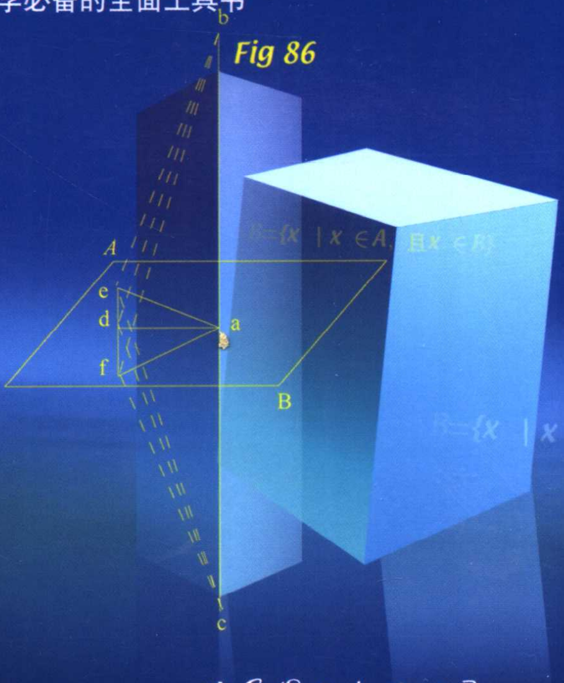
BSK高考命题研究组

超级数学专题题典

向量

□ 紧扣大纲 关注高考

□ 学习数学必备的全面工具书

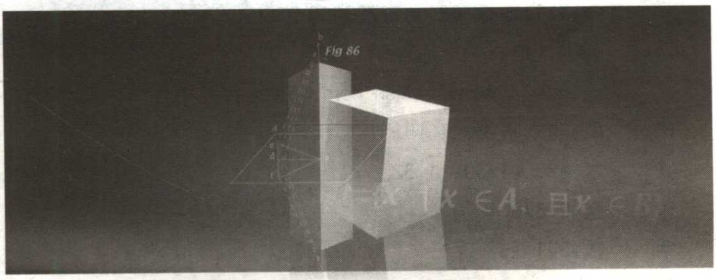


世界图书出版公司

BSK 高考命题研究组

超级数学专题题典

向量



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——向量/BSK 高考命题研究组编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5584-4

Ⅰ.超… Ⅱ.B… Ⅲ.向量-高中-习题-升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 153801 号

超级数学专题题典——向量

BSK 高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司
上海市尚文路 185 号 B 楼　　邮政编码 200010
公司电话:021－63783016 转发行科
(各地新华书店经销)
http://www.wpcsh.com.cn
印　　刷:北京京都六环印刷厂
开　　本:880×1230　1/32
印　　张:9.375
字　　数:361 千字
版　　次:2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5062-5584-4/G·72
定　　价:11.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系
(质检科电话:010－84498871)

前　言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3)框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

(4)成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

(5)自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006 年 9 月

目　录

第一篇　知识篇

本专题知识结构图

向量	平面向量及其运算	向量
		向量的加减法
		向量和实数的积
		平面向量的数量积及运算率
	平面向量的坐标表示	平面向量的坐标表示及运算
		向量的定比分点
		平移
	空间向量及运算	空间向量
		空间向量的运算
	向量的应用	向量的应用

数学是研究现实世界的数量关系与空间形式的科学、或简言之，是研究数与形的科学. 对这里的数与形应做广义的理解，它们随着数学的发展，将不断取得新的内容. 古时候，人类在生产生活实践中，由于比较物体的大小和数量多少的需要，获得了数的概念，同时也对物体的形状和位置获得了一些简单的几何概念.

这样，早在人类文化的初期，就积累了一些数学知识. 到了 16 世纪，包括算术、初等代数、初等几何和三角的初等数学已经大体完备了. 17 世纪，由于生产力的发展推动了自然科学和技术的前进，人们获得了变量的概念. 这是数学发展史上的重要转折点，数学不仅研究不变的量和个别图形，也研究变化中的量与量之间的关系和图形间的相互变换，从而使运动和辩证法进入了数学. 随着生产力的进一步发展，越来越多的要求我们对自然现象做定量的研究，还由于数学本身的发展，使得数学的研究范围不断扩大，内容日益丰富. 数学的理论往往具有非常抽象的形式，但它同时也是现实空间形式和数量关系的深刻反映，因此可以广泛的应用到自然科学、社会科学和技术的各个部门，对人类认识自然和改造自然，起着重要的作用. 近年来，由于计算技术的发展，这种作用显示得更加清楚了.

从内容上说，现代的数学在习惯上分成数理逻辑、数论、代数学、几何学、拓扑学、函数论、泛函分析、微分方程、概率论、数理统计、计算数学、组合数学等分支，同时也产生了一些边缘学科，如运筹学、控制论等.

从发展的角度看，数学还可以定义为研究基本数学元素与基本数学关系的科学. 基本的数学元素有两种表现形式，一种为量的抽象，是为数；一种为体的抽象，是为形. 数

和形是最基本的数学元素.数学的基本关系有很多,典型的如集合和映射,而基本数学关系的表达方法,称之为式,代数式、方程式等都属式的一种,另外如表达线与线,线与面之间的几何关系式,亦属式的一种.复杂的,或称高级的数学元素和数学关系都由基本数学元素和基本数学关系迭加、延伸或拓展得到.

数和形都是基本数学元素的外在表现形式,这也说明,数和形在本质上是一体的,如实数与数轴,数组与向量,本来就是同一概念的不同表达方式而已.我们考虑复杂问题的时候,要学会"透过现象看本质",这也是常常提到的要"数形结合"的根本原因.

向量是既有大小又有方向的量,在它的身上恰恰体现着数与形的统一.

因此,一方面向量和形(无论是立体几何还是平面几何)有着这样或那样千丝万缕的联系;另一方面向量和数(复数)存在着紧密地联系.

向量的运算和复数的运算有很多共通之处,向量的几何性质又与解析有许多相似之点.借助于向量知识,尤其是向量的数量积的性质,给我们计算空间中的角度问题,提供了十分有效的武器.为我们计算线线角、线面角、面面角……,又提供了一种行之有效的方法.

向量知识作为一个全新的知识点,成为了沟通初等数学和高等数学的桥梁.但也正因为如此,单纯考核向量知识的题目,在高考中的难度也不是很大,仍然以知识型的题目为主,在解答题中向量常以解析几何的信息方式出现,也只是为题目增加一点点障碍.立体几何的向量解法和传统解法一样,都是处理立体几何问题的一种工具.从知识地位上讲,向量解法只是立体几何常规解法的一个有益的补充.而富于技巧性的题目,相对并不多.

但在另一方面,我们也应该看到向量的地位在逐渐增强.随着教育改革的进一步深化,学科知识综合的命题趋势也渐渐显露出来.数学作为一门独立的学科和其它学科的综合主要体现在数学应用题的数学模型构筑,但这种结合是初步的;数学的学科内综合,向量则起着其它知识点无法代替的角色.

正是因为向量是连接数与形的纽带,它有效的将几何和代数沟通起来,这注定了向量在高考命题中将越来越多地扮演其"红娘角色",融入复数和解析几何题目中,走进立体几何的解题方法里.

向量的不等式关系,尤其是向量模的不等式关系,是我们常见的几何不等式关系的延拓.利用向量的不等式关系,可以使很多原本看来很玄妙的题目迎刃而解.

拿向量为学习打一个比方,那就是不但要做到知识的积累(向量的大小),而且要做到知识类型的识别(向量的方向).因为只有把握好了它的大小和方向,才能把握好向量.向量的知识点很多,需要在不断的学习中慢慢积累.本书正是想为读者提供把握这些知识点所构成的知识脉络的一个诠释.向量的知识类型,以知识型为主而技巧型为辅,明白了这点,可以帮助大家更好的把握向量.

向量在高中数学中的地位可以概括的说:把握好了向量知识,就把握好了"数"与"形".把握好了"数"与"形",就把握好了高中数学.

第一章　平面向量及其运算

本章知识结构图

平面向量及其运算	向量	向量的定义
		向量的模
		零向量和单位向量
		平行向量、共线向量和相等向量
		向量和有向线段
		向量与标量
		向量的相等与平行
	向量的加减	向量的加法
		向量的平行四边形法则
		向量加法满足交换率和结合率
		向量的减法
		向量减法的几何作法
		对于向量三角形法则的补充
	向量和实数的积	实数和向量积的定义
		实数和向量积的运算率
		两个向量共线定理
		平面向量的基本定理
		如何利用和证明向量的平行关系
		向量方程的求解
	平面向量的数量积及运算律	平面向量数量积的定义和几何意义
		向量数量积的性质
		向量数量积的运算率
		向量数量积运算与普通乘法运算的比较
		用 i、j 坐标表示的向量的数量积

第一节 向量

高考考点和趋势分析

本节内容在高考中主要考查向量的有关概念、向量的模，以选择题和填空题为主.

目标 1：理解向量的概念，掌握向量的几何表示；

目标 2：了解共线向量的概念.

知识点讲解与应用

1. 向量的定义(考频 6 次，其中，选择题 3 次，填空题 3 次，解答或证明题 0 次)

既有方向又有大小的量叫做向量. 它一般用有向线段表示. $\overrightarrow{AB}$ 表示从点 A 到 B 的向量(即 A 为起点，B 为终点的向量)，也可以用字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、… 等表示(一般地，印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，书写用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$.

注意：长度、面积、体积、质量等为数量，位移、速度、力等为向量).

数量与向量的区别：数量只有大小，是一个代数量，可以进行代数运算、比较大小；向量有方向，大小，双重性，不能比较大小.

要辨别某个量是不是向量，只要看这个量是否具有“大小”和“方向”两个要素. 具有这两个要素的量是向量，否则不然.

例1 如图 1-1-1，BD 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高，AE 是边 BC 上的中线，问线段 BD、AE 是否可以表示向量?

分析 由向量的定义判断.

解答 平面几何中的线段只有大小没有方向，故 BD、AE 都不能表示向量.

点评 在平面几何中，线段没有起点和终点之分，即线段 AB 与线段 BA 表示的是同一条线段，正因为如此，本题中的 BD、AE 都是只有大小没有方向的量，不是向量.

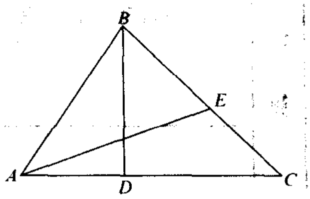


图 1-1-1

2. 向量的模(考频 16 次，其中，选择题 9 次，填空题 5 次，解答或证明题 2 次)

所谓向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度(或称模)，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或者 $|\boldsymbol{a}|$. 向量不能比较大小，但向量的模可以比较大小. 从本质上讲 $|\overrightarrow{AB}|$ 是一个 $[0,+\infty)$ 内的实数，它具有 $[0,\infty)$ 内实数的所有性质.

求向量模的问题可以转化为求线段的长度.

例2 已知点 $A(0,3)$、$B(-4,0)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的模，并指出 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\overrightarrow{BA}|$ 是否相等.

分析 代入向量的模的计算公式求解.

解答 由于 A、B 的坐标分别是 $(0,3)$、$(-4,0)$，所以 $|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=4$，

$\because \triangle AOB$ 是直角三角形，$\therefore |\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2$，

即 $|\overrightarrow{AB}|^2=25$，$\therefore |\overrightarrow{AB}|=5$. 同法 $|\overrightarrow{BA}|=5$，$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$.

点评 $|\boldsymbol{a}|$ 表示的是向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小，$|\boldsymbol{a}|$ 是大于等于 0 的实数.

例3 在直角坐标系中，画出下列向量：

(1) $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 x 轴正方向的夹角为 60°，与 y 轴正方向的夹角为 30°；

(2) $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 x 轴正方向的夹角为 30°，与 y 轴正方向的夹角为 120°；

(3) $|\boldsymbol{a}|=4\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}$ 的方向与 x 轴正方向的夹角为 135°，与 y 轴正方向的夹角为 135°.

分析 结合向量的模的定义画出图象.

解答 如图 1-1-2.

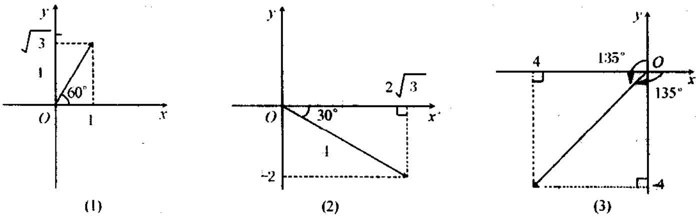


图 1-1-2

点评 本题不会直接出现在考试卷上，但是会作为解题的相关步骤出现，属于需要掌握的"暗内容".

3. 零向量与单位向量(考频 3 次，其中，选择题 1 次，填空题 2 次，解答或证明题 0 次)

长度为 0 的向量称为零向量，用 $\mathbf{0}$ 表示. 零向量的方向是不定的，或者说任何方向都是 $\mathbf{0}$ 向量的方向，因此 $\mathbf{0}$ 向量有两个特征：一是长度为 0；二是方向不定.

长度为 1 的向量称为单位向量.

例4 判断下列命题真假

(1) 起点不同，但方向相同且模相等的几个向量是相等的向量.

(2) 非零向量的单位向量是 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

分析 依据定义判断.

解答 (1) 真命题，因为向量与起点位置无关.

(2) 真命题，任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

点评 考查对向量的定义的理解程度.

例5 如图 1-1-3，四边形 $ABCD$ 和 $ABDE$ 都是平行四边形.

(1) 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有________；

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}|=3$，则向量 $\overrightarrow{EC}$ 的模等于________.

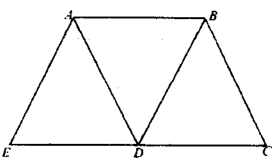


图 1-1-3

分析 本题考查用向量的观点对平面图形进行初步判断的能力，是容易题.

解答 (1) 由已知条件,可得$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$且$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$;

(2) 由(1)可得$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$,于是$E$、$D$、$C$三点共线,

故$|\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|=2|\overrightarrow{AB}|=6\ \overrightarrow{ED}(\overrightarrow{DC})$.

点评 向量相等是指大小相等,方向相同.而两个向量的和的模等于两个向量模的和.其实也就是遵循平行四边形法则,只是夹角正好为0而已.

例6 下列命题中,正确的是________.

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

B. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

D. $|\boldsymbol{a}|=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

分析 向量相等与模相等不同,模表示向量的长度,是一个实数,且大于等于0,向量是一个有方向有大小的量.二者没有必然的大小递推关系.

解答 由向量的定义知:向量既有大小,也有方向,由向量具有方向性可排除A、B,零向量、数字0是两个不同的概念,零向量是不等于数字0的.

∴ 应排除D,选C.

点评 还是在考查向量与模的定义和区别,这也是高考中一个考点.

例7 下列四个命题:① 若$|\boldsymbol{a}|=0$,则$\boldsymbol{a}=0$;② 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$;③ 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是平行向量,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$;④ 若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则$-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

其中正确命题个数是________.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

分析 需要仔细对比零向量的含义和概念作区分.

解答 ① 是忽略了0与$\boldsymbol{0}$不同,由于$|\boldsymbol{a}|=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,但$\boldsymbol{0}$不能写成0;

② 是对两个向量的模相等与两个实数相等混淆了,两个向量的模相等,只能说明它们的长度相同,并不意味它们的方向相同或相反;

③ 是对两个向量平行的意义理解不透,两个向量平行,只是这两个向量的方向相同或相反,而它们的模不一定相等;

④ 正确,故选A.

点评 注意零向量概念上的特殊性.

4. 平行向量、共线向量、相等向量(考频6次,其中,选择题3次,填空题2次,解答或证明题1次)

方向相同或相反的非零向量称为平行向量.特别规定零向量与任一向量都平行.因此,零向量与零向量也可以平行.根据平行向量的定义可知:共线的两向量也可以称为平行向量.例如$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$也是一对平行向量.

由于任何一组平行向量都可移到同一直线上,故平行向量也叫做共线向量.例如,若四边形$ABCD$是平行四边形,则向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是一组共线向量;向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$也是一组共线向量.

长度相等且方向相同的向量叫做相等向量,若向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$相等,记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.零向量与零向量相等,任意两个相等的非零向量都可以用一条有向线段来表示,并且与

有向线段的起点无关.

例8 回答下列问题,并说明理由.

(1) 平行向量的方向一定相同吗?

(2) 共线向量一定相等吗?

(3) 相等向量一定共线吗?不相等的向量一定不共线吗?

解答 (1) 平行向量的方向不一定相同,就平行向量的概念来讲,它是就向量的方向这一要素来定义的,它有方向相同和相反两种不同的情况.因此,两个向量方向相同和相反均视为平行.从逻辑知识上考虑,方向相同是向量平行的充分而不必要条件.

(2) 不一定.共线向量就是平行向量,只要保证方向相同或相反,它们就共线,对向量模的大小没有要求.

(3) 相等必共线,共线未必相等,不相等的可以是不共线的,也可以是共线的.在判断向量是否相等时,应明确,不共线的肯定不相等,就是共线了,还要考虑它们的方向是否相同,模是否相等.

点评 *考查定义和概念.*

例9 判断下列各命题是否正确

(1) 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(2) A、B、C、D 是不共线的四点,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 是平行四边形的充要条件;

(3) 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;

(4) 两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 相等的充要条件是 $\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\\ \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b};\end{cases}$

(5) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的必要不充分条件;

(6) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 的充要条件是 A 与 C 重合,B 与 D 重合.

解答 (1) 不正确.两个向量的长度相等,但它们的方向不一定相同;

(2) 正确.$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ 且 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$,

又 A、B、C、D 是不共线的四点,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

反之,若四边形 $ABCD$ 是平行四边形则 $\overrightarrow{AB} \mathrel{\underline{\parallel}} \overrightarrow{DC}$,且 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 方向相同,

因此 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$;

(3) 正确.$\because \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\therefore \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的长度相等且方向相同;又 $\because \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,$\therefore \boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的长度相等且方向相同,$\therefore \boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的长度相等且方向相同,故 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;

(4) 不正确.当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,如果方向相反,即使 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,也不能得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,

故 $\begin{cases}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,\\ \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\end{cases}$ 不是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件;

(5) 正确.这是因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}| \not\Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,但 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \Rightarrow |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的必要不充分条件;

(6) 不正确.这是因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 时,应有:$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ 及由 A 到 B 与由 C 到 D 的方向相同,但不一定要有 A 与 C 重合、B 与 D 重合.

点评 ① 针对上述结论(1)、(4)、(5)，我们应该清醒的认识到，两非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$相等的充要条件应是$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的方向相同且模相等.

② 针对结论(3)，我们应该理解向量相等是可传递的.

③ 结论(6)不正确，平面向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等，并不要求它们有相同的起点与终点. 当然如果将相等的两向量的起点平移到同一点. 则这时它们的终点必重合.

例10 如图1-1-4，$\triangle ABC$中，三边长$|AB|$，$|BC|$，$|CD|$均不相等，E、F、D是AC，AB，BC的中点.

(1) 写出与$\overrightarrow{EF}$共线的向量；

(2) 写出与$\overrightarrow{EF}$的模大小相等的向量；

(3) 写出与$\overrightarrow{EF}$相等的向量.

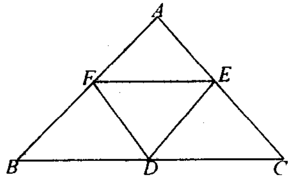


图 1-1-4

解答 (1) $\because E$、F分别是AC，AB的中点，$\therefore EF \parallel BC$.

