



高等学校数学系列教材

微积分教程

(上册)

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

微 积 分 教 程

(上 册)

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程(上册)/哈尔滨工程大学应用数学系编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社, 2003

ISBN 7-81073-528-4

I. 微… II. 哈… III. 微积分-高等学校-教材
IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 084163 号

内 容 简 介

本书以全国高校工科数学课程教学委员会修订的“高等数学课程基本要求”为依据,在我校多年来高等数学课程的教学经验和教学改革的基础上,经过应用数学系多数教师的仔细推敲而写成的。

本书分上、下两册。上册内容为函数与极限,导数与微分,中值定理与导数应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何;下册内容包括多元函数微分法,重积分,曲线与曲面积分,无穷级数以及常微分方程。书后还附有几种常见的曲线,积分表,习题参考答案与提示。

本书具有结构合理,逻辑清晰,通俗简捷,例题适当,习题面广的特点。同时,还增加了有关数学建模的典型实例,以便于进一步加强对学生实际应用能力的提高和培养。

本书可供高等工院校学生学习使用。

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)82519328 邮编:150001

新华书店经销

肇东粮食印刷厂印刷

*

开本 850mm×1168mm 1/32 印张 10.0625 字数 270 千字

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

印数:1—5 000 册

定价:17.00 元

前 言

为了适应高等教育改革发展的需要,依据全国工科高等数学指导委员会制定的“高等数学课程教学基本要求”,结合我校多年来的教学实践和教学经验,在对许多教师、学生进行了大量的调查,特别是吸收了国内外同类教材的优点基础上,经充分讨论和研究,我们编写出版了《微积分教程》一书。全书共分上、下两册,另附有习题课指导教材两册。

本书以培养学生能力和提高学生素质为主线,注意对基本理论知识、基本技能及基本方法的分析和训练,又增加了数学建模方面的实例。

本书编写时考虑了与中学数学课程内容的衔接。在文字和内容的叙述上,力求通俗易懂、由浅入深、表达清晰、结构严谨,在直观引入的基础上,再给出严格的定义;在例题的选配注意了代表性和典型性,以促进学生概念及定理的理解和深化;在习题配置上,以基本训练为重点,同时也有少量技巧性较强、难度较大的题目,需在教师指导下练习。

本书上、下两册分别由林锰(第一章),范崇金(第二章、第六章),董衍习(第三章),沈艳(第四章、第五章),卜长江(第七章、第九章),马孝珣(第八章),祖国城、贾念念(第十章),于涛(第十一章)和王锋(第十二章)等同志编写而成。参加本书编写工作的还有张晓威同志。沈继红同志提供了数学建模的素材实例。

全书由陈林珠(上册),高玲(下册)主审和统稿。

在本书的编写过程中,得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的帮助和支持,也得到了全校各级有关领导的鼓励和指导,在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限,书中难免有不妥之处,恳切希望广大读者指评
指正。

编 者

2003.7

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函 数	1
第二节 数列的极限	15
第三节 函数的极限	21
第四节 无穷小与无穷大	28
第五节 极限的四则运算	33
第六节 极限存在准则 两个重要极限	36
第七节 无穷小的比较	42
第八节 函数的连续性与间断点	45
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	52
第十节 闭区间上连续函数的性质	56
第二章 导数及微分	60
第一节 导 数	60
第二节 导数的四则运算与复合函数求导	67
第三节 高阶导数	72
第四节 特殊求导法	75
第五节 微 分	82
第三章 中值定理与导数的应用	89
第一节 中值定理	89
第二节 洛必达法则	95
第三节 泰勒公式	101
第四节 函数的单调性	107
第五节 函数的极值	111
第六节 曲线的凹凸与函数的作图	120
第七节 曲 率	128

第四章 不定积分	132
第一节 不定积分的概念与性质	132
第二节 换元积分法	141
第三节 分部积分法	152
第四节 几种特殊类型函数的积分	159
第五章 定积分	173
第一节 定积分的概念	173
第二节 定积分的性质 中值定理	181
第三节 微积分的基本公式	185
第四节 定积分的换元积分法	193
第五节 定积分的分部积分法	202
第六节 广义积分的概念	205
第六章 定积分的应用	211
第一节 功 水压力和引力	211
第二节 面积与体积	216
第三节 平面曲线的弧长	222
第七章 空间解析几何	226
第一节 空间直角坐标系	226
第二节 空间向量	229
第三节 向量的坐标	234
第四节 空间平面及方程	239
第五节 空间直线方程	243
第六节 空间曲面及方程	248
第七节 空间曲线及方程	255
附录 I 微积分在经济学中的应用	258
附录 II 数学建模的实例	266
附录 III 几种常用的曲线	271
附录 IV 积分表	275
习题答案	286

