现代数学基础丛书 114

Adams谱序列和球面稳定同伦群

林金坤 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书在介绍上同调运算及其与 Eilenberg-Maclane 谱的上同调群的关系之后,引入了 Steenrod 代数并叙述它的两种基底,典则反自同构等.在阐述谱的同伦范畴之后介绍了一般的谱序列以及收敛到谱的同伦群的 Adams 谱序列并介绍它的 E_2 项 (Steenrod 代数的上同调)的计算过程和一些结果. Smith-Toda 谱 $V(n)$和 BP 谱作为 Steenrod 模的几何实现引入,然后介绍它的一些性质.在介绍广义 Adams 谱序列的基础上介绍了国内外有关球面稳定同伦群的研究概况,而最后是以编著者多年的研究成果为基础,叙述和证明了球面稳定同伦群一序列新元素族的存在性.

本书适合高等院校基础数学专业拓扑学及相关方向的研究生、教师及数学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

Adams 谱序列和球面稳定同伦群/林金坤 编著. —北京: 科学出版社, 2007

(现代数学基础丛书; 114)

ISBN 978-7-03-017642-4

I. A… II. 林… III. ①谱序列–研究 ②稳定同伦群–研究 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 078751 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 7 月第一次印刷 印张: 16
印数: 1—2 500 字数: 294 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈长虹〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

本书是在 1986 年 9～12 月南开大学数学研究所 “几何拓扑学术年会” 举办的讲座的讲稿的基础上编著而成的. 期间十多年也曾作为南开大学数学学院代数拓扑方向历届研究生的教材. 正如书的标题, 它的目的是使读者能认识和掌握上同调运算及谱序列等代数拓扑学的重要工具, 并迅速进入到球面稳定同伦群的科研前沿领域. 阅读本书它要求读者预先具备代数拓扑学的同调群和上同调群等同调论的基本知识以及同伦群和 CW 复形等同伦论的基本知识.

自从 1950 年 J.P.Serre 发现 n 维球面 S^n 的同伦群 $\pi_{n+r}S^n(r>0)$ 是有限群以来, 球面同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 的计算与确定成了代数拓扑学的核心课题之一. 近几十年来, 众多的代数拓扑学者前赴后继, 从这一核心课题发展出许多重要的工具和方法, 取得了许多成果. 但是, 到目前为止, 距离问题的全部解决还很遥远, 使这一核心课题成为经典难题之一. 早在 1940 年末, H. Freudenthal 发现了同伦双角锥定理, 揭示了球面同伦群具有稳定现象, 即当 $n\geqslant r+2$, n 维球面 S^n 的 $n+r$ 维同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 和 $n+1$ 维球面 S^{n+1} 的 $n+r+1$ 维同伦群 $\pi_{n+r+1}S^{n+1}$ 都是彼此同构的, 从而当 $n\geqslant r+2$, 可将这些彼此同构的同伦群 $\pi_{n+r}S^n$ 统称为球面稳定同伦群 π_r^s. 1960 年, J.F.Adams 发现了以空间的同调信息为 E_2 项并且收敛到空间的同伦群的谱序列, 成为空间的同伦群的有力的计算工具. 为了稳定同伦群的需要, J.F.Adams 等人还将拓扑空间范畴提升到以谱为对象的空间的稳定同伦范畴, 并且使代数拓扑的同调论和同伦论两个重要分支在稳定同伦范畴的广义同调论中得到了统一. 从此, 球面稳定同伦群的研究在更高的视野下更加蓬勃的发展起来. 除了以经典的 Adams 谱序列为工具, 后来还发展出以 BP 谱为基础的广义的 Adams-Novikov 谱序列等作为工具, 研究和发现球面稳定同伦群的新元素族. 近十多年来还兴起广义 L_2 局部化的球谱的同伦群的研究, 以此逼近球面稳定同伦群, 呈现其研究方式的多样化.

本书将着重介绍 Adams 谱序列的有关知识以及利用它作为工具来发觉球面稳定同伦群新元素族的研究概况和一些成果. 由于 Adams 谱序列实际上是一种高阶上同调运算, 因此本书以原初的上同调运算的讲述开篇. 第 1 章讲述上同调运算的一般概念、性质及其与 Eilenberg-Maclane 空间的上同调群的关系. 作为最重要的原初上同调运算之一, 讲述了 Steenrod 平方运算是如何构造出来的以及它与 Eilenberg-Maclane 空间的上同调代数 $H^*(K(G,n),Z_2)$ 的对应关系.

第 2 章讲述 Steenrod 代数, 它是作为 Steenrod 平方运算 Sq^i(当素数 $p=2$) 或者循环缩减幂 P^i(当 p 为奇素数) 在合成乘法及加法之下所构成的代数. 在介绍

Steenrod 代数 A 的构成的基础上, 讲述了 Steenrod 代数的第一种 Z_p 基底 —— 可许基底, 它的 Hopf 代数结构以及它的对偶代数 A^* 的结构. 以它的对偶代数 A^* 的 Z_p 基底为基础介绍了 Steenrod 代数的另一种 Z_p 基底 ——Milnor 基底及由此推演出的一些公式.

第 3 章包含了 Boardman 的稳定同伦范畴的一些构造. 从 CW 谱的构造开始, 讲述谱的映射及同伦等概念, 使得谱的范畴成为稳定同伦范畴, 并在这个范畴中讲述了以谱为基础的广义同调及广义上同调群, Ω 谱以及谱的上纤维序列, Eilenberg-Maclane 谱. 为后面讲述 Adams 谱序列的需要还介绍了连通有限型谱的 p 局部化的构造.

Adams 谱序列是本书的重点内容之一. 第 4 章从一般谱序列的概念讲起, 进而讲述谱的 Adams 分解以及以 Ext 群为 E_2 项而收敛到谱的同伦群的 Adams 谱序列. 最后介绍高阶上同调运算的概念和性质以及如何将 Adams 谱序列看成是一种高阶上同调运算.

Adams 谱序列的 E_2 项是谱的上同调群的 Ext 群, 它是谱的同伦群计算的基本依据. 因此 Ext 群的计算也成为球面稳定同伦群这一核心课题的一个重要方面. 第 5 章从 Bar 和 Cobar 构造的计算方法讲起, 介绍了 Liulevicius 有关 Steenrod 代数 A 的上同调 $H^{s,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{s,*}(Z_p, Z_p)$ 当 $s = 1, 2$ 的全部 Z_p 基底的得出过程, 列出了 T. Aikawa 所得出的三维的 Steenrod 代数上同调 $H^{3,*}(A) = \mathrm{Ext}_A^{3,*}(Z_p, Z_p)$ 的全部 Z_p 基底元素及其所满足的关系. 以上的 Z_p 基元的得出各有其特殊的方法, 第 5 章最后介绍 Steenrod 代数上同调的一般计算工具 ——May 谱序列以及 $\mathrm{Ext}_P^{*,*}(Z_p, Z_p)$ 的部分计算结果.

许多重要的谱是 Steenrod 代数上的模的几何实现. 第 6 章在介绍 Steenrod 代数上的模能有几何实现的一个充分条件的基础上, 讲述 Smith-Toda 谱 $V(n)$ 当 $n = 0, 1, 2, 3,\ p > 2n$ 的存在性的证明. 谱 $V(n)$ 是 Steenrod 代数 A 的外代数部分 $E_n = E(Q_0, Q_1, \cdots, Q_n)$ 的几何实现, 并且存在第 n 周期性映射 $\alpha^{(n)} : \Sigma^{2p^2-2}V(n-1) \to V(n-1)$ 使得 $V(n)$ 是它的上纤维. 除了谱 $V(n)$, 第 6 章还讲述了 Brown-Peterson 谱的存在性的原始证明. 第 6 章最后部分介绍 S.Oka 关于谱 $V_r(1)$(它是 $\alpha^r : \Sigma^{2r(p-1)}V(0) \to V(0)$ 的上纤维, $r \geqslant 1$) 是可交换可结合环谱的结果及其分裂环谱的性质等.

自从以谱为基础的广义同调论产生之后, 经典的 Adams 谱序列被推广到广义的 Adams 谱序列, 而其中以 BP 谱为基础的广义 Adams-Novikov 谱序列更得到广泛的应用. 第 7 章介绍任意平坦环谱为基础的广义 Adams 谱序列, 它以 $\mathrm{Ext}_{E_*E}^{s,t}(E_*(X), E_*(Y))$ 为 E_2 项而收敛到同伦群 $[X, Y]_{t-s}$. 当谱 E 是 Brown-Peterson 谱 BP 时, 它是应用更广泛的 Adams-Novikov 谱序列. 第 7 章最后介绍 Bruner 关于具有 Filtration 1 的映射 $h : Y \to \Sigma W$ 在广义 Adams 谱序列中由 E_2 项到 E_∞ 项保持收敛性的

结果.

以 Adams 谱序列以及广义的 Adams-Novikov 谱序列为工具发觉球面稳定同伦群新元素族是代数拓扑科研前沿的核心重要课题之一. 第 8 章不加证明地概要介绍 20 世纪 70 年代以来十多年间国外这方面的研究概况及取得的一些成果, 包括 J 同态和它的象, Adams-Novikov 谱序列的 E_2 项 $\mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{s,*}(BP_*, BP_*)$ 当 $s=1,2$ 时分别由 $\alpha_{tp^n/i,j}$ 元素族和 $\beta_{tp^n/i,j}$ 元素族所构成的结果以及球面稳定同伦群的 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 元素族, S.Oka 的 $\beta_{tp/j}$ 元素族, R.Cohen 的 h_0b_n 元素族等.

本书前 8 章是依据几十篇文献编写而成的, 每 1 章末尾附有相应的参考文献目录供读者查阅, 它可带领读者进入球面稳定同伦群的科研前沿领域. 第 9 章是以编著者近十几年来的研究成果为基础, 著述球面稳定同伦群一序列新元素族存在性的证明过程. 在第 9.1 节叙述与球谱 S 和 Smith-Toda 谱 $V(1)$ 密切相关的一些谱及其相应的上纤维序列的基础上, 第 9.2 节证明了对于 a_0 相关元素 $\sigma \in \mathrm{Ext}_A^{s,tq}(Z_p, Z_p)$ 与 $\sigma' \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq}(Z_p, Z_p)$, $h_0\sigma' \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+q}(Z_p, Z_p)$ 与 $i_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M, Z_p)$ 分别收敛到球谱 S 和 Moore 谱 M 的同伦群的非零元素. 这个一般结果只以二阶微分 $d_2(\sigma) = a_0\sigma'$ 及一些低维 Ext 群的生成元情况作为假设, 具有广泛的适用性, 能导出球面稳定同伦群的一序列 $h_0\sigma$ 元素族, 其中 σ 可有多种选择. 第 9.3 节证明了 $(i'i)_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*V(1), Z_p)$ 的收敛性导出 $(i'i)_*(g_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+2,tq+*}$ $(H^*V(1), Z_p)$ 的收敛性的一般结果, 而第 9.4 节是 $i_*(h_0\sigma) \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(H^*M, Z_p)$ 的收敛性可回拖而得到 $h_0\sigma \in \mathrm{Ext}_A^{s+1,tq+q}(Z_p, Z_p)$ 的收敛性的一般结果. 作为前四节一般结果的应用, 第 9.5 节证得球面稳定同伦群一序列新元素族, 计有 h_0h_n, h_0b_n, $h_0h_nh_m, h_0(h_nb_{m-1} - h_mb_{n-1})$ 元素族并猜想还可得 $h_0g_n, h_0k_n, h_0f_n, h_0f_n'$ 等元素族. 第 9.6 节叙述球面稳定同伦群一系列乘积元素族和新元素族 $h_0h_n\widetilde{\gamma}_s, h_0b_n\widetilde{\gamma}_s$, $h_0h_nh_m\widetilde{\gamma}_s, h_0(h_nb_{m-1} - h_mb_{n-1})\widetilde{\gamma}_s, g_0h_n\widetilde{\gamma}_s, g_0b_n\widetilde{\gamma}_s$ 等的大致证明过程. 前几节都是用经典的 Adams 谱序列为工具发觉出的球面稳定同伦群的新元素族. 第 9.7 节以 h_0b_n 元素族为几何输入, 以 Adams 谱序列和 Adams-Novikov 谱序列相结合作为工具, 证明了 $h_n \in \mathrm{Ext}_{BP_*BP}^{1,p^nq}(BP_*, BP_*V(1))$ 在 Adams-Novikov 谱序列的收敛性并且由此得出球面稳定同伦群的第三周期性 $\gamma_{p^n/j}(1 \leqslant j \leqslant p^n - 1)$ 元素族的收敛性. 第 9.8 节以 h_0h_n 元素族为几何输入, 通过在 Adams-Novikov 分解中的推演, 证明了球面稳定同伦群第二周期性元素族 $\beta_{tp^n/j}(1 \leqslant j \leqslant p^n - 1$ 当 $t \geqslant 1$; $1 \leqslant j \leqslant p^n$ 当 $t \geqslant 2)$ 在 Adams-Novikov 谱序列的收敛性.

除了 Smith-Toda 谱 $V(n)$(当 $n = 0,1,2,3, p > 2n$) 及 $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ 元素族以外, 第 9 章中所得出的球面稳定同伦群的一序列新元素族, 其证明不需要另外的已知元素族作为几何输入. 本书全书也基本上做到自包含, 以方便读者循序渐进地阅读, 了解并掌握球面稳定同伦群科研前沿领域的某些方法和结果.

本书的编著和出版得到各方面的支持和帮助. 感谢周学光先生的指导和南开大

学数学学院南开数学所提供的良好学术氛围，使编著者能在上同调运算和 Steenrod 代数的研究的基础上进入球面稳定同伦群的研究领域开展近二十年的研究. 感谢国家自然科学基金委员会自 1989 年至 2004 年为编著者提供的连续资助. 本书也是作为编著者主持的国家自然科学基金 2002 至 2004 年研究项目 “Toda 乘积和球面稳定同伦群”(批准号 10171049) 的成果之一. 本书的初稿曾在南开大学数学学院代数拓扑方向研究生中使用过. 感谢有关老师和研究生为本书提供的有益意见和校正. 由于编著者水平所限，书中的错误或不妥之处在所难免，请读者批评指正.

编著者

2006 年 11 月于南开大学

目　录

第 1 章　上同调运算

1.1　上同调运算的一般概念

粗略地讲, 上同调运算就是一种运算, 当它作用到空间的某些上同调类, 则产生另外一些上同调类. 简单的例子如加法：若 u, v 为 q 维上同调群 $H^q(X, G)$ 的两个元, 则有 $u + v \in H^q(X, G)$. 另外的例子还有卡积：若 $u \in H^p(X, G), v \in H^q(X, G')$, 则 $u \cup v \in H^{p+q}(X, G \otimes G')$. 群同态 $\eta: G \to G'$ 导出的上同调群同态 $\eta^*: H^q(X, G) \to H^q(X, G')$ 和联系于系数群短正合序列 $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ 的 Bockstein 同态 $\beta: H^q(X, G'') \to H^{q+1}(X, G')$ 也是这方面的例子. 以上都是初等的上同调运算.

更进一步的上同调运算是 Steenrod 的循环缩减幂

$$Sq^i: H^q(X, Z_2) \to H^{q+i}(X, Z_2)$$
$$P^i: H^q(X, Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X, Z_p)$$

其中 $p > 2$ 是素数, Z_p 为 mod p 整数加群. 与此相关联的还有 Pontrjagin 平方运算

$$B_2: H^q(X, Z_{2^k}) \to H^{2q}(X, Z_{2^{k+1}})$$

和由 Thomas[1] 得到的在奇素数 p 的推广

$$B_p: H^q(X, Z_{p^k}) \to H^{pq}(X, Z_{p^{k+1}})$$

我们将在 1.3 节中介绍 Sq^i 和 P^i 的构造及一些性质, 而 B_2 和 B_p 的构造则是类似的.

显然, 许多运算将可以由以上运算作各种不同的组合而得到, 例如 $B_p(P^i u \cup P^j(v + w))$ 是三个变量 u, v, w 的上同调运算. 因此, 我们称以上的运算为最基本的上同调运算.

定义 1.1.1　$(q, r; G, G')$ 型 (一个变量的) 上同调运算 T 是两个上同调函子之间的自然变换

$$T(X): H^q(X, G) \to H^r(X, G')$$

若对任意空间 X 和 $y_1, y_2 \in H^q(X, G), T(y_1 + y_2) = T(y_1) + T(y_2)$, 则称 T 为可加上同调运算. 次数 q 的稳定上同调运算$T = \{T^n\}$ 是一序列上同调运算 $T^n(X): H^n(X, G) \to H^{n+q}(X, G')$ 使 $T^{n+1} \cdot \sigma = \sigma \cdot T^n$, 其中 $\sigma: H^n(X, G) \to H^{n+1}(SX, G)$ 为双角锥同构.

以后我们将看到 Steenrod 平方运算 Sq^i 是次数 i 的稳定上同调运算.

定义 1.1.2　若固定 $k+1$ 个非负整数 $q_1, q_2, \cdots, q_k, r$ 和 $k+1$ 个系数群 $G_1, G_2, \cdots, G_k, G'$ 并且对每个空间 X 和元 $u_i \in H^{q_i}(X, G_i)\,(i=1,2,\cdots,k)$, T 对应一个元 $T(u_1, u_2, \cdots, u_k) \in H^r(X, G')$ 而且对任一映射 $f\colon Y \to X$, 有

$$f^*T(u_1, u_2, \cdots, u_k) = T(f^*u_1, \cdots, f^*u_k)$$

则称 T 是 k 个变量的 $(q_1, \cdots, q_k, r; G_1, \cdots, G_k, G')$ 型上同调运算. 以上定义的 T 实际上是函子 $H^{q_i}(-, G_i)$ 的笛卡儿乘积到函子 $H^r(-, G')$ 的自然变换.

卡积是两个变量的上同调运算的例子, 它是双线性的, 即是可加的. 加法也是两个变量的上同调运算, 但不是双线性的, 即不是可加的.

定义 1.1.3　若 T 是如上所述的 k 个变量上同调运算, T_1 是 l 个变量上同调运算使其取值函子为 $H^{q_1}(-, G_1)$, 则

$$T(T_1(v_1, \cdots, v_l), u_2, \cdots, u_k)$$

称为 T 与 T_1 的合成. 可见上同调运算的合成是以自然的方式定义的.

定义 1.1.4　若 T 是如上所述的 k 个变量上同调运算, 而且 $q_1 = q_2$, $G_1 = G_2$, 则由以下方式得到的 $k-1$ 个变量上同调运算

$$T'(u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}) = T(u_1, u_1, u_2, \cdots, u_{k-1})$$

叫做 T 的限制.

定义 1.1.5　一族上同调运算叫做生成所有运算, 若任意上同调运算都可由族中上同调运算经过有限次合成和限制而得到. 族中的上同调运算就称为生成元.

我们将在 1.5 节分别对不同的 q, r, G, G' 确定所有 $(q, r;\ G, G')$ 型上同调运算 $O(q, r; G, G')$ 的生成元.

1.2　Eilenberg-Maclane 空间和上同调运算

定义 1.2.1　已给整数 $n \geqslant 0$ 和 Abel 群 G, CW 复形 $K(G, n)$ 叫做 (G, n) 型的 Eilenberg-Maclane 空间, 如果

$$\pi_r(K(G,n)) = \begin{cases} G, & \text{当 } r = n \\ 0, & \text{当 } r \neq n \end{cases}$$

对 $n = 1$, G 可以是非 Abel 群. 对 $n = 0$, 因为 $\pi_0(K(G,n))$ 和 G 一一对应, 因此可以看成 $K(G,n) = G$ 具有离散拓扑.

定理 1.2.2　(a) 对 $n \geqslant 1$ 和 Abel 群 G, CW 复形 $K(G,n)$ 存在 (当 $n = 1$, G 可以是非 Abel 群).

(b) 若 $\phi: G \to H$ 为群同构, W 为空间使 $\pi_r(W) = H$ (当 $r = n$), $\pi_r(W) = 0$ (当 $r > n$), 则存在映射 $f: K(G,n) \to W$ 使 $f_*: \pi_n(K(G,n)) \to \pi_n(W)$ 为同构.

证 (a) 因为 $G = F/R$, F 为自由群, R 为子群, 令 $X = \bigvee\limits_{\alpha} S_\alpha^n$, 对 F 的每个生成元 α, 对应 X 中一个 S_α^n. 设 $i_\alpha: S_\alpha^n \to X$ 为内射, 作 $\theta: F \to \pi_n(X)$ 使 $\theta(\alpha) = [i_\alpha]$, 则 θ 为同构. 因为 R 也是自由群, 对 R 的每个生成元 γ, 令 $\phi_\gamma^n: S_\gamma^n \to X$ 为 $\theta(\gamma)$ 的代表, 令 $Y_{n+1} = X \cup_{\phi_\gamma^n} CS_\gamma^n$, 其中用 ϕ_γ^n 粘贴 $n+1$ 维胞腔 CS_γ^n 是对每个生成元 $\gamma \in R$. 因此 Y_{n+1} 是 CW 复形, 而且当 $0 < r < n$, $\pi_r(Y_{n+1}) = 0$, 这是因为 Y_{n+1} 没有 $0 < r < n$ 维胞腔. 考虑以下恰当序列图形

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(Y_{n+1}, X) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "p_*", "\cong"'] & \pi_n(X) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(Y_{n+1}) \arrow[r] & \pi_n(Y_{n+1}, X) \\
\pi_{n+1}(Y_{n+1}/X) \arrow[d, "\cong"'] & & & \\
\pi_{n+1}(\bigvee\limits_{\gamma} S_\gamma^{n+1}) \arrow[d, "\cong"'] & & & \\
R \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[uuu, "\theta"'] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 $\partial_*[g_\gamma^{n+1}] = [\phi_\gamma^n]$, 其中 $g_\gamma^{n+1}: (E^{n+1}, S^n) \to (Y_{n+1}, X)$ 为 $n+1$ 维胞腔 CS_γ^n 的特征映射, 因此上述图形可换, 从而 $\pi_n(Y_{n+1}) \cong G$(注意到 (Y_{n+1}, X) 是连通的).

下面将 Y_{n+1} 再粘贴更高维的胞腔以便消掉 $\pi_m(Y_{n+1})$ 的非零元素. 设当 $m \geqslant n+1$ 时, 已有 CW 复形 $Y_m \supset Y_{n+1}$, 使 $\pi_n(Y_{n+1}) \cong \pi_n(Y_m) \cong G$, $\pi_r(Y_m) = 0$ $(n < r < m)$. 设 $\pi_m(Y_m)$ 的生成元组为 $\{\beta\}_{\beta \in B}$, 令 $\phi_\beta^m: S_\beta^m \to Y_m$ 为 β 的代表, 作 $Y_{m+1} = Y_m \cup_{\phi_\beta^m} CS_\beta^m$ (对每个生成元 β), 有恰当序列

$$\cdots \to \pi_{m+1}(Y_{m+1}, Y_m) \xrightarrow{\partial_*} \pi_m(Y_m) \xrightarrow{i_*} \pi_m(Y_{m+1}) \to \pi_m(Y_{m+1}, Y_m) = 0$$

因为 $\partial_*[f_\beta^{m+1}] = [\phi_\beta^m]$, 其中 $f_\beta^{m+1}: (E^{m+1}, S^m) \to (Y_{m+1}, Y_m)$ 为 $m+1$ 维胞腔 CS_β^m 的特征映射, 因此 ∂_* 满, 从而 $\pi_m(Y_{m+1}) = 0$. 类似地可以证明 $0 = \pi_r(Y_m) \cong \pi_r(Y_{m+1})$ (当 $n < r < m$), 完成了归纳法. 令 $Y = \bigcup\limits_{m \geqslant n+1} Y_m$, 具有弱拓扑, 则

$$\pi_r(Y) \cong \pi_r(Y_{r+1}) = \begin{cases} G, & 当\ r = n \\ 0, & 当 r \neq n \end{cases}$$

(b) 记 $Y = K(G,n)$ 如上所构造. 因此 Y 的 n 维架 $Y^n = \bigvee\limits_{\alpha} S_\alpha^n$, 内射 $i_\alpha S_\alpha^n \to Y^n \subset Y$ 的同伦类 $[i_\alpha]$ 是 G 的生成元, 令 $f_\alpha^n: S_\alpha^n \to W$ 为 $\phi[i_\alpha]$ 的代表, 定义 $f: Y^n \to W$ 为 $f|_{S_\alpha^n} = f_\alpha^n$, 则以下图形可换:

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(Y,Y^n) \arrow[r] & \pi_n(Y^n) \arrow[r] \arrow[dd, "(f|_{Y^n})_*"] & \pi_n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
 & & G \arrow[d, "\phi"] & \\
 & \pi_n(W) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H &
\end{tikzcd}
$$

设 $f: Y^m \to W$ $(m \geqslant n+1)$ 已构造, 使 $(f|_{Y^m})_* = \phi$ 如上图. 若 $h: S^m \to Y^m$ 为 Y 的 $m+1$ 维胞腔 e^{m+1} 的特征映射, 则 $(f|_{Y^m})_*[h] \in \pi_m(W) = 0$, f 可扩张到 $m+1$ 维胞腔 e^{m+1}, 从而可扩张到 Y^{m+1}, 使 $(f|_{Y^{m+1}})_* = \phi: \pi_n(Y^{m+1}) \to \pi_n(W)$. 因此, 类似于 (a) 中的作法, 存在映射 $f: Y \to W$ 使 $f_* = \phi: \pi_n(Y) \to \pi_n(W)$. 证毕.

注 由以上证明可以得出 $K(G,n)$ 在同伦等价意义下唯一. E-M 空间的例子有 $K(Z,1) = S^1$; $K(Z_2,1) = RP^\infty$, 实无穷维射影空间; $K(Z,2) = CP^\infty$, 复无穷维射影空间; $K(Z_m,1) = L^\infty(m)$, 无穷维透镜空间.

推论 1.2.3 存在弱同伦等价 $\epsilon_n': K(G,n) \to \Omega K(G,n+1)$.

证 由文献 [3]

$$
\pi_r(\Omega K(G,n+1)) \cong \pi_{r+1}(K(G,n+1)) = \begin{cases} G, & \text{当 } r = n \\ 0, & \text{当 } r \neq n \end{cases}
$$

因此由定理 1.2.2 (b), 存在映射 $\epsilon_n': K(G,n) \to \Omega K(G,n+1)$ 使 ϵ_n' 导出同伦群之间的同构. 证毕.

引理 1.2.4 若 X 为 CW 复形, $f: X \to Y$ 为弱同伦等价而 Y 为 H 空间, 则存在 X 的 H 空间结构使 f 为 H 映射. 更进一步, 若 Y 是 H 群, 则 X 也是 H 群.

证 $X \times X$ 也是 CW 复形. 设 $\mu: Y \times Y \to Y$ 为 Y 的 H 空间乘法, 则 $[\mu(f \times f)] \in [X \times X, Y]$. 由 Whitehead 定理, 弱同伦等价 f 导出一一对应

$$
f_*: [X \times X, X] \to [X \times X, Y]
$$

因此存在映射 $\lambda: X \times X \to X$ 使 $f\lambda \simeq \mu(f \times f)$. 若 $i_\alpha: X \to X \times X$ 为内射 $(\alpha = 1,2)$, 则

$$
f\lambda i_\alpha \simeq \mu(f \times f)i_\alpha = \mu i_\alpha f \simeq f
$$

从而 $\lambda i_\alpha \simeq 1$, $\lambda: X \times X \to X$ 是 H 空间乘法. 更进一步, 若 Y 是 H 群, 可证 λ 满足相应条件使得 X 是 H 群. 证毕.

定理 1.2.5 $K(G,n)$ 有 H 空间结构, 且对任一 CW 复形 X, $[X; K(G,n)]$ 是群, 而且是 Abel 群.

证 由推论 1.2.3 和引理 1.2.4 得出 $K(G,n)$ 有 H 空间结构, 且有弱同伦等价 $\Omega\epsilon_{n+1}' \cdot \epsilon_n': K(G,n) \to \Omega^2 K(G,n+2)$, 因此 $[X; K(G,n)] \cong [X, \Omega^2 K(G,n+2)]$ 是 Abel 群 (见文献 [3]).

定理 1.2.6 对任意 CW 复形 X, 存在同构

$$\phi\colon [X;K(G,n)] \cong H^n(X,G)$$

其中 $\phi[f] = f^*(u_n)$, $u_n \in H^n(K(G,n),G)$ 为唯一生成元, 它对应于 Hurewicz 同构 $\Phi_n : \pi_n(K(G,n)) \to H_n(K(G,n))$ 的逆, 称为基本上同调类.

证 因为 $K(G,n)$ 是 H 空间, 因此是 m 单式, 对所有 $m \geqslant 1$, 从而 $[X,x_0;K(G,n),*] \cong [X,K(G,n)]$ (见文献 [3] 定理 7.2.6~7.2.7), 而且当 $n \geqslant 1$, $H^n(X,G) = \widetilde{H}^n(X,G)$, 因此下面只需证明 $\phi\colon [X,x_0;K(G,n),*] \cong \tilde{H}^n(X,G)$. 设 $X = S^r\ (r \geqslant 1)$, 则以上同构显然成立, 因此对 $X = \bigvee\limits_{\alpha} S^r_\alpha$ 也成立. 因为 X 的 1 维架 $X^1 = \bigvee S^1_\alpha$, 因此对 X^1 成立, 不妨设已对 X^{r-1} 成立, 考虑以下恰当序列的可换图形 (记 $K(G,n) = K$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & {[X^{r-1},K]} \arrow[l] \arrow[dd, equal] & {[X^r,K]} \arrow[l] \arrow[dd, equal] & {[X^r/X^{r-1},K]} \arrow[l] \arrow[dd, equal] & {[SX^{r-1},K]} \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
 & & & & {[X^{r-1},\Omega K]} \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[d, "\cong", "\phi"'] & {[X^{r-1},K]} \arrow[l] \arrow[d, "\cong", "\phi"'] & {[X^r,K]} \arrow[l] \arrow[d, "\phi"] & {[\bigvee S^r_\alpha,K]} \arrow[l] \arrow[d, "\cong", "\phi"'] & {[X^{r-1},K(G,n-1)]} \arrow[l] \arrow[d, "\cong", "\phi"'] \\
\cdots & H^n(X^{r-1},G) \arrow[l] & H^n(X^r,G) \arrow[l] & H^n(\bigvee S^r_\alpha,G) \arrow[l] & H^{n-1}(X^{r-1},G) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

其中上横行为 $X^{r-1} \xrightarrow{i} X^r \to X^r \cup_i CX^{r-1} \simeq X^r/X^{r-1}$ 导出的 Puppe 恰当序列 (见文献 [3]), 而下横行为 (X^r, X^{r-1}) 的系数群为 G 的上同调群恰当序列. 由五项引理, ϕ 对 X^r 是同构. 若 X 是无限维 CW 复形, 因为 $H^n(X,G)$ 只和 X^{n+1} 有关, 而任映射 $f\colon X^{n+1} \to K$ 总可以扩张到 X(见定理 1.2.2(b)), 因此 ϕ 对 X 也是同构. 证毕.

定理 1.2.7 对应 $T \mapsto Tu_q$ 定义了所有 $O(q,r;G,G')$ 型上同调运算和 $H^r(K(G,q),G')$ 的同构.

证 先考虑 CW 复形的范畴. 记 $Y = K(G,q)$, 对任意 $w \in H^r(Y,G')$ 和任意 CW 复形 X, $v \in H^q(X,G)$, 由定理 1.2.6, 存在映射 $f\colon X \to Y$ 使 $f^*u_q = v$, 定义上同调运算 $T\colon H^q(X,G) \to H^r(X,G')$, 使 $Tv = f^*w$. 若 $g\colon X' \to X$ 为映射, 则 $fg\colon X' \to Y$ 使 $(fg)^*u_q = g^*v$, 因此

$$Tg^*v = (fg)^*w = g^*f^*w = g^*Tv$$

从而 $T \in O(g,r;G,G')$, 而通过选择 $v = u_q$, $f = 1$, 可知 $Tu_q = w$, 从而对应 $T \mapsto Tu_q$ 是满的. 若 $T, T' \in O(q,r;G,G')$ 使 $Tu_q = T'u_q$, 如同上述, $f\colon X \to Y$ 为映射使 $f^*u_q = v \in H^q(X,G)$, 则

$$Tv = Tf^*u_q = f^*Tu_q = f^*T'u_q = T'f^*u_q = T'v$$

从而 $T = T'$, 对应是单的.

若 X 是任意拓扑空间, 利用 J.B. Giever[4] 的结果, X 的奇异复形 $S(X)$ 有几何

实现 $P(X)$, 即存在单纯复形 $P(X)$ 使 $H^q(P(X),G)$ 自然同构于 $H^q(S(X),G)$, 因此定理得证. 证毕.

以上关于一个变量的上同调运算的结果, 可直接推广到 k 个变量的情况. 设 $Y_i = K(G_i,q_i)\,(i=1,2,\cdots,k)$, $Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_k$, $\phi_i\colon Y\to Y_i$ 为投射, $u_i\in H^{q_i}(Y_i,G_i)$ 为基本上同调类.

定理 1.2.8　由 $T\in O(q_1,q_2,\cdots,q_k,r;G_1,\cdots,G_k,G')$ 到 $T(\phi_1^*u_1,\phi_2^*u_2,\cdots,\phi_k^*u_k)\in H^r(Y,G')$ 的对应定义了 $O(q_1,q_2,\cdots,q_k,r;G_1,\cdots,G_k,G')$ 与 $H^r(Y,G')$ 之间的同构.

证　设 X 为 CW 复形, $v_i\in H^{q_i}(X,G_i)$, 则存在映射 $f_i\colon X\to Y_i$, 使 $f^*u_i=v_i$, 令 $f\colon X\to Y$ 为映射使 $\phi_i f=f_i$. 设 $T,T'\in O$ 使

$$T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=T'(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)$$

则

$$\begin{aligned}T(v_1,\cdots,v_k)&=T(f_1^*u_1,\cdots,f_k^*u_k)\\&=T(f^*\phi_1^*u_1,\cdots,f^*\phi_k^*u_k)=f^*T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)\\&=f^*T'(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=T'(v_1,\cdots,v_k)\end{aligned}$$

即 $T=T'$, 对应是单的. 另外, 任意 $w\in H^r(Y,G')$, 则可定义 $T(v_1,\cdots,v_k)=f^*w$, 从而有 $T(\phi_1^*u_1,\cdots,\phi_k^*u_k)=w$, 对应是满的. 然后再由 CW 复形的范畴推广到拓扑空间的范畴. 证毕.

1.3　Steenrod 平方运算 Sq^i 的构造

本节中我们将给出重要的上同调运算 —— Steenrod 平方运算 Sq^i 的构造. 这是稳定上同调运算. 以下是本节主要定理.

定理 1.3.1　存在上同调运算

$$Sq^i\colon H^n(X,A,Z_2)\to H^{n+i}(X,A,Z_2)\qquad (n\geqslant 0)$$

满足:

(a) $Sq^0=1$.

(b) Sq^1 是联系于系数群的恰当序列 $0\to Z_2\to Z_4\to Z_2\to 0$ 的 Bockstein 同态.

(c) 若 $x\in H^n(X,A,Z_2)$, 则 $Sq^nx=x^2$, 其中 x^2 指的是卡积 $x\cup x$.

(d) 若 $x\in H^n(X,A,Z_2)$, 则

$$Sq^ix=0,\qquad 当\ i>n$$

(e) $\delta Sq^i = Sq^i\delta$, 其中 $\delta: H^{n-1}(A, Z_2) \to H^n(X, A, Z_2)$ 为空间偶 (X, A) 上同调恰当序列的连接同态.

(f) Cantan 公式

$$Sq^i(xy) = \sum_{j+k=i}(Sq^j x)(Sq^k y)$$

(g) Adem 关系

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[\frac{a}{2}]}\binom{b-1-j}{a-2j}Sq^{a+b-j}Sq^j, \qquad \text{当 } 0 < a < 2b$$

$Sq^i x$ 实质上是缩减幂 $x \cup_i x$, 使当 $i = n$ 时 $x \cup_i x = x \cup x = x^2$, 我们将先在上链群中来构造缩减卡积 $c \cup_i d$, 然后再过渡到上同调类. 我们将用到同调论中都有叙述的零调模型定理1.3.3.

定义 1.3.2 设 $\mathcal{T}$ 为拓扑空间范畴, $\mathcal{C}$ 为链复形范畴. $M = \{\Delta_n, n \geqslant 0\}$, 其中 Δ_n 是 n 维标准单形, M 称为模型. $F, G: \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ 为两个函子, G 称为在模型 M 上零调, 若对任意拓扑空间 $X \in \mathcal{T}$, $H_n(G(X)) = 0\,(n > 0)$. F 称为在模型 M 上自由, 若对 $X \in \mathcal{T}$,

$$\Big\{F(f)(\delta_n) \in F(X)\,|\, \text{所有 } f: \Delta_n \to X,\ n \geqslant 0\Big\}$$

是 $F(X)$ 的基, 其中 $\delta_n \in F(\Delta_n)$, 而 $F(f): F(\Delta_n) \to F(X)$ 是由映射 $f: \Delta_n \to X$ 导出的链映射.

定理 1.3.3(零调模型定理) 设 $F, G: \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ 为两个函子使 G 在模型 M 零调, F 在 M 上自由, 则对任 $X \in \mathcal{T}$ 和给定的自然同态 $\phi: H_0(F(X)) \to H_0(G(X))$, 存在自然链映射 $\phi_\#: F(X) \to G(X)$ 使下图可换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to F_2(X) & \xrightarrow{\partial} & F_1(X) & \to & F_0(X) & \to & H_0(F(X)) \\
\downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi \\
\to G_2(X) & \xrightarrow{\partial} & G_1(X) & \to & G_0(X) & \to & H_0(G(X))
\end{array}$$

而且 $\phi_\#$ 在链同伦意义下唯一.

设 X 为拓扑空间, $S_*(X) = \bigcup\limits_n S_n(X)$ 为 X 的奇异复形, 即 $S_n(X) = \Big\{$所有映射 $f: \Delta_n \to X\}$ 生成的自由 Abel 群, 并且有微分 $d: S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ 使 $d^2 = 0$. 设 $T: S_*(X) \otimes S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$ 定义为 $T(x \otimes y) = (-1)^{|x|\cdot|y|}(y \otimes x)$, 叫做交换同态.

命题 1.3.4 存在次数 $j, j \geqslant 0$ 的自然同态 $D_j: S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$ 使

(1) D_0 是链映射, 且导出对角同态 $H_0(X) \to H_0(X) \otimes H_0(X)$.