从而，与$\overrightarrow{EF}$共线的向量包括：$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CB}$.

(2) $\because E$、F、D分别是AC、AB、BC的中点，$\therefore EF = \frac{1}{2}BC$，$BD = DC = \frac{1}{2}BC$.

又$\because AB$、BC、AC均不相等，

从而，与$\overrightarrow{EF}$的模大小相等的向量是：$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{CD}$.

(3) 与$\overrightarrow{EF}$相等的向量包括：$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{CD}$.

点评 考查向量的定义.

基础练习题

1. 向量是________的量.
2. 向量的________叫做向量的模.
3. ________的向量叫做单位向量.
4. ________的向量叫做零向量.
5. 与________无关的向量称为自由向量.
6. 平行于同一直线的一组向量叫做________，三个或三个以上平行于同一平面的一组向量叫做________.
7. 两向量________时，我们称这两个向量相等.
8. 两个模相等、________的向量互为逆向量.
9. 把平行于某一直线的一切单位向量归结到共同的始点，则终点构成________.
10. 下列各量中是向量的有哪些？

A. 动能　B. 重量　C. 质量　D. 长度　E. 作用力与反作用力　F. 温度

(参考答案见 $P164$)

高屋建瓴

1. 向量与有向线段

向量——是既有大小又有方向的量.

按照这个定义,向量有两个要素,即向量的大小和向量的方向.

有向线段——规定了方向的线段,称为有向线段.

按照这个定义,有向线段有三个要素,即有向线段的长度、方向以及起点(或终点).在我们不考虑有向线段的起点时,有向线段和向量之间是一一对应的.

有向线段的方向就是向量的方向,有向线段的长度就是向量的大小.

在平移意义下能够完全重合的有向线段是相等的,如图1-1-5中的$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{DC}$.

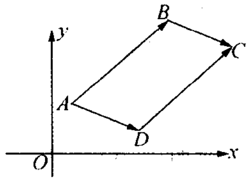


图 1-1-5

现实生活中的一些物理量,不仅具有其大小和方向,而且还和它的起点有关,例如力.它的作用效果不仅取决于它的大小和方向,还取决于它的作用点(力的大小、方向、作用点称为力的三要素).但是,在我们处理刚体平动问题的时候,常不考虑其作用点而分析受力,这和我们将有向线段和向量一起研究的思想很相似.

2. 向量与标量

向量是既有大小又有方向的量,而标量是只有大小没有方向的量.

对于一维的向量(比如直线运动物体的速度 v),它的符号代表它的方向;

但对于一些标量(比如功 W),它的符号仅仅表明做正功(外力对物体做功)还是负功(物体克服外力做功),无方向性.

3. 零向量和单位向量

零向量:长度为零的向量称为零向量,记作$\mathbf{0}$.它的方向是任意的,对应的几何图形是零线段(即一个点).

单位向量:长度等于1个单位长度的向量,称为单位向量.单位向量通常用来标记一个向量的方向;单位向量可以看作只有方向没有大小的量(因为长度就是1).

例:$\boldsymbol{a}$ 是一个向量,则若记它的方向向量为$\boldsymbol{a}_0$.我们有:$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

4. 向量的相等与平行

(1) 向量的相等:

两个非零向量大小相等、方向相同时称它们相等.所有零向量均相等.

由于零向量的方向具有不确定性,因此当我们仅提两个向量相等时,未必有方向相同.但是,任意两个相等的向量必然大小相等、彼此平行(零向量平行于它本身).

(2) 向量的平行:

两个非零向量,方向相同或相反则称为平行向量.零向量平行于任何一个向量.

对于任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.它们平行当且仅当存在不全为零的实数 u、v 使得:$u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$(这时,我们称向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关).

例11 给出下列3个命题:(1) 单位向量都相等;(2) 单位向量都共线;(3) 共线的单位向量必相等.其中真命题的个数是________.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3