Base · System · Key

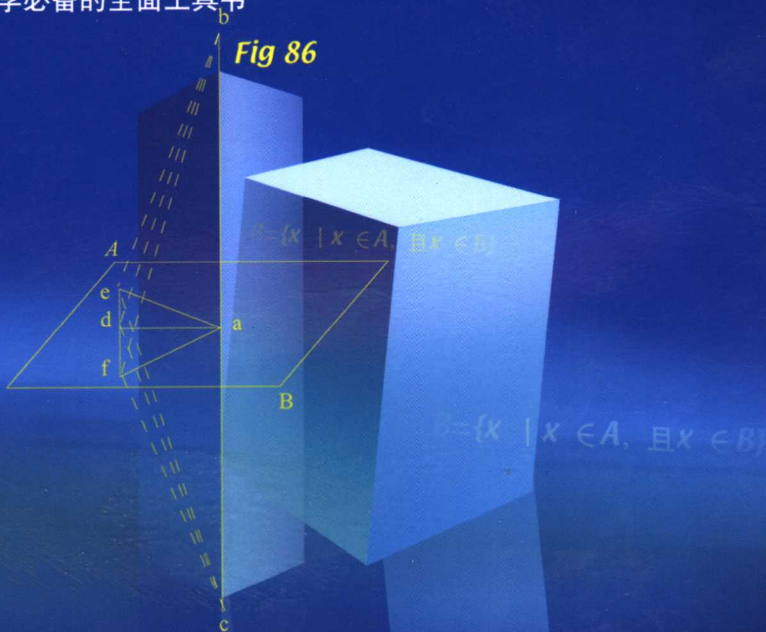
BSK

BSK高考命题研究组

超级数学专题题典

不等式

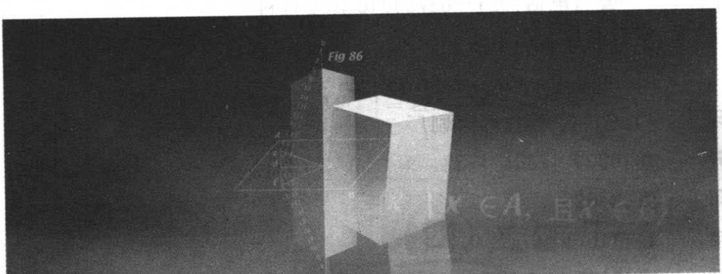
- 紧扣大纲 关注高考
- 学习数学必备的全面工具书



世界图书出版公司

高考命题研究组

超级
数学专题题典
不等式



世界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——不等式/BSK 高考命题研究组编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.2

ISBN 978-7-5062-5576-9

Ⅰ.超… Ⅱ.B… Ⅲ.不等式—高中—习题—升学参考资料

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 153794 号

超级数学专题题典——不等式

BSK 高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司

上海市尚文路 185 号 B 楼　　邮政编码 200010

公司电话:021－63783016 转发行科

(各地新华书店经销)

http://www.wpcsh.com.cn

印　　刷:北京京都六环印刷厂

开　　本:880×1230　1/32

印　　张:9.625

字　　数:115 千字

版　　次:2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5576-9/ G·64

定　　价:11.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:010－84498871)

前　言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《BSK 高中数学专题》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3)框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

(4)成书符合使用习惯

全书采用"知识点讲解"——"对应例题"——"另一个知识点讲解"——"对应例题"的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了"考频"概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

(5)自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

BSK 高考命题研究组

2006 年 9 月

目　录

第一篇　知识篇

本专题知识结构图

不等式	不等式	不等式的性质
		算术平均数与几何平均数
	不等式的证明	不等式的证明
		解不等式
		含有绝对值的不等式
	不等式的拓展	不等式的拓展
	不等式的应用	不等式的应用

第一章　不等式

本章知识结构图

不等式	不等式的性质	不等式的概念
		不等式的基本性质 ①$a>b\Leftrightarrow b<a$(对称性) ②$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性) ③$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$ ④$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$ ⑤$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$ ⑥$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$ ⑦$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ⑧$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0(n\in \mathbf{N})$
		比较法解不等式
		等号成立条件
		分类思想的应用
		重要结论的充分应用
	算术平均数与几何平均数	基本不等式 ①$a^2+b^2\geqslant 2ab$ ② 若 $a,b\in \mathbf{R}^+$ 则 $a+b\geqslant \sqrt{ab}$ ③$a^2+b^2+c^2\geqslant 3abc$ ④ 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in \mathbf{R}^+$ 则 $a_1,a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$
		不等式的最值问题
		不等式、三角函数和三角形的结合

第一节　不等式的性质

高考考点和趋势分析

不等式的性质是历年来高考的重点考查内容，单纯的不等式性质题和与函数单调性结合的小型综合题，以比较大小、判断不等式是否成立、确定条件与结论之间的充要关系等为具体内容的不等式性质题常出现在考试的选择题、填空题中，而在解答题中，

往往以渗透的形式出现.

