课程代码：4183

高等教育自学考试新版

数学教材辅导系列

概率论与数理统计（经管类）习题详解

附：概率论与数理统计（经管类）自学考试大纲

孙洪祥 柳金甫 编著

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

课程代码：4183

高等教育自学考试新版　数学教材辅导系列

概率论与数理统计
（经管类）
习题详解

附：概率论与数理统计（经管类）自学考试大纲

孙洪祥　柳金甫　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书包括 2006 年高等教育自学考试新版数学教材《概率论与数理统计》中每章的内容提要、全部习题及自测题的详细解答，具体内容包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量及其抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析. 本书在编写过程中充分考虑到自考生自学时的困难，解题过程更为详尽.

本书是自考生学习“概率论与数理统计”课程必备的教学辅导书，也可作为普通高校学生的学习参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（经管类）习题详解/孙洪祥，柳金甫编著. —北京：清华大学出版社，2007.3

（高等教育自学考试新版 数学教材辅导系列）

ISBN 978-7-302-14184-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①孙… ②柳… Ⅲ. ①概率论—高等教育—自学考试—解题 ②数理统计—高等教育—自学考试—解题 Ⅳ. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 141563 号

责任编辑：佟丽霞 赵从棉
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62772015

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座
邮 编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969

印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×230 **印 张**：10.75 **字 数**：226 千字
版 次：2007 年 3 月第 1 版 **印 次**：2007 年 3 月第 1 次印刷
印 数：1～4000
定 价：16.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。
联系电话：010-62770177 转 3103 产品编号：024066-01

Word from Publisher

出版说明

根据近年来我国高等教育发展的新形式以及高等教育自学考试多年来的实践经验，2002年全国高等教育自学考试指导委员会组织专家，经过反复讨论重新拟定了高等教育自学考试某些专业数学课程考试大纲，同时也组织各高校的专家按照新的数学考试大纲编写了《高等教育自学考试新版数学教材》，包括《高等数学（工本）》、《高等数学（工专）》、《线性代数（经管类）》、《概率论与数理统计（经管类）》4本书.

为了使广大的自考生更好地学习上述课程,编写《高等教育自学考试新版数学教材》的作者组织编写了“高等教育自学考试新版数学教材辅导系列”，包括《高等数学（工专）习题详解》、《高等数学（工本）习题详解》、《线性代数（经管类）习题详解》、《概率论与数理统计（经管类）习题详解》，这套丛书包括上述新版数学教材中每章的内容提要和全部习题的详细解答，既可以和上述新版数学教材配合起来使用，也可以作为单独的辅导用书.这两套丛书的作者都是在各个高校从教多年的数学教师，有从事高教自考助学的丰富经验，所以无论在新教材还是在与之配套的习题解答中，作者都能很准确地把握新大纲中对于考核知识点、难度、能力层次等项的要求，并能对广大自考生自学中的难点与困惑作出详细的注释和解答.

我们相信，这套系列丛书的推出将更有利于指导广大自考生的自学活动，帮助他们走上自学成才的成功之路.

清华大学出版社

2006年8月

PREFACE 前言

2005年全国高等教育自学考试指导委员会数学组组织专家，经过调查及反复讨论,报请全国高等教育自学考试指导委员会批准，将原来的自考课程“高等数学（二）”分开为两门课程：线性代数（经管类），概率论与数理统计（经管类）.而后分别重新拟定了两门课程的自学考试大纲.与旧大纲相比，概率论与数理统计(经管类)新大纲的形式、语言等更加规范，新大纲对考核内容及考核要求都进行了适当的调整.其主要内容为：随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量及其抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析，它相当于普通高校经管类专业同类课程的内容.

2006年，柳金甫、王义东、孙洪祥根据新版考试大纲编写的教材《概率论与数理统计（经管类）》由武汉大学出版社正式出版，为了给自考生自学此门课程提供帮助和指导，笔者编写了本书.

笔者不仅是新教材《概率论与数理统计（经管类）》的编者，还亲自参与了此门课程考试大纲的修订工作.本书的编者都是从教多年的高校教师，并有从事高教自考助学的丰富经验.在本书的编写过程中，充分考虑到自考生自学时的困难，解题过程更为详尽，对教学的难点分析尽量详细，使课堂教学的细微之处也能在本书中得以体现.