第一章 函数与极限

函数是客观世界中量与量之间相互依赖关系的一种数学抽象,它是中学数学的重要内容之一,又是高等数学(或数学分析)的主要研究对象.初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程.虽然函数的思想对定义域和值域中的对象的性质没有加以限制,但在本课程中,我们主要感兴趣的还是它的定义域和值域都是实数集的函数,即是在实数集上讨论问题.本章将介绍函数极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、函数的概念

函数是描述客观事物在运动、变化、发展过程中量与量之间的对应规律.

在所考虑的问题中,可取不同数值的量称为变量,保持数值不变的量称为常量.为了方便起见,我们称在一非空数集内可以任意取值的量为变量.这样,常量就成为变量的特例.

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有多个变量在变化着.这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律.我们首先研究两个变量的情形(多于两个变量的情形在后续课程中介绍).下面举几个例子.

例 1 在自由落体运动中,路程 S 随时间 t 的变化而变化,它

们之间的依赖关系由公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

给出. 其中 g 是重力加速度, 为常量. 时间 t 与路程 S 为变量. 对于 $t \in (0, +\infty)$ 的任意一数值, 按上面公式, S 都有一确定值与其对应.

例 2 气象部门为掌握某地区某天 24 小时内温度 T 与时间 t 确定的对应关系, 使用自动记录仪记录 (图 1-1). 此曲线难以用解析式表示.

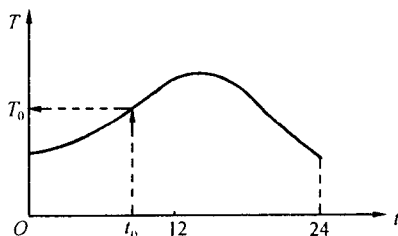


图 1-1

上述两例, 都反映了变量与变量之间的某种特定的依赖关系, 于是抽象出函数的概念.

1. 函数的定义

设 x, y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数值 $x \in D$, 按照对应规则, 变量 y 有惟一确定的数值与其对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为

$$y = f(x)$$

通常称 x 为自变量, y 为因变量, 数集 D 为函数的定义域.

2. 说明

(1) 函数 $y = f(x)$ 中表示对应规则的符号“ f ”也可用其它字母, 如“ F ”, “ φ ”等等, 这时函数就应记为 $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等等.

(2) 当自变量 x 取一定值时, 因变量 y 相应的值叫函数值. 所有函数值的集合称为函数的值域, 不妨用字母 W 表示. 函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值记为 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0} = y_0$.

(3) 同一函数的自变量和因变量不能用同一字母表示. 如 $y = x^2$

+1 不能写成 $x = x^2 + 1$.

(4)在数学中,若只是抽象地研究用算式表达的函数时,我们约定:函数的定义域是自变量所取的、使算式有意义的一切实数值.如函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域是区间 $[0, +\infty)$.

(5)特殊地,若自变量在定义域内任取一数值时,对应的函数值不是只有一个,这种函数称为**多值函数**.我们定义的函数称为**单值函数**.以后凡是没有特别说明时,函数都是单值的.

在中学,我们已知函数表示法有三种:公式表示法、图形表示法和表格表示法(如函数表).这也是高等数学(或数学分析)中要用到的函数表示法.

当一个函数用公式表示时,也不一定只用一个统一公式.图形表示法就是将函数 $y = f(x)$ 用平面上的图像给予表示.在平面直角坐标系中,函数 $y = f(x)$ 的图像是平面点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

当 D 是一个区间时,函数 $y = f(x)$ 的图像通常是平面上的一条曲线.下面举几个例子.

例3 绝对值函数 $y = |x|$.

此函数也可写成

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$ (图 1-2).

例4 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数,记为 $y = [x]$,这个函数称为取整函数(图 1-3).如 $[\frac{5}{7}] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [-3.4] = -4$. $y = [x]$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为全体整数.

例5 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$ (图1-4).