目标 1:理解不等式的性质;

目标 2:能灵活运用作差法或作商法比较大小或证明不等式.

知识点讲解与应用

1. 不等式的概念(考频 4 次,其中,选择题 3 次,填空题 1 次,解答或证明题 0 次)

(1) 不等式的定义:用不等号($<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$) 表示不等关系的式子叫做不等式.

(2) 不等式的解集:使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$) 成立的 x 的集合叫做该不等式的解集.

(3) 同解不等式:若两个不等式的解集相等,则该两个不等式叫同解不等式.

(4) 不等式的同解变形:一个不等式变形为与它同解的不等式,这样的变形称为不等式的同解变形.

(5) 证明不等式:证明不等式成立的过程叫做证明不等式.

(6) 解不等式:求不等式的解集的过程叫做解不等式.

2. 不等式的基本性质(考频 20 次,其中,选择题 12 次,填空题 1 次,解答或证明题 7 次)

(1)$a>b \Leftrightarrow b<a$(对称性);

(2)$a>b, b>c \Rightarrow a>c$(传递性);

(3)$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$;

(4)$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$;

(5)$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$;

(6)$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;

(7)$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n>0(n \in \mathbf{N})$;

(8)$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0(n \in \mathbf{N})$.

以上 8 条性质是不等式变形的基本依据,形式上并不复杂,但请注意以下两点:

① 箭头的方向:8 条性质中有的箭头是双向的($\Leftrightarrow$) 有的是单向的($\Rightarrow$),单项的箭头尤其要注意第(2) 条和第(5) 条;

② 等号的取否:本书介绍的这 8 条性质中,不等号都是“$>$” 或“$<$”,但实际问题中“$\geqslant$” 或“$\leqslant$” 也是常见的,这就涉及到等号的取否. 比如:$a \geqslant b, b \geqslant c$ 可以推出 $a \geqslant c$,而 $a \geqslant b$, $b>c$ 则只能得到 $a>c$. 请读者自己思考下面两个问题:$a>b, c \geqslant 0 \Rightarrow$ ________,$a>b$, $c>d \geqslant 0 \Rightarrow$ ________.

例1 若 $a>b, c>d$,则下列不等关系中不一定成立的是________.

A. $a-d>b-c$　　B. $a+d>b+c$　　C. $a-c>b-c$　　D. $a-c<a-d$.

分析 由 $c>d$ 可知 $-d>-c$,又 $a>b$,故有 $a+(-d)>b+(-c)$,即 $a-d>b-c$,A 一定成立. 继续分析其余选项可得出结论.

解答 选 B.

点评 此题旨在考查对不等式第(3),(4) 条性质的理解程度.

例2 已知 $a>b>0, c<d<0$,求证 $\dfrac{b}{a-c}<\dfrac{a}{b-d}$.

分析 由于要证的结论中含有$a-c$和$b-d$,所以应考虑从已知条件出发推寻$a-c$和$b-d$的大小关系.

证明 由$c<d<0$有$-c>-d>0$,又$a>b>0$,$\therefore a-c>b-d$,$\therefore (a-c)(b-d)>0$,

$\therefore \dfrac{a}{b-d}>\dfrac{b}{a-c}$,$\therefore \dfrac{b}{a-c}<\dfrac{a}{b-d}$,证毕.

点评 由上面两题可以看出,在实际解题中,很少有直接运用8条基本性质就可以做出来的,往往要做一些变形,对于常用的变换,读者应熟记于心,例如:

$a>b>0\Rightarrow \dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}>0$,$a<b<0\Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}<0$,$\dfrac{a}{c^2}>\dfrac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$

总之,只有能在做题的过程中多思考,多总结,才能有真正的收获.

