

人教统编版

教材课时同步讲练

高二数学·下

【主编】杨 君



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
www.nnup.com

东北师范大学出版社

北大绿卡

BEIJING UNIVERSITY

Permanent Resident Card

人教统编版

教材课时同步讲练

高二数学·下

【主编】杨 君

北大绿卡

BEIJING UNIVERSITY

Permanent Resident Card



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
www.nenupress.com

东北师范大学出版社 长春

□总策划: 教育分社

□责任编辑: 杜立新 张帆 巴娇 郑小媛

□封面设计: 宋超

□责任校对: 何小怀

□责任印制: 张允豪

□主 编: 杨君

□副主编: 李凤芝 李鸿雁

□编 者: 张惠敏 王明春 陈曦 管福 罗彦东
沈庆来 刘宇辉 许振领 李霞 孟庆高

图书在版编目(CIP)数据

北大绿卡·高二数学下·人教统编版/杨君主编.
长春: 东北师范大学出版社, 2007. 10
ISBN 978-7-5602-4703-8

I. 北… II. 杨… III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第114126号

北大绿卡
高二数学下
(人教统编版)
杨君 主编

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街5268号(130024)
电话: 0431-85695744 85688170
传真: 0431-85695744 85695734
网址: <http://www.nenup.com>

电子邮件: sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
抚顺华文印业公司印装

辽宁省抚顺高湾经济区小泗水工业园(113000)
2007年10月第1版 2007年10月第1次印刷
幅面尺寸: 210 mm×296 mm 印张: 12.75 字数: 350千

定价: 17.50元
如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

出版说明

《北大绿卡》是东北师范大学出版社全力打造、倾情奉献给莘莘学子的系列教辅读物。该书具有以下特点：

第一，覆盖面全。该丛书以人教社新课标教材为蓝本，配备了从小学到初、高中各科、各年级系列教辅，同时还涵盖了北师大版、华东师大版、沪科版、沪教版、苏教版、沪粤版、浙教版、冀教版等版本。

第二，体例新。该丛书从理顺本章或本节知识切入，在自主学习的基础上采取讲例、讲练对照，以练为主，双栏对照排版，双色印刷的形式，突出重点，使体例清新明了。同时根据各学科的特点，分别设计了不同的编写体例，这样更能突出本书的实用性。

第三，夯实基础。正确并全面地掌握教材中的基本概念。基本理论是学习的根本，任何成绩的取得都源于对教材基础知识的点滴积累及深入体会，基础知识是形成能力的前提，因此，本书特别注重对基础知识的讲解和练习。有专家说：分析问题和解决问题的能力是练出来的，只有运用所学的知识去解决问题，才能不断提高自己的能力。本丛书正体现了这一宗旨。

第四，对教材的讲解精。本书对教材知识点的讲解真正体现了围绕重点，突破难点，精讲精析，使学生透彻地理解并掌握教材，能以不变应万变，举一反三，触类旁通。

第五，注重能力培养。该丛书注重考纲、考点的提炼总结，注重对考试题型的变化和掌握，注重例题和习题的典型性和迁移性，避免随意性和孤立性。体现从基础到提高，由课内到课外，由综合创新再到中考和高考，实现从知识到能力的飞跃，使学生获得可持续发展的能力。



用东师绿卡 考北大清华

第 2 章

直线、平面、简单几何体

9.1 平面

第一课时

平面的有关问题及公理 1

知识清单

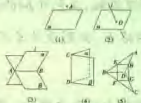
平面是数学中并建或不可定义而最基本的原始概念之一,它是从我们日常生活中见到的具体物体的面中抽象出来的,作为几何概念的面已不再具有这类物体的一切具体属性,它只有_____性、_____性、_____性。

知识 规律 方法

巩固 提高 练习

例题 1 如图,直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()

1. 用集合符号表示如下图中点、直线、平面之间的关系。



2. 已知直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()