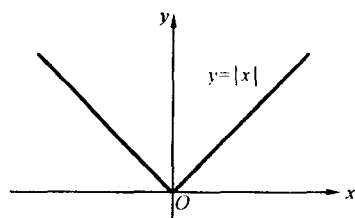


图 1-2

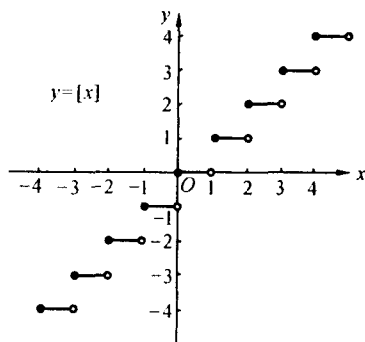


图 1-3

我们将以上几例中这种在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数.

需要请读者注意的是, 当自变量的取值范围是某个区间时, 如果不必表明是否包含区间的端点以及此区间为无穷区间还是有限区间, 那么我们可以简称

之为“区间”, 并用字母 I 表示. 另有一种特殊的区间, 即设 $a, \delta (\delta > 0)$ 为两实数, 我们称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 也就是

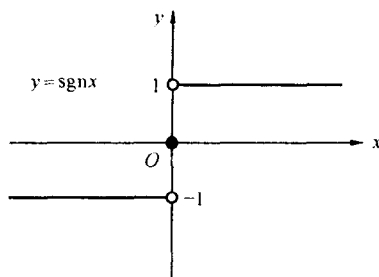


图 1-4

$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$ 或 $U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}$
 点 a 为此邻域的中心, δ 为此邻域的半径. 有时用到的邻域要把邻域的中心去掉, 称为点 a 的去心(或空心)的 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$. 也就是

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 令区间 $I \subset D$, 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 反之, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

若在上述不等式中不出现等号, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(减少). 在定义域上单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 严格单调增加或严格单调减少的函数统称为严格单调函数(见图 1-5、图 1-6).

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的, 而在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $y = x^2$ 不是单调的(见图 1-7).

又例如函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(见图 1-8).

2. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M , 使得与任意 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| < M$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界, 亦即, 如果对任何正数 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

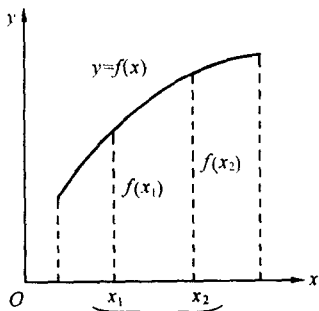


图 1-5

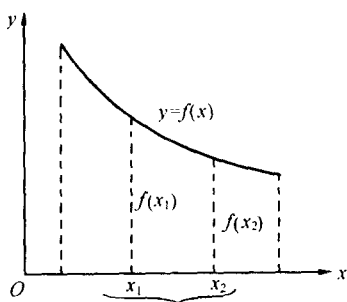


图 1-6

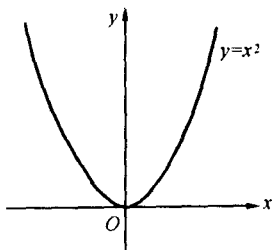


图 1-7

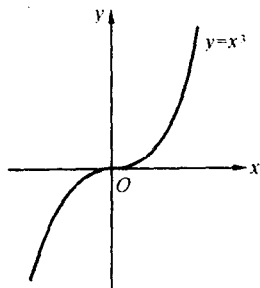


图 1-8

例如,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,这是因为对 $x \in (-\infty, +\infty)$, 总有 $|\sin x| \leq 1$. 又如 $y = \frac{1}{x}$, 在 $x \in (0, 1)$ 区间内无界, 在 $[1, 2]$ 内有界, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的(即若 $x \in D$, 则必有 $x \in D$). 如果对任意 $x \in D$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$

是偶函数; $f(-x) = -f(x)$ 则称 $f(x)$ 是奇函数.

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = -x^3 = -f(x)$.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的, 而奇函数的图形是关于原点对称的. 但值得注意的是, 有些函数即非奇函数, 又非偶函数, 如 $f(x) = \sin x + \cos x$.

4. 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D , 如果存在数 $l (l > 0)$, 使得对任意 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, $y = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

三、反函数

一般地说, 函数 $y = f(x)$ 中, 若将 y 当作自变量, x 当作因变量, 则由 $y = f(x)$ 确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x = \varphi(y)$ 来说, $y = f(x)$ 称为直接函数.

在纯数学的研究中, 由于所关心的问题只是变量间的相互依赖关系, 且习惯上常用 x 来表示自变量, 用 y 来表示因变量, 因此把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$. 事实上 $y = f(x)$ 与 $y = \varphi(x)$ 互为反函数. 在中学时已证明过它们的图形关于直线 $y = x$ 对称.