3. **比较法(考频1次,其中,选择题1次,填空题0次,解答或证明题0次)**

(1) 比较法的定义及理论依据

① 作差法:要证$a>b$(或$a=b$,或$a<b$),只要证明$a-b>0$(或$a-b=0$,或$a-b<0$),这种证明方法叫做作差法.其理论依据是实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系,即:$\begin{cases}a>b,\\a=b,\\a<b,\end{cases}$这等价于$\begin{cases}a-b>0,\\a-b=0,\\a-b<0.\end{cases}$

② 作商法:若a和b都是正数,则要证$a>b$(或$a=b$或$a<b$),只要证明$\dfrac{a}{b}>1$(或$\dfrac{a}{b}=1$或$\dfrac{a}{b}<1$),这种证明方法就叫做作商法.其理论依据是不等式的基本性质:$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$.因为若a,b都是正数,且$\dfrac{a}{b}>1$,则有$\dfrac{a}{b}\cdot b>1\cdot b$,即$a>b$,同理将“$>$”换作“$=$”或“$<$”亦成立.

(2) 比较法的适用场合

由这两种方法的定义可以看出,在比较两个多项式或对数时用作差法较好,而比较带有较大指数的项时,常用作商法,便于简化.

(3) 处理步骤

对于作差法,关键是对刚开始可能较复杂的式子“$a-b$”进行变形处理,使之变形为一个常数或平方和或几个因式相乘的形式等等.

对于作商法,关键是利用幂、指数的运算法则对商式“$\dfrac{a}{b}$”进行化简,直至可以判断出其与1的大小关系.

例3 已知正数a,b,c成等比数列,比较$a^2-b^2+c^2$与$(a-b+c)^2$的大小.

分析 此题要比较的是两个多项式的大小,应考虑采用作差法.

解答 $a^2-b^2+c^2-(a-b+c)^2$

$=a^2-b^2+c^2-a^2-b^2-c^2+2ab-2ac+2bc=2ab+2bc-2ac-2b^2$,

$\because b^2=ac$,$\therefore$ 原式$=2ab+2bc-4b^2=2b(a+c-2b)=2b(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2$,

$\because b>0$，$\therefore$ 原式 $\geqslant 0$，即 $a^2-b^2+c^2\geqslant(a-b+c)^2$.

点评 对于平方项一定要结合条件判断能否为 0，请看下例.

例4 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a-b\neq 0$，比较 a^5+b^5 与 $a^3b^2+a^2b^3$ 的大小.

分析 比较两个多项式，所以仍然采用作差法.

解答 $a^5+b^5-a^3b^2-a^2b^3=a^3(a^2-b^2)+b^3(b^2-a^2)$

$=(a^3-b^3)(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$

$\because a,b\in\mathbf{R}^+$，$\therefore(a+b)>0$，$a^2+ab+b^2>0$，而 $a-b\neq 0$，$\therefore(a-b)^2>0$，

$\therefore$ 原式 >0，$\therefore a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

点评 通过以上两例，希望读者能从中总结作差法解题的一般步骤.

例5 已知 $a>b>0$ 求证：$a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

分析 此题要证明的不等式中含幂、指数，故考虑用作商法.

证明 $\dfrac{a^ab^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=\dfrac{a^{\frac{a-b}{2}}}{b^{\frac{a-b}{2}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$，

$\because a>b>0$ $\therefore \dfrac{a}{b}>1$，$\dfrac{a-b}{2}>0$，由指数函数的性质可知 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$，

$\therefore a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

点评 最后的判断要结合指数函数的性质，这种方法往往要结合函数或者不等式的性质作出判断.

例6 若 $m+n>0$，求证 $mn(m+n)\leqslant m^3+n^3$.

分析 此题右边作因式分解后亦有 $m+n$ 项，所以可能有读者会考虑用作商法化简，但请注意条件中并未说明 $m,n\in\mathbf{R}^+$，故不满足使用作商法的条件，只能用作差法.

证明 $m^3+n^3-mn(m+n)$

$=(m+n)(m^2-mn+n^2)-mn(m+n)$

$=(m+n)(m-n)^2$，

$\because m+n>0$，$\therefore(m+n)(m-n)^2\geqslant 0$，

$\therefore mn(m+n)\leqslant m^3+n^3$.

点评 在用作商法解题时，必须检查是否具备“$a,b>0$”的条件.

基础练习题

1. 设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，那么 $2\alpha-\dfrac{\beta}{3}$ 的范围是________.

A. $(0,\frac{5}{6}\pi)$　　　　B. $(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$

C. $(0,\pi)$　　　　D. $(-\frac{\pi}{6},\pi)$

2. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是________.

