21世纪大学数学精品教材

丛书主编 蔡光兴 戴明强

微分方程基础及其应用

时宝 黄朝炎 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学精品教材·

微分方程基础及其应用

时　宝　黄朝炎　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为《21 世纪大学数学精品教材》之一，在编写时严格遵循高等学校教学指导委员会关于常微分方程的教学基本要求，力求知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂，例题丰富，注重本课程的实际应用背景. 本书特别注意穿插介绍了一些历史事件和历史人物的生平及主要的数学贡献. 全书由 7 章组成. 第 0 章是绪论；第 1 章是一阶微分方程的初等解法；第 2 章是一阶微分方程解的基本理论；第 3 章是高阶微分方程的理论及其解法；第 4 章是微分方程组的理论及其解法；第 5 章是微分方程稳定性与定性理论初步；第 6 章是微分方程的应用与数学模型初步.

本书可作为高等学校数学专业和非数学专业的常微分方程课程教材，亦可供相关教学和科研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

微分方程基础及其应用/时宝，黄朝炎主编. —北京：科学出版社，2007
（21 世纪大学数学精品教材）
ISBN 978-7-03-019799-3

Ⅰ.微… Ⅱ.①时…②黄… Ⅲ.微分方程－高等学校－教材 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 133293 号

责任编辑：冯贵层／责任校对：梅 莹
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007 年 8 月第一次印刷 印张：14 1/2
印数：1—4 000 字数：276 000

定价：21.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21 世纪大学数学精品教材》丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品教材的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会，编委由 12 所高校数学院系的负责人构成（按姓氏笔画）：

王公宝　方承胜　江世宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军
欧贵兵　罗从文　周　勇　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编：

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在，每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求. 部分教材配有教学光盘，便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿，反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要，数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任，一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合，是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为，达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）学生，应用性是数学学科和数学教学发展的新特点，或展现在教材内容结构上，或体现于某些章节，或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性，教师好教，学生好学，同时保持知识完整. 二者发生矛盾时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强数学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

前　言

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门历史悠久的学科.从诞生之日起很快就显示出它在应用上的重要作用.特别是作为 Newton 力学的得力助手,在天体力学和其他力学领域显示出巨大的功能. Sir I Newton 通过解微分方程证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆,从理论上得到了行星运动规律.海王星的存在是天文学家 U Le Verrier 和 J Adams 先通过微分方程的方法推算出来,然后才实际观测到的,这些都使数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量.随着科学技术的发展和社会的进步,常微分方程的应用不断扩大和深入.时至今日,可以说常微分方程在所有自然科学领域和众多社会科学领域都有着广泛的应用,在数学学科内部的许多分支中,常微分方程是常用的重要工具之一,也是整个数学课程体系中的重要组成部分,常微分方程每一步进展都离不开其他数学分支的支援,例如,复变函数、Lie 群、组合拓扑学等;反过来,常微分方程进一步发展的需要,也推动着其他数学分支的发展.现在,常微分方程在很多学科领域内有着重要的应用,自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等.这些问题都可以化为求常微分方程的解,或者化为研究解的性质的问题.应该说,应用常微分方程理论已经取得了很大的成就,但是,它的现有理论也还远远不能满足需要,还有待于进一步的发展,使这门学科的理论更加完善.这一古老的学科,由于应用领域的不断扩大和新理论生长点的不断涌现,它的发展至今仍充满生机和活力.常微分方程的教学目的是让学生掌握本门学科的基础知识,接受本门学科特有的基本训练,了解微分方程在描述客观世界中的作用.

本书由 7 章组成.第 0 章是绪论,主要通过数学本身和生活实际中的引例来介绍微分方程的来源,并介绍了一些基本概念;第 1 章主要包括古典的一阶微分方程的初等解法;第 2 章主要介绍一阶微分方程解的存在唯一性等基本理论;第 3 章主要给出高阶微分方程的理论及其解法;第 4 章介绍微分方程组的理论及其解法;第 5 章介绍微分方程理论的两个重要研究方向的基本概念和基本理论,即微分方程稳定性理论和几何理论;在最后的第 6 章中介绍了微分方程模型的基本概念、基本理论和基本方法.

本书为《21 世纪大学数学精品教材》之一,在编写时严格遵循高等学校教学指导委员会关于常微分方程课程的教学基本要求,力求知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂,例题丰富,注重本课程的实际应用背

景. J Poincaré 在 1908 年指出:"如果要预见数学的未来，适当的途径就是研究这门科学的历史和现在."陈省身在李文林编写的《数学史概论》的题词中也指出:"了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤."本书特别注意穿插介绍了一些历史事件和历史人物的生平及主要的数学贡献.

本书可按 60 计划学时来安排教学. 对于非数学专业的学生,教师亦可根据实际需要做适当的内容删减.

本书由时宝和黄朝炎主编,方瑛、王胜兵和曾晓云担任副主编,杨树杰和韩庆龙参加编写工作. 具体的编写工作是:第 0 章,第 2 章第 5 节,第 3 章第 2 节的部分内容,第 3 章第 4 节,第 6 章第 4 节和第 5 节由时宝编写,同时在各章均增写了部分内容;第 1 章和第 3 章第 3 节的部分内容由杨树杰编写;第 2 章(第 5 节除外)由韩庆龙编写;第 3 章(第 2 节的部分内容,第 3 节的部分内容和第 4 节除外)由王胜兵编写;第 4 章由方瑛编写;第 5 章由曾晓云编写;第 6 章第 1 节、第 2 节和第 3 节由黄朝炎编写. 周刚和韩庆龙绘制了所有的图形,顾丽娟和孙慧静做了大量的校对工作,最后由时宝统稿、定稿.

由于编者水平有限,再加上时间仓促,书中谬误,甚至错误在所难免,敬请读者和同行不吝赐教.

编　者

2007 年 6 月

目　　录

第0章 绪　　论

§0.1 引　　例

数学分析中所研究的函数是反映客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系又可能对客观事物的规律性进行研究. 因此，如何寻求函数关系在实践中具有重要意义. 在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是有时可以由所提供的情况，列出含有要找的函数及其导数的关系式. 这样的关系式在数学上就称为微分方程. 微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数来，这就是所谓的解微分方程. 这一章主要介绍微分方程的一些基本概念.

微分方程是伴随着微积分学一起发展起来的，1614 年，J Napier① 为寻求球面三角计算的简便方法而创立对数时就讨论过微分方程的近似解. 微积分学的奠基人 Sir I Newton② 和 G Leibniz③ 的著作中都处理过与微分方程有关的问题.

下面我们通过几个具体例子来说明微分方程的建立过程.

例 0.1　一曲线通过点(1,1)，且在该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程.

解　由导数的几何意义，可知所求曲线 $y=y(x)$ 应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{0-1}$$

此外，还应满足 $x=1$ 时，$y=2$. 对方程(0-1) 两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$y=x^2+c,\quad c\in\mathbf{R}.$$

把 $x=1$ 时，$y=2$ 代入得 $c=0$. 把 $c=0$ 代入即得所求曲线方程 $y=x^2$(如图 0-1 所示).

---

① John Napier(1550-1617)，英国人.

② Sir Isaac Newton(1643-1727)，英国人，被称为划时代的科学巨匠，与 Archimedes 和 C Gauss 并称为"三大数学家"；1701 年，Leibniz 说："在从世界开始到 Newton 生活时代的全部数学中，Newton 的工作超过了一半".

③ Gottfried Wilhelm von Leibniz(1646-1716)，德国人，被誉为"十七世纪的 Aristotle"，1684 年和 1686 年分别发表历史上第一篇公开发表的微分学和积分学的论文.

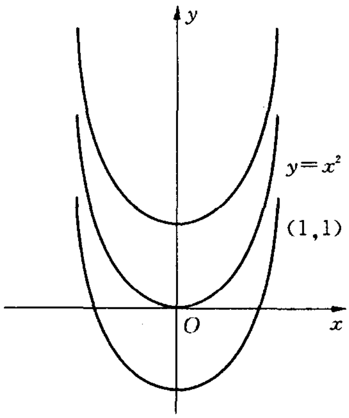

图 0-1

例 0.2　列车在平直线路上以 20m/s 的速度行驶，当制动时列车获得加速度 $-0.4\mathrm{m/s^2}$. 问开始制动后多少时间列车才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解　假设列车开始制动后 t 秒内行驶了 s 米. 由题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=0.4. \tag{0-2}$$

此外，还应满足条件 $t=0$ 时，$s=0, v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20$.

