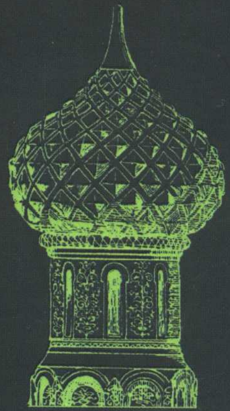


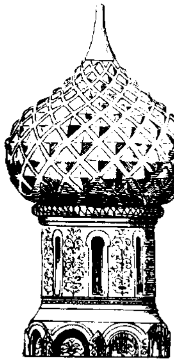
俄罗斯数学
教材选译

代数学引论（第二卷）

线性代数（第3版）

□ А. И. 柯斯特利金 著
□ 牛凤文 译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

代数学引论 (第二卷)

线性代数 (第3版)

□ А. И. 柯斯特利金 著
□ 牛凤文 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2005-5733 号

А. И. Кострикин

Введение b алгебру. Часть II. Линейная алгебра, 2004

Originally published in Russian under the title
Introduction to Algebra
Part II: Linear Algebra by A. I. Kostrikin

图书在版编目（CIP）数据

代数学引论. 第 2 卷，线性代数：第 3 版 / （俄罗斯）柯斯特利金著；牛凤文译. —北京：高等教育出版社，2008.1

（俄罗斯数学教材选译）

ISBN 978-7-04-021491-8

Ⅰ. 代… Ⅱ. ①柯…②牛… Ⅲ. ①代数-高等学校-教材 ②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 154118 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 郝 林
版式设计 王 莹 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1 092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	21.5	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	430 000	**定　　价**	44.10 元

物料号　21491－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

“线性代数学既是一个古老的同时
又是一个全新的数学分支.”

H. 布尔巴基

序　言

本书是整个《代数学引论》教程的第二卷(简记为[BA Ⅱ]), 它的目的在于系统地阐述数学的一个重要分支——线性代数学的基础, 尽管在本教程的第一卷中我们对其已有所触及. 因为代数理论的观点和几何理论的观点同等重要, 因此, 线性代数学和几何学这一对典型的“孪生姐妹”将会以同样的身份呈现出来. 在平面和三维空间的解析几何教程中已经知道了很多对于两个或者三个变元的代数关系式的几何解释. 重要的是, 线性代数依据几何直观支撑的术语和概念适用于任意维数n的n维空间.

“线性代数与分析”, “线性代数与微分方程”以及其他更多在大学教程中使用的术语反映出这样一个事实, 线性的概念是数学中最为普及的概念之一, 或者, 更广泛地说, 它是整个自然科学中最基本的概念之一. 把问题分成线性的和非线性的并不是要满足数学家们的特殊癖好, 而是在更广泛意义上理解的线性代数力所不及的地方, 我们的直观的相对弱点所造成的, 这一点我们已经完全认识清楚了.

在20世纪初就已经完全发育成型的线性代数体系在不同的方向上继续得到发展且日臻完美. 与此同时, 它的依赖于极限过程的无穷维部分, 本质上说, 走向了泛函分析, 而计算部分, 特别是与实际使用电子计算机的可能性相关的部分, 变成了独立的科学的研究对象. 现在提供的这本书不可能充当面面俱到的线性代数手册, 这不仅仅是因为它不能包括上面提到的两个方向, 而首先是因为它对应用的阐述不够充分(尽管这最后一章可以称为是应用). 在这方面, 列在补充文献清单中的[2]包含了

丰富得多的想象力, 令人沉思的动议, 并且还有线性代数概念的量子力学解释. 可以把该书推荐给所有想要向标准教程范围以外涉猎的读者. 而现在这本书最多只能容纳[2]中的一些片断. 我们的打算和希望可以归结为, 读者(首先是一年级大学生)详细地研读了教科书内容(在一个学期内每周四个小时上课, 四个小时练习), 其后再以两书的补充章节为家庭读物, 能在线性代数领域培养出现代数学思想.

不言而喻, 为了理解本教科书的课文只需要很好地掌握第一卷(简记为[BA Ⅰ]), 也就是第一个学期的学习内容. 这两卷中的术语和表达是完全一致的, 而所有新引进的东西都做了特别的解释, 顺便说一句, 第p章§q的习题r在课文中总是简单地表达成习题p. q. r. 不同于[BA Ⅰ, BA Ⅲ], 用专门篇幅单列的习题提示与答案读者最好到万不得已时再去光顾它.

作者清楚地认识到, 把教学参考书[2]"变得通俗化", 特别是强行改变其固有的格调是一次极其徒劳无益的任务. 现在(却)这样阐述了, 仅有的可辩解的理由是作为大学生质疑的回应, 这种适应早就准备好了, 而仅仅由外部原因大大延迟未能实现罢了.

补充文献

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч.I. Основы алгебры. —2-е изд.—М.: Наука, 1994.—318 с.

即本教科之第一卷, 张英伯译, 高等教育出版社出版.

2. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия.—М.: Наука, 1986. —304 с.

3. Сборник задач по алгебре/Под ред. А.И.Кострикина. —М.: Факториал, 1995.—456 с.

4. *Гельфанд И.М.*Лекции по линейной алгебре. —5-е изд.—М.: Наука, 1998. —272 с.

中译本: И.М. 盖尔冯德. 一次代数学. 第二版(1950). 刘亦珩译. 商务印书馆, 1953年.

И. М. 盖尔冯德. 线性代数学, 刘亦珩译. 高等教育出版社. 1957年.

5. *Мальчев А.И.*Основы линейной алгебры. —М.: Наука, 1956. —340 с.

中译本: А.И. 马力茨夫. 线性代数基础. 第二版(1956). 柯召译. 高等教育出版社, 1959年.

6. *Халмош П.Р.* Конечномерные векторные пространства.—М.: Мир, 1970.—264 с.

7. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. —М.: Мир, 1970. —284 с.

8. *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. —М.: Наука, 1956.—304 с.

中译本: Г.Е.希洛夫. 线性空间引论, 周学光等译. 高等教育出版社, 1957.

9. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* В ычислительные методы линейной алгебры. —М.: Наука, 1963.

10. *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения.—М.:Мир,1980.—454 с.

11. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. —М.: Наука, 1991.

12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. —М.: Наука, 1976. —368 с.

13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. —М.: Наука, 1967.

中译本: Ф.Р. 甘特马尔赫. 矩阵论. 1953年版. 上下卷. 柯召译. 高等教育出版社, 1955年.

14. *Ланкастер П.* Теория матриц. —М.: Наука, 1978.

15. *Huppert B.* Angewandte Lineare Algebra. —Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1990.—646 p.

目　　录

第1章　空间与形式

也许未必值得指出，没有经过开发的森林不同于有人侍弄的公园或者人工栽培的井然有序的树林. 在所有这些差别中又含有那么多的相同之处，以至于在不能品尝蘑菇味道，不能欣赏修剪过的草坪的魅力的外星人看来，林区就是连成一片的，长满草木的，充满各种不同高度和形状的山体，而我们却称之为大森林. 如果把本书的这一章与[BA Ⅰ]中讲述坐标向量空间的第2章相比较，就会发生类似的事情. 抽象线性空间是用公理化方法引进的，它的元素被称为向量，正因如此，也经常称它为向量空间. 相应的公理系统，本质上仍然是G. 佩亚诺(1888)年完成的，它很好地适应了在线性代数中占有中心地位的线性映射(特别地，线性算子)理论的需要. 与此同时，矩阵的概念似乎也不再居次要地位了，首要的意义在于获得了研究对象不依赖于基底选择的不变性质.

但是，在深入到抽象的森林去之前，不妨再一次沿着有人侍弄的公园走一走，即回顾一下由具体的长度为n的行向量组成的空间. 我们有意地在已知资料的部分的重复中进行，以磨平抽象叙述的不顺畅之处.

§1　抽象向量空间

1. 论据与公理系统　在[BA Ⅰ]的第2章，我们研究了长度为n的行构成的n维向量空间$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\cdots,x_n)|x_i \in \mathbb{R}\}$以及与$m \times n$矩阵互为单值对应的$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$线性映射，当$m = n$时，双射线性映射$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的特点是行列式性质$\det A \neq 0$，后者允许用克拉默规则求解把$\varphi_A$与$\mathbb{R}^n$中一个固定向量结合在一起的那个线性方程组，在$\det A \neq 0$的情形，齐次线性方程组构成$\mathbb{R}^n$的一个子空间，但是，正如当时就已经指出的那样，这个子空间(更精确些，线性包络)是另有规律的对象：如果允许$\mathbb{R}^n$有基底$(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$，那么线性包络$U \subset \mathbb{R}^n$通常并不具有这样形式的

基底, 这种不方便是由于$\mathbb{R}^n$的规律太过于具体造成的.

事实上, 我们已经实实在在地使用过的, 并将在下面反复出现的性质$\mathrm{B\Pi}_1$—$\mathrm{B\Pi}_8$不只适用于空间$\mathbb{R}^n$, 例如, 看在中学已经研究过的微分方程$d^2x/dt^2+x=0$. 显然, 它的一般解可写成$x(t)=\alpha\sin t+\beta\cos t$的形式. 如果$\alpha_0,\beta_0$使得对所有的$t$都有$\alpha_0\sin t+\beta_0\cos t=0$, 那么, 令$t_1=\pi/2$, $t_2=0$就得到$\alpha_0=0=\beta_0$. 这个情况为我们做下面的事情提供了基础: 用以下定义1的精神去讨论部分解$\sin t$, $\cos t$的线性相关性和讨论方程式$d^2x/dt^2+dx=0$一般解的二维线性空间.

定义1 设$\mathfrak{K}$是个任意域. 满足下列公理的元素(叫做**向量**)的集合V称之为域$\mathfrak{K}$上的**向量**(或**线性**)**空间**:

i) 在V上给定了一个二元运算$V\times V\to V$, 通常记成加: $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{x}+\mathbf{y}$, 且赋予$V$阿贝尔群结构(**空间$V$的加法群**). 可见

$\mathrm{B\Pi}_1$: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$(**交换律**);

$\mathrm{B\Pi}_2$: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$(**结合律**);

$\mathrm{B\Pi}_3$: 存在一个与众不同的元素$\mathbf{0}$, 称为**零向量**, 它对任意$\mathbf{x}\in V$都有$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$;

$\mathrm{B\Pi}_4$: 对每个$\mathbf{x}\in V$存在一个**逆**(或**反**)向量$-\mathbf{x}$使得$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$.

ii) 在集合$\mathfrak{K}\times V$上给定一运算$(\lambda,\mathbf{x})\mapsto\lambda\mathbf{x}$, 称为用$\mathfrak{K}$中的纯量乘$V$中的向量而且要具有下列性质.

$\mathrm{B\Pi}_5$: $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$(**酉性**);

$\mathrm{B\Pi}_6$: $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x})$对任意$\alpha$, $\beta\in\mathfrak{K}$和$\mathbf{x}\in V$都成立(**结合律**);

加法和乘法用下面的两个分配律联系在一起:

$\mathrm{B\Pi}_7$: $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$;

$\mathrm{B\Pi}_8$: $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$.

要注意这样一种情况, 在$\mathrm{B\Pi}_7$的左侧的符合+是对域$\mathfrak{K}$的元素而言的, 而右侧的符号+则是对于向量的. 更严格地说, 应该用不同的符号表示在阿贝尔群V中的加法和域$\mathfrak{K}$中的加法(比如说, 用$\oplus$和+). 同样的处理还有$\mathfrak{K}\times V$ 上的乘法运算和域$\mathfrak{K}$的乘法运算(比方说, 用$\odot$和$\cdot$). 但是, 通常并不这样做, 因为它们各自的作用总是非常清楚的, 然而, 为了使这个说明内容更丰富且预先避免出错, 我们研究一下正实数的集合$V=\mathbb{R}_+$. 令$x\oplus y=xy$ (集合$\mathbb{R}$中的通常的乘法)和$\lambda\odot x=x^\lambda$(x的λ次幂, $x\in\mathbb{R}_+,\lambda\in\mathbb{R}$)就不难相信, 公理$\mathrm{B\Pi}_1-\mathrm{B\Pi}_8$是成立的, 所以$V$是$\mathbb{R}$上的向量空间. $1\in\mathbb{R}_+$是零向量. 显然, 在给出的这种情形通常的记法$x+y=xy,\lambda x=x^\lambda$就有可能引起困惑.

这里还有一个例子, 另外一种更令人喜欢的方法. 设V是复数$\mathbb{C}$上的一个向量空间, 我们定义一个新的向量空间$\bar{V}$, 它与V具有相同的加法子群V, 但有另外一种用纯量做的乘法$(\lambda,\mathbf{x})\mapsto\lambda\odot\mathbf{x}=\bar{\lambda}\mathbf{x}$, 其中$\bar{\lambda}$是$\lambda$的共轭复数, 因为$\lambda\mapsto\bar{\lambda}$是域$\mathbb{C}$上的自同构, 容易相信$\bar{V}$是个向量空间. 不用符号$\odot$(或者其他的某个符号)同时研究$V$和$\bar{V}$, 可能还是挺困难的.