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$

C. $|a|>|b|$ D. $|a|<|b|$

3. 如果 $a>b$ 那么下列不等式 ①$a^3>b^3$；② $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；③$2^a>2^b$；④$\lg a>\lg b$ 中恒成立的是________.

A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②③

4. 若 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则________.

A. $a^2>b^2$ B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$ D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

5. 若 $m<0$，$n>0$ 且 $m+n<0$，则下面的不等式中正确的是________.

A. $-n<m<n<-m$ B. $-n<m<-m<n$

C. $m<-n<n<-m$ D. $m<-n<-m<n$

6. 若 a 和 b 是实数，c 是有理数，满足下面________必有 $a^c>b^c$.

A. $a>b>0,c<0$ B. $a>b,c>0$

C. $b>a>0,c<0$ D. $b>a>0,c>0$

7. 比较下列各式的大小.

(1) $(x^2+7)(x^2+9)$ 与 x^4+63；

(2) $(a-1)^2$ 与 $(a+1)^2(a\neq 0)$；

(3) $(\frac{a}{\sqrt{6}}+1)^3$ 与 $(\frac{a}{\sqrt{6}}-1)^3(a\neq 0)$.

8. 判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1) $a>b\Rightarrow a-c>b-c$；

(2) $a>b,c>d\Leftrightarrow a+c>b+d$；

(3) $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$；

(4) $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$；

(5) $a>b>0\Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(6) $a>b,c>d\Leftrightarrow \frac{a}{d}<\frac{b}{c}$；

(7) $a^2>b^2\Leftrightarrow |a|>|b|$；

(8) $\sqrt{a}>\sqrt{b}(a>0,b>0)\Rightarrow a^2>b^2$.

9. 设 $0<x<1$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

(参考答案见 P122)

高屋建瓴

1. 在求某个数或某个式子的最值或取值范围时，务必注意等号能否成立..

例7 设 $f(x)=ax^2+bx$ 且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2, 2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $f(-2)$ 的范围.

分析 由已知条件很容易得到不等式组 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2\\2\leqslant a+b\leqslant 4,\end{cases}$ 并求出 a 和 b 的范围为：

$1.5\leqslant a\leqslant 3, 0\leqslant b\leqslant 1.5$，于是有的人就认为 $f(-2)=4a-2b$ 的最小值为 $41.5-21.5=3$，最大值为 $43-20=12$，故 $f(-2)$ 的范围为 $[3,12]$. 这种看似顺理成章的解法其实是错误的，当 a 取最小值 1.5 时，b 不能取最大值 1.5，所以 $f(-2)$ 的最小值是取不到 3 的；同理最大值也取不到 12. 此类题的正确解法如下：.

解答 由已知可得 $\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2,\\2\leqslant a+b\leqslant 4,\end{cases}$

设 $f(-2)=k_1f(-1)+k_2f(1)$，

所以有 $4a-2b=k_1(a-b)+k_2(a+b)=(k_1+k_2)a+(k_1-k_2)b$，

$\therefore k_1=3, k_2=1$，

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$，最小值为 $31+2=5$，最大值为 $31+4=10$，

故 $f(-2)$ 的范围是 $[5,10]$.

点评 在求最值时必须检验所求出来的值能否取到；上题采用了待定系数法来求 k_1 和 k_2，这种方法是处理不等式问题中关于取等号问题的重要方法.

2. **在判断两个带有变量的式子的大小时，有时需要对变量的值进行分类讨论. 分类讨论是重要的数学思想，其分类原则是“不重复、不遗漏”，下面通过例题来加以说明，帮助读者理解掌握.**

例8 已知 $a,b>0$，试判断 a^ab^b 和 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ 的大小关系.

分析 此题与例 5 的不同之处在于没有告知 a 和 b 之间的大小关系，因此在将商式化简后要对 a,b 的大小关系进行分类讨论.

解答 作商有 $\dfrac{a^ab^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=\dfrac{a^{\frac{a-b}{2}}}{b^{\frac{a-b}{2}}}=(\dfrac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}$，

(1) 若 $a>b$，则：$\dfrac{a}{b}>1, \dfrac{a-b}{2}>0 \therefore (\dfrac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}>1 \therefore a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$；

(2) 若 $a<b$，则：$\dfrac{a}{b}<1, \dfrac{a-b}{2}<0$，同样有 $(\dfrac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}>1 \therefore a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$；

(3) 若 $a=b$，明显 $a^ab^b=(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

综上所述，$a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

点评 本题将不确定的可能情况分成了三类：$a>b$、$a<b$、$a=b$，符合不重不漏的原则.