对方程(0-2) 两端积分一次，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+c_1.$$

再积分一次，得

$$s=0.2t^2+c_1t+c_2,\quad c_1,c_2\in\mathbf{R}.$$

把条件 $t=0$ 时，$v=20$ 代入得 $c_1=20$；把条件 $t=0$ 时，$s=0$ 代入得 $c_2=0$. 把 c_1,c_2 的值代入得

$$v=-0.4t+20,\quad s=0.2t^2+20t.$$

令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间 $t=50\mathrm{s}$；再把 $t=50\mathrm{s}$ 代入，得到列车在制动阶段行驶的路程 $s=500\mathrm{m}$.

上述两个例子中的方程(0-1) 和方程(0-2) 都含有未知函数的导数，它们都是微分方程.

一般来讲，凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程. 这里必须指出，在微分方程中，未知函数及自变量可以不出现，但未

知函数的导数则必须出现.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,叫做微分方程的阶. 例如,上述两个例子中的方程(0-1)和方程(0-2)分别是一阶和二阶微分方程.

例 0.3 建立物体冷却过程的数学模型.

将某物体放置于空气中,在时刻 $t=0$ 时,测量得它的温度为 $u_0=150℃$,10分钟后测量得它的温度为 $u_1=100℃$. 要求建立此物体的温度 u 和时间 t 的关系,并计算 20 分钟后物体的温度. 其中我们假设空气的温度保持为 $u_a=24℃$.

解 我们知道热力学中的 Newton 冷却定律为:

(1) 热量是从温度高的地方向温度低的地方传导的;

(2) 在一定温度范围内,一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在的介质的温度的差成正比.

假设该物体在时刻 t 时的温度为 $u=u(t)$,则由 Newton 冷却定律,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+k(u-u_a)=0, \tag{0-3}$$

其中 $k>0$. 方程(0-3)就是物体冷却过程的数学模型.

注意到 u_a 为常数,$u-u_a>0$,可将方程(0-3)改写成

$$\frac{\mathrm{d}(u-u_a)}{u-u_a}=-k\mathrm{d}t.$$

两边积分得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\hat{c},\quad \hat{c}\in\mathbf{R}$$

或

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt},\quad c=\mathrm{e}^{\hat{c}}. \tag{0-4}$$

把条件 $t=0$ 时,$u=u_0$ 代入得 $c=u_0-u_a$,则

$$u=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-kt}. \tag{0-5}$$

把条件 $t=10$ 时,$u=u_1$ 代入得

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-10k}.$$

由此

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}.$$

把所有条件代入,得到 $k\approx 0.051$,从而

$$u\approx 24+126\mathrm{e}^{-0.051t}.$$

例 0.4 建立 RL 电路的数学模型.

简单的 RL 电路只包含电阻 R、电感 L 和电源 E(见图 0-2). 假设 $t=0$ 时,电路中没有电流. 要求建立当开关 K 合上后,电流 I 应该满足的方程,其中 R、L、E 均为常数.

解 G Kirchhoff① 于 1845 年建立了电学中的 Kirchhoff 第二定律②(或 Kirchhoff 电压定律):在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和为零.

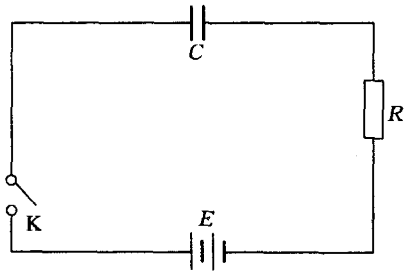

图 0-2

注意到经过电阻 R 和电感 L 的电压降分别为 RI 和 $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$,由 Kirchhoff 第二定律,我们得到

$$E-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-RI=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{RI}{L}=\frac{E}{L}. \tag{0-6}$$

这就是 RL 电路的数学模型. 求出的 $I=I(t)$ 应该满足条件 $t=0$ 时,$I=0$.