在使用此书时希望读者注意:教材中的习题应先由读者自行独立解答，然后再对照此书中的解答，找出其中的差异.在做习题的计算时，不仅会计算，而且要算得十分熟练.

本书第1~5章由孙洪祥编写，第6~9章由柳金甫编写.我们希望，凭借我们对广大自考生状况的深刻了解以及多年的教学经验而编写的这本习题解答能使读者学业有成.更恳请读者和同行教师能对书中的缺点和错误不吝赐教，我们将不胜感谢.

CONTENTS

目录

Chapter 1

第 1 章

随机事件与概率

内容提要

本章是概率论最基础的部分，所有内容围绕随机事件和概率两个概念展开. 本章的重点内容包括：随机事件的关系与运算；概率的基本性质；条件概率与乘法公式；事件的独立性.

本章的基本内容如下.

一、随机事件

1. 随机现象

在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，我们预先无法断言，称这类现象为随机现象. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，随机现象是概率论与数理统计研究的主要对象.

2. 随机试验和样本空间

在概率论中，将具有下述三个特点的试验称为随机试验，简称试验：

(1) 可重复性——在相同条件下可重复进行；

(2) 一次试验结果的随机性——在一次试验中可能出现各种不同的结果，预先无法断定；

(3) 全部试验结果的可知性——所有可能的试验结果预先是可知的.

随机试验的每一个可能出现的结果称为一个样本点，用字母 ω 表示，而把试验 E 的所有可能结果的集合称作 E 的样本空间，并用字母 Ω 表示. 换句话说，样本空间就是样本点的全体构成的集合，样本空间的元素就是试验 E 的每个结果.

3. 随机事件的概念

通俗地讲，在一次试验中可能出现也可能不出现的事件，统称为随机事件，记作 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,\cdots$. 在理论上，称试验 E 所对应的样本空间 Ω 的子集为 E 的一个随机事件，简称事件.

4. 随机事件的关系与运算

(1) 事件的包含与相等

设 A,B 为两个事件,若 A 发生必然导致 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含在事件 B 中,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) 和事件

称事件"A,B 中至少有一个发生"为事件 A 与事件 B 的和事件,也称 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. $A\cup B$ 发生意味着:或事件 A 发生,或事件 B 发生,或事件 A 和 B 都发生.

给定 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,定义它们的和事件为

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生";类似可定义可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$,它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少一个发生".

(3) 积事件

称事件"A,B 同时发生" 为事件 A 与事件 B 的积事件,也称 A 与 B 的交,记作 $A\cap B$,简记为 AB. 事件 AB 发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生,也就是说 A,B 都发生.

类似地,可定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件为

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n$$

它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生". 也可定义可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件 $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$,它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都发生".

(4) 差事件

称事件"A 发生而 B 不发生"为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$.

注意在定义事件差的运算时,并未要求一定有 $B\subset A$,也就是说,没有包含关系 $B\subset A$,照样可作差运算 $A-B$.

(5) 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的两个事件,简称 A 与 B 互不相容(或互斥). 对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果它们两两之间互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

(6) 对立事件

称事件"A 不发生"为事件 A 的对立事件(或余事件,或逆事件),记作 $\overline{A}$.

若事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,且 A 与 B 互不相容,即 $A\cup B=\Omega,AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互为对立事件.

注意:$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

若 A 与 B 为对立事件,则 A 与 B 互不相容. 但反过来不一定成立.

在进行事件运算时,经常要用到下述运算律,设 A,B,C 为事件,则有

交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、概率

1. 频率

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，而比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记作 $f_n(A)$.

2. 古典概型

古典概型是一类概率论发展历史上首先被人们研究的概率模型，理论上，具有下面两个特点的随机试验的概率模型，称为古典概型：

(1) 基本事件的总数是有限的，换句话说样本空间仅含有有限个样本点；

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，其中所含样本点总数为 n，A 为一随机事件，其中所含样本点数为 r，则有

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}},$$

也即

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

3. 概率的定义与性质

定义 1 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的每个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，如果它满足下列条件：

(1) $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ 是一列互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

概率有下列重要性质：

性质 1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1, P(\varnothing)=0$.