总结：做完此题后，应注意下面三个问题：

① 在什么情况下分类——在有某个数或式子的值，因为变量的范围不确定而无法确定，导致不能进一步地化简或判断时，往往需要对该变量进行分类讨论；

② 如何分类——分类的方法理论上说是有无穷多种，正确的方法应该是在分类后可以将原来不定的值确定下来以使我们可以做出需要的判断；

③ 不重不漏——在实际解题中，一般都能做到不重，却容易漏掉某些情况，尤其是相等的情况，所以请务必注意这一点.

例9 已知 $0<x<1$ 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$).

分析 要比较的式子含有对数,而且是同底,所以应考虑用作差法,但要作差就必须去掉绝对值,而要去掉绝对值,就要知道绝对值号里面的数的正负性,在题目给定条件下这是无法判断出来的,所以应考虑分类讨论.

解答 (1) 若 $0<a<1$,则:$\because 0<x<1$,$\therefore 1-x\in(0,1)$,$1+x\in(1,2)$,

$\therefore \log_a(1-x)>0$,$\log_a(1+x)<0$,

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$,

而 $1-x^2\in(0,1)$,故此时 $\log_a(1-x^2)>0$,

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

(2) 若 $a>1$,则 $|\log_a(1-x)|=-\log_a(1-x)$,$|\log_a(1+x)|=\log_a(1+x)$,

故 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x^2)>0$,

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$,综上所述,$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

点评 在分类讨论之后,对各种情况进行综合作最后的结论是必不可少的!.

例10 已知 $x>0$,$x\neq 1$,$a=\log_x 3x$,$b=2\log_x 2$,试比较 a 与 b 的大小.

分析 比较对数的大小,通常用作差法,且底数与1的大小关系不确定时应分类讨论.

解答 作差有 $a-b=\log_x 3x-2\log_x 2=\log_x \dfrac{3}{4}x$

(1) 当 $0<x<1$ 时:$0<\dfrac{3}{4}x<\dfrac{3}{4}<1$,故 $\log_x \dfrac{3}{4}x>0$,即 $a>b$;

(2) 当 $x>1$ 时:

① 若 $\dfrac{3}{4}x>1$,即 $x>\dfrac{4}{3}$ 时,$\log_x \dfrac{3}{4}x>0$,则 $a>b$;

② 若 $\dfrac{3}{4}x<1$,即 $x<\dfrac{4}{3}$ 时,$\log_x \dfrac{3}{4}x<0$,则 $a<b$;

③ 若 $\dfrac{3}{4}x=1$,即 $x=\dfrac{4}{3}$ 时,$\log_x \dfrac{3}{4}x=0$,则 $a=b$.

综上所述:当 $x=\dfrac{4}{3}$ 时,$a=b$,

当 $x\in(0,1)\cup(\dfrac{4}{3},+\infty)$ 时,$a>b$,

当 $x\in(1,\dfrac{4}{3})$ 时,$a<b$.

点评 本题进行了两次分类,第二次分类是在 $x>1$ 的前提下进行的,故 $a<b$ 的条件应是 $1<x<\dfrac{4}{3}$,切记不能误认为是 $0<x<\dfrac{4}{3}$.

例11 已知 $a>0$,$m>n>0$,比较 $a^m+\dfrac{1}{a^m}$ 和 $a^n+\dfrac{1}{a^n}$ 的大小.

分析 本题首先利用作差法,进行因式分解后需要讨论参数 a 的情况.

解答 $a^m+\dfrac{1}{a^m}-a^n-\dfrac{1}{a^n}=a^m-a^n+\dfrac{a^n-a^m}{a^{m+n}}=(a^m-a^n)(1-\dfrac{1}{a^{m+n}})$,

(1) 若 $0 < a < 1$，则：$a^m < a^n$ 且 $1-\frac{1}{a^{m+n}} < 0$，$(a^m-a^n)(1-\frac{1}{a^{m+n}}) > 0$；

(2) 若 $a=1$，则 $a^m=a^n=1$，$1-\frac{1}{a^{m+n}}=0$，所以 $(a^m-a^n)(1-\frac{1}{a^{m-n}})=0$；

(3) 若 $a>1$，则 $a^m>a^n$，$1-\frac{1}{a^{m+n}}>0$，所以 $(a^m-a^n)(1-\frac{1}{a^{m+n}})>0$.

综上所述：$a=1$ 时：$a^m+\frac{1}{a^m}=a^n+\frac{1}{a^n}$，

$a\neq 1$ 时：$a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$.

点评 此例并不像前两例那样从一开始就能看出要分类，而是在解题过程中发现 a 的取值对于判断差式的正负有影响，故进行分类. 所以掌握分类讨论的原理和目的才是正确掌握这种方法的关键.

3. **在解题中，对已知条件充分加以利用，或借用一些重要的结论往往是做题的关键，而且此类题有时并无规律可循，需要靠多做题来积累经验，培养感觉.**

例12 已知 $x^2-2xy+z^2=0$，$x>0$，$yz>x^2$，比较 x,y,z 的大小.

分析 首先通过 $x^2-2xy+z^2=0$ 的条件推出 $y=\frac{z^2+x^2}{2x}\geqslant z$，然后分析 $y=z$ 的情况，最后利用已经得到的结论和已知条件共同推出 $z>\frac{2xy}{y+z}>\frac{2xy}{2y}=x$.

解答 $\because x^2-2xy+z^2=0$，$\therefore (x-y)^2+z^2-y^2=0$，$\therefore y^2-z^2\geqslant 0$，

又 $y=\frac{z^2+x^2}{2x}$，$x>0$，所以 $y>0$，

又 $\because yz>x^2>0$，$\therefore z>0$，

$\therefore y\geqslant z$，假如 $y=z$，则由已知可得 $x=y$，与 $yz>x^2$ 矛盾，$\therefore y>z$；

而 $yz>x^2=2xy-z^2$，则 $z(y+z)>2xy$，

$\because y>z>0$，$\therefore z>\frac{2xy}{y+z}>\frac{2xy}{2y}=x$，

综上可知：$y>z>x$.

点评 本题在分析中进行讨论，并且不断去除不合理的情况，最后得到所求.

例13 已知 $a,b,c>0$，求证 $\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

分析 本题可以先同时乘以 $a+b+c$ 然后再作差比，也可直接移项通分作差比.

证明 左边 − 右边

$$=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}{a+b+c}$$

$$=\frac{(bc-ca)^2+(bc-ab)^2+(ac-ab)^2}{2(a+b+c)}\geqslant 0，$$

$\therefore$ 原不等式成立.

点评 此题利用了一个很重要的 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，这个式子本身比较简单，但在实际题目 a,b,c 中通常被其他的数或式子取代，以至于难以发现其原型.

例14　求证：$a^4+b^4+c^4 \geqslant (a+b+c)abc$.

分析　不等式左边是三个 4 次方的和，也可以看作是平方的和，而不等式右边有交叉项，和 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$ 的形式类似，故考虑利用该公式.

证明　$a^4+b^4+c^4$

$=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$

$\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$\geqslant ab \cdot bc+bc \cdot ca+ab \cdot ca$

$=(a+b+c)abc$，

证毕.

点评　本题连续两次利用了不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. 请读者思考两次套用公式时 a,b,c 分别等于什么.

例15　证明若 x,y,z 为一个三角形的三边，则 $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$ 也可以作为一个三角形的三边.

分析　此题等价于证明"若 $x+y>z$ 则 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{z}$（$x,y,z$ 均大于 0）"观察发现将要证不等式的两边平方后就与已知条件较为接近了，所以可以考虑这样的变形.

证明　由题意可知要证的结论为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，

只需证 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2>(\sqrt{z})^2$ 等价于 $x+2\sqrt{xy}+y>z$，

而 $x+y>z$，所以 $x+2\sqrt{xy}+y>z$ 显然成立，

所以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{z}$，证毕.

点评　本题证明时从结论出发逆向思考进行变形，向已知条件靠拢，其实是一种常用的证明方法——分析法，在"不等式的证明"一节中将详细介绍.

例16　已知 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$，且 $abc=1$，证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

分析　在含有"$abc=1$"、"$a+b+c=1$"这样一类的条件时，往往是消除变量化繁为简，但有时反其道而行之，"化简为繁"，却有想不到的收获.

证明　$\because abc=1$，$\therefore \sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{bc}}$，$\sqrt{b}=\frac{1}{\sqrt{bc}}$，$\sqrt{c}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$，

而由 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$ 可知：

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

点评　本题有两个关键，首先是 $abc=1$ 条件的利用，这里利用的方式为：$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{bc}}$，$\sqrt{b}=\frac{1}{\sqrt{ac}}$，$\sqrt{c}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$；然后就是特殊不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$，两者的合理结合有效地解决此题.