现在假设在 $t=t_0$ 时,电源 E 突然短路,因而 E 变为零,此时电流 I 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{RI}{L}=0$$

及条件 $t=t_0$ 时,$I=I_0$.

例 0.5 建立 RLC 电路的数学模型.

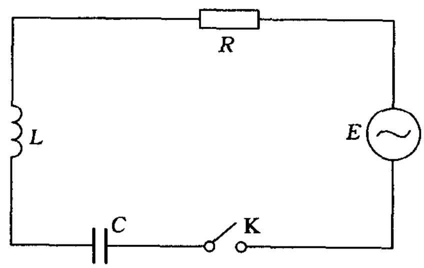

图 0-3

① Gustav Robert Kirchhoff(1824-1887),德国人.

② Kirchhoff 第一定律(或 Kirchhoff 电流定律)是指表示任何瞬时流入电路任一节点的电流的代数和等于零.

简单的 RLC 电路只包含电阻 R、电感 L、电容 C 和电源 E(见图 0-3). 假设 $t=0$ 时,电路中没有电流. 要求建立当开关 K 合上后,电流 I 应该满足的方程,其中 R、L、C 均为常数.

解 注意到经过电阻 R、电感 L、电容 C 的电压降分别为 RI、$L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{Q}{C}$,其中 Q 为电量,由 Kirchhoff 第二定律,我们得到

$$E = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{Q}{C}.$$

因为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$,微分上式,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{0-7}$$

这就是 RLC 电路的数学模型.

若 E 为常数,则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = 0.$$

若 $R=0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{I}{LC} = 0. \tag{0-8}$$

例 0.6 建立单摆运动的数学模型.

单摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M,在重力的作用下,它在垂直于地面的平面上沿圆周运动(见图 0-4). 要求建立单摆运动的应该满足的方程.

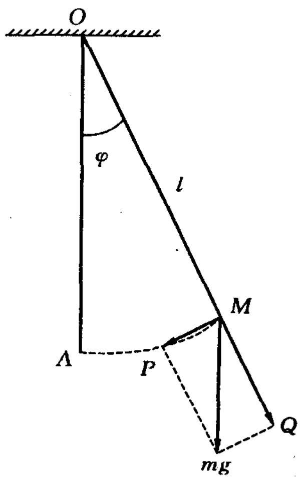

图 0-4

解 假设取逆时针方向作为计算单摆与铅垂线所成的夹角 φ 的正向. 由 Newton 第二运动定律,我们得到

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg\sin\varphi,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \tag{0-9}$$

若只研究单摆的微小振动,我们取 $\sin\varphi\approx\varphi$,就得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{0-10}$$

若假设单摆是在一个黏性介质中摆动,则沿单摆的运动方向就有一个与速度 v 成正比的阻力. 假设阻力系数为 μ,则单摆的运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0.$$

若沿单摆的运动方向有一个外力 $F(t)$ 作用它,则单摆的运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{0-11}$$

当要确定单摆的某一个特定的运动时,我们应该给出单摆的初始状态:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时},\varphi=\varphi_0,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0,$$

其中 φ_0 是单摆的初始位置,ω_0 是单摆的初始角速度.

从例 0.3 ~ 例 0.6 中我们发现,完全无关的、本质上不同的物理现象有时却可以用相同类型的微分方程来描述. 例如,物体冷却方程(0-3) 和 RL 电路方程(0-6) 都可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=b,$$

其中 k,b 均为常数;RLC 电路方程(0-7) 和单摆振动方程(0-11) 都可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+cx=f(t), \tag{0-12}$$

其中 b,c 均为常数;而 LC 电路方程(0-8) 和单摆振动方程(0-10) 都可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0,$$

其中 k 为常数.

在第 6 章,我们将给出更多的建立微分方程的例子.

§0.2 基本概念

本书只研究微分方程的自变量只有一个的情形,即常微分方程;而自变量有两