对于严格单调的函数, 有如下结论: 单值严格单调函数有反函数, 其反函数也是单值严格单调函数.

例如, $y = \sqrt{x}$ 在其定义域 $x > 0$ 上是严格单调函数, 其反函数 $y = x^2$ 在其定义域 $x > 0$ 上也是严格单调函数.

四、复合函数 初等函数

1. 基本初等函数

我们将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的函数表达式如下.

(1) 幂函数

$y = x^a$ (a 为常数), 它的定义域要根据 a 的取值而定.

(2) 指数函数

$y = a^x$ (a 为常数, 且 $a > 0, a \neq 1$), 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 以常数 $e = 2.718\ 281\ 8\cdots$ 为底的指数函数 $y = e^x$ 是科技中常用的指数函数.

(3) 对数函数

它是指数函数的反函数, 记作 $y = \log_a x$ (a 为常数, $a > 0, a \neq 1$). 它的定义域是 $(0, +\infty)$. 当 $a = e$ 时, 记为 $y = \ln x$.

(4) 三角函数

常用的三角函数有:

正弦函数 $y = \sin x$; 余弦函数 $y = \cos x$;

正切函数 $y = \tan x$; 余切函数 $y = \cot x$;

正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$; 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$.

其中自变量 x 以弧度为单位来表示.

(5) 反三角函数

它是三角函数的反函数, 主要有以下几种:

反正弦函数 $y = \arcsin x$; 反余弦函数 $y = \arccos x$;

反正切函数 $y = \arctan x$; 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$.

以上基本初等函数的性质、图像等这里从略介绍.

2. 复合函数 初等函数

(1) 复合函数

先举一个例子, 设 $y = \sqrt{u}$ 而 $u = 1 - x^2$, 以 $1 - x^2$ 代替第一式的 u , 得 $y = \sqrt{1 - x^2}$. 我们说, 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = 1 - x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地, 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, $u \in D_1$, 而 u 又是 x 的

函数 $u = \varphi(x)$, $x \in D_2$, 且 $D = \{x \mid x \in D_2, \varphi(x) \in D_1\} \neq \Phi$, 则函数

$$y = f[\varphi(x)], x \in D$$

称为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量.

例如, 函数 $y = \arctan(x^2)$ 可看作是由 $y = \arctan u$ 及 $u = x^2$ 复合而成的, 这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它也是 $u = x^2$ 的定义域. 又例如, $y = \sqrt{x^2}$ 可看作是由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = x^2$ 复合而成的, 这个函数实际就是函数 $y = |x|$.

必须注意, 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值 (都不小于 2), 都不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如, 设 $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$, 则得复合函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 这里 u 及 v 都是中间变量.

(2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数, 称为初等函数, 例如

$$y = \sqrt{1 - x^2}, y = \ln \sin^2 x + 2x \tan \sqrt{x}$$

都是初等函数. 本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

五、双曲函数与反双曲函数

应用上常遇到的双曲函数是:

$$\text{双曲正弦} \quad \text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲余弦} \quad \text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲正切 } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

这三个双曲函数的简单性态如下.

双曲正弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是奇函数, 它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的. 当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$; 在第三象限内接近于曲线 $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ (图 1-9).

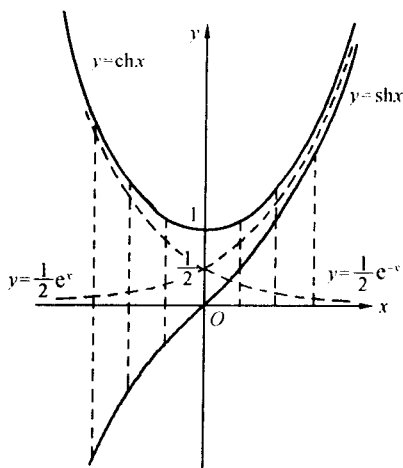


图 1-9

双曲余弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是偶函数, 它的图形通过点 $(0, 1)$ 且关于 y 轴对称. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内它是单调减少的; 在区间 $(0, +\infty)$ 内它是单调增加的. $\operatorname{ch} 0 = 1$ 是这函数的最小值. 当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$, 在第二象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (图 1-9).

双曲正切的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是奇函数, 它的图形通过原点且关于原点对称, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的, 它的图形夹在水平直线 $y = 1$ 及 $y = -1$ 之间; 且当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近直线 $y = 1$, 而在第三象限内接近于直线 $y = -1$ (图 1-10).

双曲函数 $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ 的反函数依次记为: