

© 赵圣之 编著

# 非线性光学

*Nonlinear Optics*



山东大学出版社

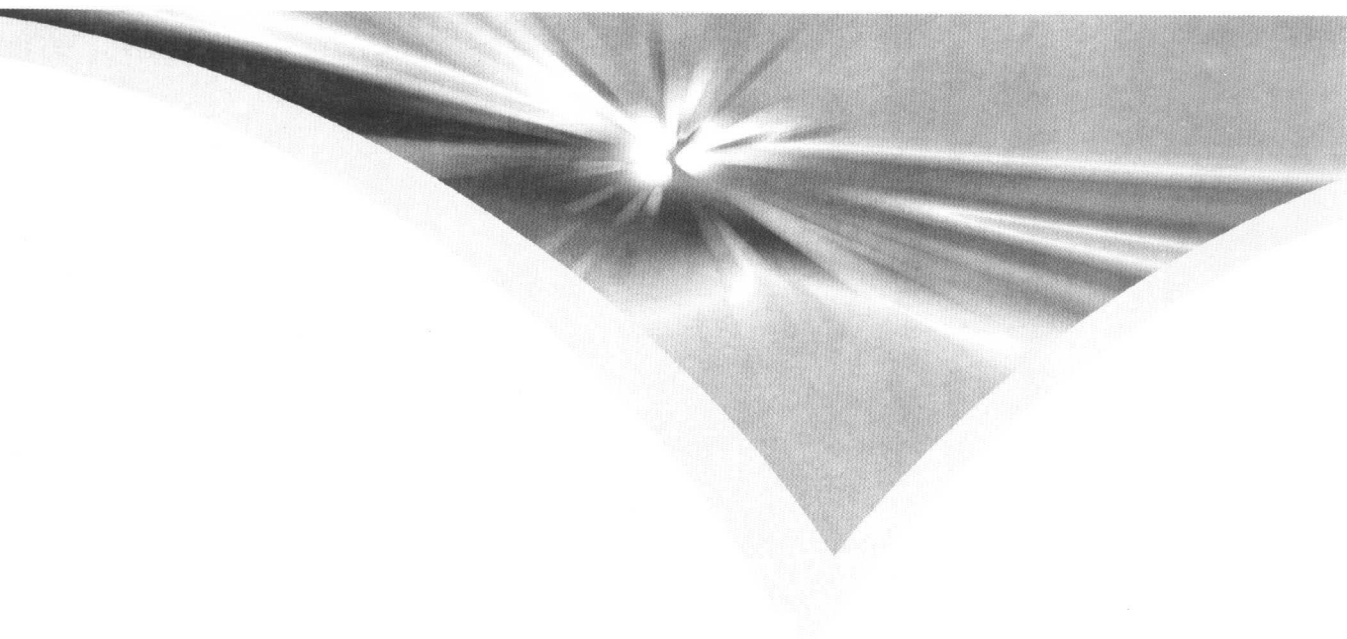
0437/2

2007

© 赵圣之 编著

# 非线性光学

Nonlinear Optics



山东大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

非线性光学/赵圣之编著. — 济南: 山东大学出版社, 2007. 8  
ISBN 978-7-5607-3414-9

- I. 非...
- II. 赵...
- III. 非线性光学—研究生—教材
- IV. 0437

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 122897 号

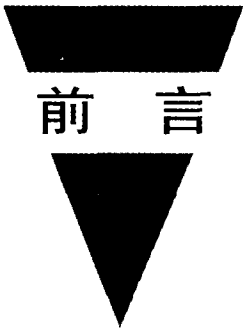
---

出版发行: 山东大学出版社  
地 址: 山东省济南市山大南路 27 号(250100)  
经 销: 山东省新华书店  
印 刷: 山东旅科印务有限公司印刷  
规 格: 787×1092 毫米(1/16)  
印 张: 17.25 插 页: 2  
字 数: 400 千  
版 次: 2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷  
定 价: 30.00 元

---

**版权所有, 盗印必究**

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社营销部负责调换



# 前 言

自激光问世以来,非线性光学得到了快速发展,已经成为一门相当成熟的学科分支。非线性光学包括非线性光学现象、非线性光学器件、非线性光学理论、非线性光学材料等。非线性光学理论是伴随着非线性光学现象而逐步发展起来的,现已日臻完美。非线性光学材料在非线性光学领域占有突出的地位,特别是新型、高效、优质的非线性材料的不断发现,为非线性光学器件的发展提供了宽广的平台。而新型激光技术、可调谐激光器的不断发展和完善,为非线性光学的研究提供了强有力的工具,使得人们能够去研究高阶及共振增强的非线性光学效应。目前,非线性光学频率变换技术广泛地应用于扩展相干辐射的波段,为激光产业开辟了广阔的前景。经过几十年的广泛和深入的研究,非线性光学已经取得了丰硕的成果。

为培养光学工程、光电工程、光信息科学与技术等专业研究生的需要,作者依据多年为研究生开设非线性光学课程的讲义及长期从事非线性光学方面的研究成果,编著了这本《非线性光学》教材。全书共分六章。第一章是光波在非线性介质中的传播,从光波在各向异性晶体中的传播特性、非线性极化、非线性极化张量特性等,导出了光与非线性介质相互作用时平面波近似下的振幅耦合方程,为二次及更高次非线性现象的解释奠定了理论基础;第二和第三章利用第一章的理论对二次非线性现象如倍频、和频、差频、光整流、参量放大、参量振荡、参量荧光给予解释,引出了相位匹配的概念及实现的方法,讨论

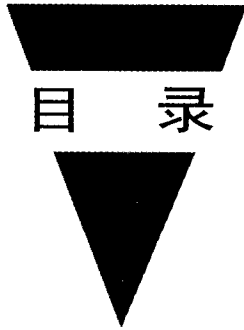
了高斯光束近场近似情况下的适用性；第四章和第五章主要论述三次非线性效应，如光学克尔效应、自聚焦、三次谐波、四波混频、受激喇曼散射、受激布里渊散射、双光子吸收等，并讨论了三次非线性效应中的共振增强效应；第六章是非线性极化率的计算和测量，采用半经典理论和微扰方法，给出了计算二次和三次非线性极化率的方法和公式，并对测量二次非线性极化率常用的方法作了简单的介绍。

感谢山东大学研究生院研究生教材建设基金的资助。

由于作者水平有限，错误或不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

作 者

2007年6月



<b>第 1 章 光波在非线性介质中的传播</b> .....	(1)
1.1 光波在各向异性晶体中的传播特性 .....	(1)
1.2 光学非线性介质的极化 .....	(19)
1.3 非线性极化的经典模型 .....	(23)
1.4 非线性极化张量的宏观描述和非线性极化张量的宏观性质 ...	(28)
1.5 平面波相互作用时的近似波动方程 .....	(38)
1.6 波矢共线的平面波相互作用 .....	(41)
<b>第 2 章 光学倍频和光学混频</b> .....	(47)
2.1 光学倍频 .....	(48)
2.2 光学混频 .....	(112)
<b>第 3 章 光参量放大和光参量振荡</b> .....	(132)
3.1 光学参量放大器的增益 .....	(132)
3.2 光学参量振荡 .....	(139)
3.3 参量荧光 .....	(158)

<b>第 4 章</b>	<b>光克尔效应和自聚焦及三次谐波和四波混频</b> .....	(162)
	4.1 三次非线性效应 .....	(162)
	4.2 光学克尔效应和自聚焦 .....	(165)
	4.3 三次谐波 .....	(178)
	4.4 四波混频过程 .....	(189)
<b>第 5 章</b>	<b>受激散射效应和双光子吸收</b> .....	(200)
	5.1 受激喇曼散射 .....	(201)
	5.2 受激布里渊散射 .....	(230)
	5.3 双光子吸收过程 .....	(236)
<b>第 6 章</b>	<b>非线性极化率的计算和测量</b> .....	(241)
	6.1 非线性极化率的计算 .....	(241)
	6.2 非线性极化率的测量 .....	(267)
<b>附 录</b>	<b>高斯单位制和国际单位制中主要公式和基本常数对照表</b> .....	(271)

# 第1章

## 光波在非线性介质中的传播

### 1.1 光波在各向异性晶体中的传播特性

#### 1.1.1 非线性光学晶体

##### 1.1.1.1 介电张量

晶体的介电常数表征了晶体的物理性质,因此,我们首先了解晶体的介电张量。在均匀、不导电、非磁性的晶体中,电导率  $\sigma=0$ ,磁导率  $\mu=1$ 。对于各向同性的介质,电场强度  $\mathbf{E}$  和电位移矢量  $\mathbf{D}$  之间的关系为  $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ ,介电常数  $\epsilon$  是一个常数。但在各向异性的线性介质中, $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的关系可表示为:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1-1-1)$$

(1-1-1)式的书写遵循爱因斯坦求和规则,重复下标  $jj$  表示求和。介电常数  $\epsilon$  为二阶张量:

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-1-2)$$

对于保守系统,利用能量守恒可以证明介电张量为对称张量。因为晶体



中电磁场能量密度  $w$  和能流密度  $\mathbf{S}$  的表示式为:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{8\pi}(H^2 + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (1-1-3)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1-1-4)$$

无吸收介质麦克斯韦方程组的形式为:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1-1-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-1-6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1-1-7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1-1-8)$$

由(1-1-3)式可得:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{8\pi}(2\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}) \quad (1-1-9)$$

由(1-1-4)式并利用(1-1-5)、(1-1-6)两式可得:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{H}}) \end{aligned} \quad (1-1-10)$$

由能量守恒定律:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (1-1-11)$$

根据(1-1-9)、(1-1-10)、(1-1-11)各式可得:

$$\dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = 0 \quad (1-1-12)$$

将(1-1-1)式代入(1-1-12)式可得:

$$\dot{E}_i \epsilon_{ij} E_j - E_i \epsilon_{ij} \dot{E}_j = 0 \quad (1-1-13)$$

对(1-1-13)式左边第二项交换求和号  $i \leftrightarrow j$  可得:

$$\dot{E}_i \epsilon_{ij} E_j - E_j \epsilon_{ji} \dot{E}_i = \dot{E}_i E_j (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) = 0 \quad (1-1-14)$$

即:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (1-1-15)$$

因此,二阶张量只有六个独立分量,(1-1-2)式简化为:

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-1-16)$$

对于各向异性的非线性介质,介电常数  $\epsilon$  为更高阶张量。

### 1.1.1.2 光学晶体的分类

对于自然界中存在的七大晶系,由于其空间的对称性不同,所具有的宏观对称操作也不同,其描述晶体物理性质的介电张量的形式也不同。因为介电

张量在晶体的宏观对称操作下是不变的,对于不同的晶体,可以利用对称操作将张量元进行约化,约化后的张量元可用独立分量元表示。如果选用的坐标系为主轴坐标系,晶体就其光学性质可分为三类。第一类晶体是立方晶系,它在光学上是各向同性的,三个主轴介电常数相等,电位移矢量  $D$  与电场强度矢量  $E$  方向相同。第二类晶体是三方、四方、六方晶系,在这类晶体中,  $x$  和  $y$  方向的主轴介电常数相等,但它们与  $z$  方向的主轴介电常数不相等,这类晶体称为单轴晶体。第三类晶体是三斜、单斜、正交晶系,在这类晶体中,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向主轴介电常数各不相同,这类晶体称为双轴晶体。表 1-1-1 列出了七大晶系 32 点群晶体的光学性质及介电张量<sup>[1,2]</sup>。

表 1-1-1 晶体光学的分类

晶系	点群	主轴坐标系介电张量	光学分类
立方	$\bar{4}3m, 432$ $m\bar{3}, 23$ $m\bar{3}m$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{xx} \end{pmatrix}$	各向同性
三方	$3, \bar{3}$ $32, 3m$ $32/m$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$	单轴
四方	$4, \bar{4}$ $4/m, 422$ $4mm, \bar{4}2m$ $4/mmm$		
六方	$6, \bar{6}$ $6/m, 622$ $6mm, \bar{6}m2$ $6/mmm$		
正交	$222$ $mm2$ $mmm$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$	双轴
单斜	$2$ $m$ $2/m$		
三斜	$1$ $\bar{1}$		

### 1.1.2 单色平面波在晶体中传播的基本方程

#### 1.1.2.1 晶体光学性质的基本方程

设在晶体中传播的单色平面波解的形式用复数表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{cases} \quad (1-1-17)$$

式中,  $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 、 $\mathbf{D}_0$  为实振幅,  $\mathbf{k}$  为波矢量,  $\omega$  为频率。将(1-1-17)式代入麦克斯韦方程组(1-1-5)~(1-1-8)可得：

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \frac{c}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (1-1-18)$$

(1-1-18)式表明,  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{k}$  三者相互垂直,  $\mathbf{D} \times \mathbf{H}$  的方向为  $\mathbf{k}$  的方向。将(1-1-18)式中的第一式代入第二式可得：

$$\mathbf{D} = -\frac{c^2}{\omega^2} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})] = \frac{c^2}{\omega^2} [k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}] \quad (1-1-19)$$

因为：

$$k = n\omega/c = \omega/v_p \quad (1-1-20)$$

式中,  $n$  为介质的折射率,  $v_p$  为相速度, 波矢量  $\mathbf{k}$  与等相位面垂直。将(1-1-20)式代入(1-1-19)式可得：

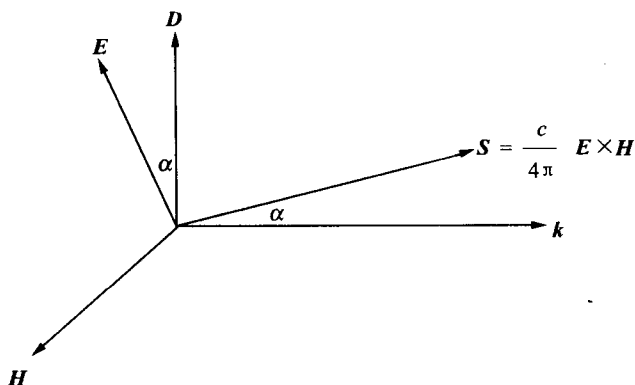
$$\mathbf{D} = n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{k}_0 (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \quad (1-1-21)$$

式中,  $\mathbf{k}_0$  为平面光波波法线方向的单位矢量, (1-1-21)式是描述平面波在晶体中传播的基本方程。

在主轴坐标系中,  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  有如下关系：

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (1-1-22)$$

$\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  除了在主轴方向外, 在其他情况下两者并不一定平行, 但  $\mathbf{E}$  一定位于  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{k}$  所确定的平面内, 并与  $\mathbf{H}$  垂直。设  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  之间的夹角为  $\alpha$ , 由(1-1-4)式可知,  $\mathbf{k}$  和  $\mathbf{S}$  的夹角也为  $\alpha$ , 称  $\alpha$  为离散角。各量之间的关系如图 1-1-1 所示。

图 1-1-1  $k, S, D, E, H, \alpha$  之间的关系

## 1.1.2.2 菲涅尔(Fresnel)方程

由(1-1-21)式可得:

$$\begin{cases} D_x = n^2 [E_x - k_{0x} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \\ D_y = n^2 [E_y - k_{0y} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \\ D_z = n^2 [E_z - k_{0z} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \end{cases} \quad (1-1-23)$$

在主轴坐标系的主轴上,由(1-1-22)式可得:

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_x E_x = n_x^2 E_x \\ D_y = \epsilon_y E_y = n_y^2 E_y \\ D_z = \epsilon_z E_z = n_z^2 E_z \end{cases} \quad (1-1-24)$$

将(1-1-24)式代入(1-1-23)式,整理后可得:

$$\begin{cases} D_x = k_{0x} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}) / (n_x^{-2} - n^{-2}) \\ D_y = k_{0y} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}) / (n_y^{-2} - n^{-2}) \\ D_z = k_{0z} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}) / (n_z^{-2} - n^{-2}) \end{cases} \quad (1-1-25)$$

利用 $(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{D}) = 0$ ,并注意到 $(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}) \neq 0$ ,由(1-1-25)式可得:

$$\frac{k_{0x}^2}{n^{-2} - n_x^{-2}} + \frac{k_{0y}^2}{n^{-2} - n_y^{-2}} + \frac{k_{0z}^2}{n^{-2} - n_z^{-2}} \quad (1-1-26)$$

(1-1-26)式描述了在晶体中传播的光波波法线方向 $\mathbf{k}_0$ 与相应的折射率 $n$ 和晶体的主轴折射率 $(n_x, n_y, n_z)$ 之间的关系,称为波法线菲涅尔(Fresnel)方程。

## 1.1.2.3 本征模的偏振特性

对于在晶体中沿波法线方向 $\mathbf{k}$ 传播的单体平面波,存在两个具有独立偏振态的本征模 $\mathbf{D}'$ 、 $\mathbf{D}''$ ,它们与 $\mathbf{k}$ 三者彼此相互垂直, $\mathbf{D}'$ 、 $\mathbf{D}''$ 的单位矢量分别为 $\mathbf{e}'$ 、 $\mathbf{e}''$ ,如图1-1-2所示。

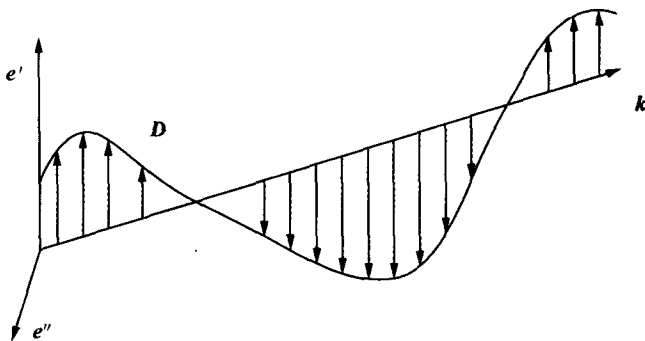


图 1-1-2 与  $k$  对应的本征模  $D'$ 、 $D''$  的关系

我们可以证明,两个偏振态  $D'$ 、 $D''$  相互垂直。由(1-1-25)式可得:

$$\begin{aligned}
 D' \cdot D'' &= \frac{k_{0x}^2 (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'')}{(n_x^{-2} - n'^{-2})(n_x^{-2} - n''^{-2})} + \frac{k_{0y}^2 (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'')}{(n_y^{-2} - n'^{-2})(n_y^{-2} - n''^{-2})} \\
 &\quad + \frac{k_{0z}^2 (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'')}{(n_z^{-2} - n'^{-2})(n_z^{-2} - n''^{-2})} \\
 &= (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'') \left[ \frac{k_{0x}^2}{(n_x^{-2} - n'^{-2})(n_x^{-2} - n''^{-2})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_{0y}^2}{(n_y^{-2} - n'^{-2})(n_y^{-2} - n''^{-2})} + \frac{k_{0z}^2}{(n_z^{-2} - n'^{-2})(n_z^{-2} - n''^{-2})} \right] \\
 &= (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'') (n'^{-2} - n''^{-2}) \times \left[ \frac{k_{0x}^2}{(n_x^{-2} - n'^{-2})} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k_{0x}^2}{(n_x^{-2} - n''^{-2})} + \frac{k_{0y}^2}{(n_y^{-2} - n'^{-2})} - \frac{k_{0y}^2}{(n_y^{-2} - n''^{-2})} + \frac{k_{0z}^2}{(n_z^{-2} - n'^{-2})} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k_{0z}^2}{(n_z^{-2} - n''^{-2})} \right] \\
 &= (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'') (n'^{-2} - n''^{-2}) \times \left\{ \left[ \frac{k_{0x}^2}{(n''^{-2} - n_x^{-2})} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k_{0y}^2}{(n''^{-2} - n_y^{-2})} + \frac{k_{0z}^2}{(n''^{-2} - n_z^{-2})} \right] - \left[ \frac{k_{0x}^2}{(n'^{-2} - n_x^{-2})} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k_{0y}^2}{(n'^{-2} - n_y^{-2})} + \frac{k_{0z}^2}{(n'^{-2} - n_z^{-2})} \right] \right\} \quad (1-1-27)
 \end{aligned}$$

式中,  $n'$ 、 $n''$  分别为对应于偏振方向  $D'$ 、 $D''$  的折射率。由菲涅尔方程(1-1-26)可知,(1-1-27)式两个中括号内的三项之和均为零,因此有:

$$D' \cdot D'' = 0 \rightarrow D' \perp D'' \quad (1-1-28)$$

另外,由(1-1-21)式,计算可得:

$$(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}'') n'^2 = (\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{D}') n''^2 = n'^2 n''^2 [\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'' - (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}') (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}'')] = D' \cdot D'' \quad (1-1-29)$$

所以有:

$$\begin{cases} (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}'') = 0 \rightarrow \mathbf{E}' \perp \mathbf{D}'' \\ (\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{D}') = 0 \rightarrow \mathbf{E}'' \perp \mathbf{D}' \end{cases} \quad (1-1-30)$$

与  $D'$  和  $E'$  相应的有  $H'$ 、 $S'$ 、 $\alpha'$ ，而与  $D''$  和  $E''$  相应的有  $H''$ 、 $S''$ 、 $\alpha''$ ，晶体中相应于某一波法线方向  $k$  的两个本征模的电场矢量、能流密度、离散角的关系如图 1-1-3 所示。

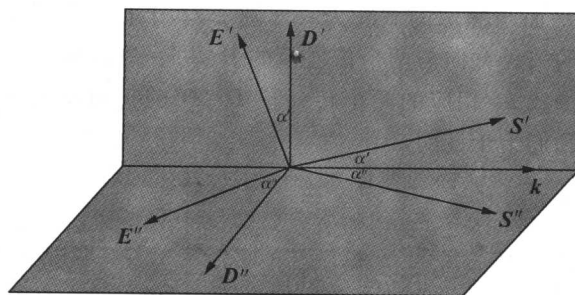


图 1-1-3 与  $k$  对应的  $D$ 、 $E$ 、 $S$  的方向

### 1.1.3 单色平面波在各向异性晶体中的传播规律

光在各向性晶体中传播的相速度取决于光波在传播方向的折射率，它与光波的偏振态及传播方向有关。分析光波在晶体中的传播，就是求解两个特征光波的偏振方向及相应的折射率。为了直观地看出晶体中光波各个矢量间的方向关系，以及与各个传播方向相应的光速或折射率的空间取值，可以利用折射率椭球、折射率曲面来分析光波在各向异性晶体中的传播规律。

#### 1.1.3.1 光折射率椭球

由(1-1-18)式中的第二式和(1-1-21)式可得：

$$\begin{cases} H^2 = D^2/n^2 \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = n^2 [\mathbf{E}^2 - (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})^2] = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}/n^2 = H^2 \end{cases} \quad (1-1-31)$$

在主轴坐标系，由(1-1-31)式可得：

$$\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} = \frac{D^2}{n^2} \quad (1-1-32)$$

(1-1-32)式可化为：

$$\frac{n^2}{n_x^2} \left( \frac{D_x}{D} \right)^2 + \frac{n^2}{n_y^2} \left( \frac{D_y}{D} \right)^2 + \frac{n^2}{n_z^2} \left( \frac{D_z}{D} \right)^2 = 1 \quad (1-1-33)$$

令：

$$\begin{cases} x = n(D_x/D) \\ y = n(D_y/D) \\ z = n(D_z/D) \end{cases} \quad (1-1-34)$$

将(1-1-34)式代入(1-1-33)式可得：

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (1-1-35)$$

(1-1-35)式称为折射率椭球方程。在这个椭球面上的各点，其矢径  $\mathbf{r} = n\mathbf{D}_0$ ， $\mathbf{D}_0$  为  $\mathbf{D}$  的单位矢量，所以矢径  $\mathbf{r}$  的方向为  $\mathbf{D}$  的偏振方向，其长度为对应

的折射率。利用折射率椭球可以确定晶体内沿任意方向  $k_0$  传播的两个独立传播模的折射率和相应的电位移矢量  $D$  的方向。具体方法如图 1-1-4 所示：从主轴坐标系的原点出发作波法线矢量  $k_0$ ，再过坐标原点作与  $k_0$  垂直的平面  $\Pi$ ，该平面与椭球的截线为一椭圆  $L$ ，其半长轴和半短轴矢径分别为  $r_a$ 、 $r_b$ ，两半轴的矢径方向与两个传播模的  $D$  方向平行，即  $r_a$  和  $r_b$  分别平行于  $D'$ 、 $D''$ ，与波法线  $k_0$  相应的两个传播模  $D'$ 、 $D''$  的折射率分别为  $n' = |r_a|$ 、 $n'' = |r_b|$ 。现在我们给予证明。

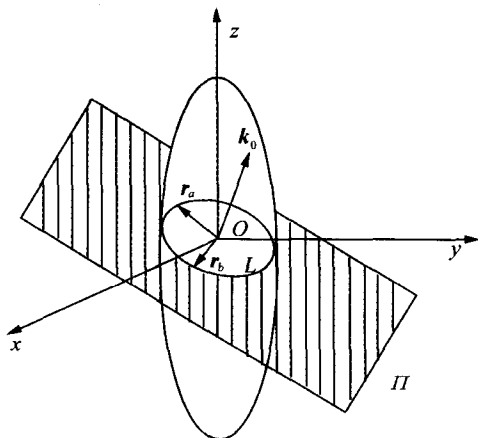


图 1-1-4 利用折射率椭球确定  $D$  的方向及相应的折射率

设波矢单位矢量  $k_0$  的分量为  $(k_{0x}, k_{0y}, k_{0z})$ ，因为平面  $\Pi$  与  $k_0$  垂直，则平面方程为：

$$k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z = 0 \quad (1-1-36)$$

而椭圆  $L$  的方程为：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \\ k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z = 0 \end{cases} \quad (1-1-37)$$

如果  $(x, y, z)$  为  $L$  上某点的坐标，则由原点到该点距离的平方为：

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1-1-38)$$

当矢径  $r$  沿长轴或短轴时， $r^2$  取极值。因此，可从  $r^2$  取极值求出椭圆  $L$  半长轴  $r_a$  和半短轴  $r_b$  的方向和大小。

采用拉格朗日乘子法求极值。引入两个因子  $2\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ，作函数  $F$ ：

$$2F = (x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_1(k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z) + \lambda_2 \left( \frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} - 1 \right) \quad (1-1-39)$$

$r^2$  取极值的条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = x + \lambda_1 k_{0x} + (\lambda_2 x/n_x^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = y + \lambda_1 k_{0y} + (\lambda_2 y/n_y^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = z + \lambda_1 k_{0z} + (\lambda_2 z/n_z^2) = 0 \end{cases} \quad (1-1-40)$$

(1-1-40)式中的三个式子分别乘以  $x, y, z$  再相加, 可得:

$$\lambda_2 = -r^2 \quad (1-1-41)$$

(1-1-40)式中的三个式子分别乘以  $k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}$  再相加, 可得:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \left( \frac{k_{0x}x}{n_x^2} + \frac{k_{0y}y}{n_y^2} + \frac{k_{0z}z}{n_z^2} \right) = r^2 \left( \frac{k_{0x}x}{n_x^2} + \frac{k_{0y}y}{n_y^2} + \frac{k_{0z}z}{n_z^2} \right) \quad (1-1-42)$$

将(1-1-41)、(1-1-42)式代入(1-1-40)式, 整理后可得:

$$\begin{cases} x = r^2 \left[ \frac{x}{n_x^2} - k_{0x} \left( \frac{k_{0x}x}{n_x^2} + \frac{k_{0y}y}{n_y^2} + \frac{k_{0z}z}{n_z^2} \right) \right] \\ y = r^2 \left[ \frac{y}{n_y^2} - k_{0y} \left( \frac{k_{0x}x}{n_x^2} + \frac{k_{0y}y}{n_y^2} + \frac{k_{0z}z}{n_z^2} \right) \right] \\ z = r^2 \left[ \frac{z}{n_z^2} - k_{0z} \left( \frac{k_{0x}x}{n_x^2} + \frac{k_{0y}y}{n_y^2} + \frac{k_{0z}z}{n_z^2} \right) \right] \end{cases} \quad (1-1-43)$$

由(1-1-34)式, 假定  $\mathbf{r} = n\mathbf{D}_0$ , 即  $r^2 = n^2$ , 用  $(D/n)$  分别乘以(1-1-43)中的三个式子, 可得:

$$\begin{cases} D_x = n^2 [E_x - k_{0x} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \\ D_y = n^2 [E_y - k_{0y} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \rightarrow \mathbf{D} = n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{k}_0 (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \\ D_z = n^2 [E_z - k_{0z} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E})] \end{cases} \quad (1-1-44)$$

(1-1-44)式与(1-1-21)式完全相同。这说明椭圆  $L$  的半长短轴与  $\mathbf{D}$  平行, 其大小等于折射率。

(1) 各向同性介质

在各向同性介质中,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon$ , 其主轴折射率  $n_x = n_y = n_z = n = \sqrt{\epsilon}$ , 折射率椭球方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2 \quad (1-1-45)$$

这是一个半径为  $n$  的球面。因此, 不论  $\mathbf{k}_0$  沿什么方向, 垂直于  $\mathbf{k}_0$  的中心截面与球面的交线均是半径为  $n$  的圆, 如图 1-1-5 所示。所以, 相应  $\mathbf{k}_0$  方向两传播模的折射率相等, 均为  $n$ , 其电位移矢量正交, 方向任意。对于各向同性介质,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = n^2 \mathbf{E}$ , 由(1-1-21)式可知,  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0$ , 即  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  平行, 离散角  $\alpha = 0$ 。



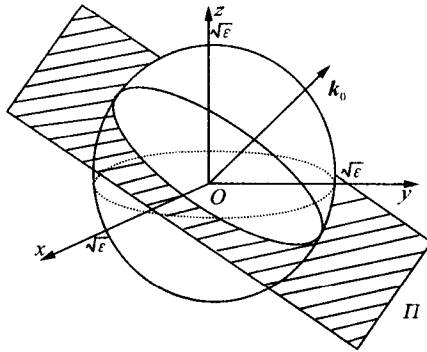


图 1-1-5 各向同性介质的折射率椭球

(2) 单轴晶体

① 折射率椭球

单轴晶体有一个光轴, 选  $z$  轴为光轴, 则有,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$ , 主轴折射率  $n_x = n_y = n_o, n_z = n_e \neq n_o$ , 因此, 折射率椭球方程为:

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (1-1-46)$$

这是一个以光轴  $z$  为转轴的旋转椭球面, 与  $x, y, z$  轴的截距分别为  $n_o, n_o, n_e$ 。若  $n_o > n_e$ , 称为负单轴晶体, 若  $n_o < n_e$ , 称为正单轴晶体。在单轴晶体中除了沿光轴  $z$  方向外, 任何传播方向  $k_0$  都存在两个相互垂直的特定偏振态, 这两个特定偏振的光在晶体中传播速度不同, 具有不同的折射率, 如图 1-1-6 所示。

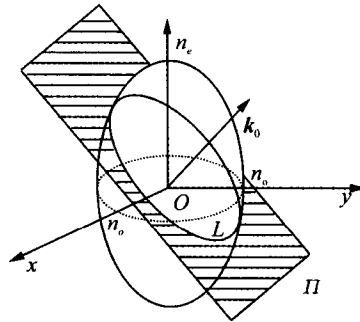


图 1-1-6 单轴晶体的折射率椭球

② 本征模偏振方向及相应的折射率

设一平面光波在晶体内传播的波矢方向  $k_0$  与光轴  $z$  的夹角为  $\theta$ ,  $k_0$  与光轴  $z$  所成的平面称为主截面。由于单轴晶体折射率椭球是一个旋转椭球, 通过椭球中心作垂直于  $k_0$  的平面与椭球的交线是椭圆, 该椭圆的长轴和短轴方向是波法线方向  $k_0$  的光波  $D$  矢量的两个传播模可能的振动方向, 其中, 一个振动方向  $D'$  与主截面正交, 另一个振动方向  $D''$  在主截面内。因为椭球是旋转