性质 2 对于任意事件 A, B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

特别地，当 A 与 B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

性质 2 可推广：对于任意事件 A, B, C 有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时，

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),$$

其中 n 为正整数.

性质 3 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

特别地，当 $A\subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

三、条件概率

1. 条件概率与乘法公式

定义 2 设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.

条件概率公式揭示了条件概率与事件概率 $P(B)$，$P(AB)$ 之间的关系.

显然，当 $P(A)>0$ 时，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

计算条件概率有两个基本方法：其一，用定义计算；其二，在古典概型中利用古典概型的计算方法直接计算.

乘法公式：

当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

当 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

乘法公式还可以推广到 n 个事件的情形：

(1) 设 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

(2) 设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2. 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

定义 3 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足如下两个条件：

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$；

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生；

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分时，每次试验有且只有其中的一个事件发生.

全概率公式 设随机试验对应的样本空间为 Ω，而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，B 是任意一个事件，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

注意，当 $0<P(A)<1$ 时，A 与 $\overline{A}$ 就是 Ω 的一个划分，又设 B 为任一事件，则全概率公

式的最简单形式为

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

贝叶斯公式 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间的一个划分，B 是任一事件，且 $P(B)>0$，则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

四、事件的独立性

1. 事件的独立性

定义 4 若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立，简称 A,B 独立.

关于事件的独立性有下列性质：

性质 1 设 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B)=P(B|A)$；设 $P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A)=P(A|B)$.

性质 2 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 都相互独立.

一般地，A 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$，只要有一组相互独立，另外三组也各自相互独立.

在实际应用中，对于事件的独立性，往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义来判断. 若事件 A(或 B)的发生与否对事件 B(或 A)的概率不产生影响，则 A 与 B 相互独立.

记住：A,B 的独立性对概率加法公式的简化公式，即当 A 与 B 相互独立时，

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}).$$

下面给出 n 个事件独立性的定义，先定义三个事件的独立性.

定义 5 设 A,B,C 为三个事件，若满足

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = P(B)P(C), \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立，简称 A,B,C 独立.

定义 6 设 A,B,C 为三个事件，若满足

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 两两独立.

A,B,C 独立必有 A,B,C 两两独立，但反之不然.

一般地，可定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的独立性.

定义 7 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，若对于任意整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 和任意 k 个整数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，简称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立.

直观上说，n 个事件的独立性要求 n 个事件中任取 2 个，3 个，…，n 个组成的积事件的

概率等于每个事件概率的乘积. 由定义 4 可知,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立,则从中任选 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个,这 k 个事件仍相互独立. 还可以证明,任选 k 个事件,并将其中一些事件换成其对立事件,这样得到的新事件组仍相互独立. 这一性质类似于两个事件独立的性质 2.

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 的概率可以通过下式计算:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}).$$

2. n 重伯努利(Bernoulli)试验

试验只有两个结果 A 和 $\overline{A}$,而且已知 $P(A)=p(0<p<1)$,将试验独立重复进行 n 次,则称为 n 重伯努利试验. 此类试验的概率模型称为伯努利概型.

对于 n 重伯努利试验,我们最关心的是在 n 次独立重复试验中,事件 A 恰好发生 $k(1\leqslant k\leqslant n)$次的概率 $P_n(k)$.

定理 1 在 n 重伯努利试验中,设每次试验中事件 A 的概率为 $p(0<p<1)$,则事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

习题详解

习题 1-1 随机事件

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时抛两枚硬币,观察朝上正反面情况;

(2) 同时掷两颗骰子,观察两颗骰子出现的点数之和;

(3) 生产产品直到得到 10 件正品为止,记录生产产品的总件数;

(4) 在某十字路口,一小时内通过的机动车辆数;

(5) 某城市一天的用电量.

解 5 个随机试验的样本空间分别为

(1) $\{HH,HT,TH,TT\}$; (2) $\{2,3,\cdots,12\}$; (3) $\{10,11,12,\cdots\}$;

(4) $\{0,1,2,\cdots\}$; (5) $\{x\mid 0\leqslant x<+\infty\}$.

2. 设 A,B,C 为三个随机事件,试用 A,B,C 的运算表示下列事件.

(1) A,B 都发生而 C 不发生;

(2) A,B 至少有一个发生而 C 不发生;

(3) A,B,C 都发生或都不发生;

(4) A,B,C 不多于一个发生;

(5) A,B,C 不多于两个发生;

(6) A,B,C 恰有两个发生;

(7) A,B,C 至少有两个发生.

解 (1) $AB\bar{C}$； (2) $(A\cup B)\bar{C}$； (3) $(ABC)\cup(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$；

(4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}$； (5) $\overline{ABC}$ 或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$；

(6) $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$； (7) $AB\cup AC\cup BC$.

3. 指出下列关系中哪些成立,哪些不成立.

(1) $A\cup B=(A\bar{B})\cup B$； (2) $\bar{A}\cap B=A\cup B$；

(3) $(\overline{A\cup B})\cap C=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$； (4) $(AB)\cap(A\bar{B})=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$,则 $A=AB$； (6) 若 $A\subset B$,则 $\bar{B}\subset\bar{A}$；

(7) 若 $AB=\varnothing$,且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$； (8) 若 $B\subset A$,则 $A\cup B=A$.

解 (2),(3)不成立,(1),(4),(5),(6),(7),(8)成立.利用事件的关系与运算易得.

4. 问事件“A,B 至少发生一个”与事件“A,B 至多发生一个”是否为对立事件？

解 不是.事件“A,B 至少发生一个”的对立事件是“A,B 都不发生”,而事件“A,B 至多发生一个”包含“A,B 都不发生”,“A 发生而 B 不发生”,“A 不发生而 B 发生”三种情况.

5. 设 A,B 为两个随机事件,试利用事件的关系与运算证明：

(1) $B=AB\cup\bar{A}B$,且 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容；

(2) $A\cup B=A\cup\bar{A}B$,且 A 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

证明 (1) $AB\cup\bar{A}B=(A\cup\bar{A})B=\Omega B=B$,而$(AB)(\bar{A}B)=(A\bar{A})B=\varnothing B=\varnothing$,故 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容；

(2) $A\cup\bar{A}B=(A\cup\bar{A})(A\cup B)=\Omega(A\cup B)=A\cup B$,而 $A(\bar{A}B)=(A\bar{A})B=\varnothing B=\varnothing$,故 A 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

6. 请用语言描述下列事件的对立事件.

(1) A 表示“掷两枚硬币,都出现正面”；

(2) B 表示“生产四个零件,至少有一个合格”.

解 (1) $\bar{A}$ 表示“掷两枚硬币,至少出现一个反面”；

(2) $\bar{B}$ 表示“生产四个零件,全都不合格”.

7. 设 Ω 为随机试验的样本空间,A,B,C 为随机事件,且 $\Omega=\{1,2,3,4,\cdots,10\}$,$A=\{2,4,6,8,10\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,$C=\{5,6,7,8,9,10\}$.试求：$A\cup B$,$AB$,$ABC$,$\bar{A}\cap C$,$\bar{A}\cup A$.

解 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$,$AB=\{2,4\}$,$ABC=\varnothing$,$\bar{A}\cap C=\{5,7,9\}$,$\bar{A}\cup A=\Omega$.

8. 设 Ω 为随机试验的样本空间,A,B 为随机事件,且 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$,$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.试求：$A\cup B$,$AB$,$B-A$,$\bar{A}$.

解 利用集合的运算性质可得,

$$A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}=B,\quad AB=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=A,$$

$$B-A=\{x\mid 0\leqslant x<1\},\quad \bar{A}=\{x\mid 0\leqslant x<1\text{ 或 }2<x\leqslant 5\}.$$

习题 1-2 概率

1. 把 10 本书任意放在书架的一排上，求其中指定的三本书放在一起的概率.

解 设 A 表示"指定的三本书放在一起".

把 10 本书任意放在书架的一排上，共有 $10!$ 种放法，即基本事件总数 $n=10!$. 三本指定的书放在一起有 $3!$ 种形式，而后再与另外 7 本书排列共有 $8!$ 种，则 A 包含的基本事件数 $r=3!\times 8!$，故

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3!\times 8!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

2. 10 个产品中有 7 个正品，3 个次品.

(1) 不放回地每次从中任取一个，共取 3 次，求取到 3 个次品的概率；

(2) 每次从中任取一个，有放回地取 3 次，求取到 3 个次品的概率.

解 (1) 设 A 表示"取到 3 个次品". 由于是不放回抽样，基本事件总数 $n=10\times 9\times 8$，而 A 是指三次都取到次品，A 包含的基本事件数 $r=3\times 2\times 1$，则

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{120}.$$

(2) 仍用 A 表示"取到 3 个次品"，与(1)的随机试验不同，每次取完产品要放回，基本事件总数 $n=10^3$，而 A 包含的基本事件数 $r=3^3$，则

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{3^3}{10^3}=\frac{27}{1000}.$$

3. 袋中有 7 个球，其中红球 5 个，白球 2 个，从袋中取球两次，每次随机地取一个球，取后不放回. 求：

(1) 第一次取到白球，第二次取到红球的概率；

(2) 两次取得一红球一白球的概率.

解 设 A 表示"第一次取到白球，第二次取到红球"，B 表示"两次取得一红球一白球".

(1) 基本事件总数 $n=7\times 6=42$. A 包含的基本事件数 $r_A=2\times 5$，因为第一次取到白球有 2 种取法，而第二次取到红球有 5 种取法. 于是

$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{10}{42}=\frac{5}{21}.$$

(2) 基本事件总数仍是 $n=42$. "两次取得一红球一白球"有两种情形：其一，第一次取到红球，第二次取到白球，有 5×2 种取法；其二，第一次取到白球，第二次取到红球，有 2×5 种取法，于是 B 包含的基本事件数 $r_B=5\times 2+2\times 5=20$，故

$$P(B)=\frac{r_B}{n}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}.$$

4. 掷两颗骰子，求出现的点数之和等于 7 的概率.

解 设 A 表示"出现的点数之和等于 7". 显然基本事件总数 $n=6^2=36$. "出现的点数

之和等于 7”表明出现的点对必属于下列情形：(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)，共 6 种，即 $r=6$，则

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

5. 从 1,2,3,4,5 五个数码中，任取 3 个不同数码排成一个三位数. 求：

(1) 所得的三位数为偶数的概率；

(2) 所得的三位数为奇数的概率.

解 设 A 表示“所得三位数为偶数”，B 表示“所得三位数为奇数”. 基本事件总数 $n=\mathrm{A}_5^3=60$.

(1) 所得的三位数为偶数，只要三位数的个位数从 2,4 中取，而其他两位数从其余 4 个数中任取即可，于是 $r_A=\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^2=24$，则

$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{24}{60}=0.4.$$

(2) 类似可知 $r_B=\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_4^2=36$，则

$$P(B)=\frac{r_B}{n}=\frac{36}{60}=0.6.$$

6. 口袋中有 10 个球，分别标有 1 到 10 的号码，现从中任选 3 只，记下取出球的号码. 求：

(1) 最小号码为 5 的概率；

(2) 最大号码为 5 的概率.

解 设 A 表示“最小号码为 5”，B 表示“最大号码为 5”. 基本事件总数 $n=\mathrm{C}_{10}^3=120$.

(1) “最小号码为 5”意为取出 3 只球中有一只球的号码为 5，而另外两只球的号码要大于 5，于是 A 包含的基本事件数 $r_A=\mathrm{C}_5^2$，则

$$P(A)=\frac{r_A}{n}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

(2) 类似分析可知 B 包含的基本事件数 $r_B=\mathrm{C}_4^2=6$，

$$P(B)=\frac{r_B}{n}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

7. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子，求 3 个球在同一个杯子中的概率.

解 设 A 表示“3 个球在同一个杯子中”. 由于共有 4 个杯子，3 个球在同一个杯子中的放法有 4 种，即 $r=4$. 因为每个球有 4 种放法，共有 3 个球，所以基本事件总数 $n=4\times4\times4=4^3$，则

$$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

8. 罐中有 12 粒围棋子，其中 8 粒白子，4 粒黑子，从中任取 3 粒. 求：

(1) 取到的都是白子的概率；

(2) 取到两粒白子，一粒黑子的概率；