}{x}}\right)^x=\mathrm{e}^{2c},$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty} f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty} f'(\xi)=\mathrm{e},\ \xi\in(x-1,x),$$

可知$\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，$c=\dfrac{1}{2}$.

本题难度系数 数学（三）为 0.58，数学（四）为 0.71.

典型运算错误 该题没得满分的，几乎都是在求右端极限时出现错误，主要有以下错误：

① 由$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{e}$，得出$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{e}x$，从而得出

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\mathrm{e}x-\mathrm{e}(x-1)=\mathrm{e}.$$

② $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\mathrm{e}.$

上述两种错误都是概念性错误. 在①中错用了极限的概念；在②中错用了导数的定义.

5. 利用等价无穷小量代换简化运算

例 8（97103） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

本题考查的知识点 等价无穷小量代换、极限的四则运算法则.

解析 所给极限为$\frac{0}{0}$型，不能直接利用极限四则运算法则．先进行等价无穷小量代换，再分组，可简化运算．

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

本题难度系数 0.66.

说明 本题不能使用洛必达法则求解，它不满足洛必达法则的条件．

6. 利用无穷小量的性质求极限

常用的无穷小量性质有：

有界变量与无穷小量之积为无穷小量．无穷大量的倒数为无穷小量，等等．

例 9（97205） 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

本题考查的知识点 无穷小量的性质：无穷大量的倒数为无穷小量；有界变量与无穷小量之积为无穷小量．

解析 所给极限为$\frac{\infty}{\infty}$型问题，不能利用极限四则运算法则，也不能利用洛必达法则求之．通常对无穷大量运算的基本原则是转化为无穷小量运算．

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{(*)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$$
$$\overset{(**)}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

本题难度系数 0.45.

本题解题技巧 在上述(*)处，将无穷大量的运算转化为无穷小量运算．

典型运算错误 上述运算(*)处，忽略了条件 $x\to-\infty$，得出

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}},$$

导致了错误．当 $x\to-\infty$，且$|x|$足够大时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，这是解题中的关键．相当多的考生在此处出现错误，误答为 3.

说明 在试题命制时，曾考虑以下两种变式：

变式 1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________．此变式较例 9 简单，可以免掉出现 $\sqrt{x^2}$ 去