- A. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. $A \in \alpha$, $A \in l$, $A \notin \alpha$
D. $A \in \alpha$, $A \in l$, $A \in \alpha$
3. 已知直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()
- A. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
D. $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$

梳理知识,脉络清晰,重点突出,是你预习课本的好帮手。

知识与问题相融,即学,即讲,即练,夯实基础,及时巩固解题方法。

整理知识,总结规律,点拨方法,围绕重点,突出难点,助学助教。

题型全面、新颖,难度适中,题量合理,兼顾基础与综合,结合训练本节所学内容有助于透彻理解和掌握知识。

本节综合练习

- 下列命题中,正确的是()
- A. 空间三点确定一个平面
B. 一条直线和一个点确定一个平面
C. 任意三点确定一个平面
D. 与一条直线相交的两条直线确定一个平面
2. 一条直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()
- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个
3. 三条直线两两相交,经过这三条直线的平面有()
- A. 0 个
B. 1 个
C. 2 个
D. 3 个
4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,与直线 AC 共面的棱有()
- A. 4 条
B. 5 条
C. 6 条
D. 7 条
5. 在空间中,下列命题错误的是()
- A. 经过三点可确定一个平面
B. 经过一条直线和这条直线外一点可确定一个平面
C. 经过两条平行线可确定一个平面
D. 经过两条相交直线可确定一个平面
6. 已知直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()
- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个
7. 已知直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()
- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个

习 题 课 一

知识 规律 方法

巩固 提高 练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, 且 $PA \perp \alpha$, 下列命题中,正确的是()

(1) 直线 AP 与平面 α 所成的角;
(2) 平面 PBC 与平面 ABC 所成的角。

分析: 第(1)问可用三垂线定理或三垂线定理的逆定理证明;
第(2)问可用三垂线定理或三垂线定理的逆定理证明。

2. 已知直线 l 与平面 α 相交于点 P ,下列命题中,正确的是()
- (1) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线只有一条;
(2) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;
(3) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有两条;
(4) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;
(5) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;
(6) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;
(7) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;
(8) 经过点 P 且垂直于平面 α 的直线有无数条;

依据教学实际灵活设置,体现知识间的联系,总结并提炼规律、方法、技巧,注重能力培养。

拓展链接,体验近年高考真题,即时自我评价,全面提升应试能力。

高考真题突破

1. (2007 北京) 已知 α 为平面, l 为直线,下列命题中,正确的是()
- A. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
D. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
2. (2007 天津) 已知 α 为平面, l 为直线,下列命题中,正确的是()
- A. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
D. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$

3. (2007 北京) 已知 α 为平面, l 为直线,下列命题中,正确的是()
- A. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
D. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
4. (2007 北京) 已知 α 为平面, l 为直线,下列命题中,正确的是()
- A. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
B. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$
C. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \in l$
D. 若 $l \subset \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin l$



目 录 CONTENTS

第9章 直线、平面、简单几何体/1

9.1 平 面/2

第一课时 平面的有关问题及公理/2

第二课时 公理2,公理3/4

本节综合练习/6

9.2 空间直线/7

第一课时 空间两条直线的位置关系
及平行直线/7

第二课时 异面直线/10

本节综合练习/14

9.3 直线与平面平行的判定和性质/15

第一课时 直线与平面的位置关系

直线与平面平行的判定/15

第二课时 直线和平面平行的性质/17

本节综合练习/19

9.4 直线与平面垂直的判定和性质/20

第一课时 直线与平面垂直的定义

直线与平面垂直的判定/20

第二课时 直线与平面垂直的性质、斜线
在平面内的射影、直线和平面
所成的角/22

第三课时 三垂线定理/26

本节综合练习/30

9.5 两个平面平行的判定和性质/31

第一课时 两个平面的位置关系

两个平面平行的判定/31

第二课时 两个平面平行的性质/33

本节综合练习/37

9.6 两个平面垂直的判定和性质/38

第一课时 二面角/38

第二课时 两个平面垂直的判定/42

第三课时 平面与平面垂直的性质/44

本节综合练习/49

习题课一/50

9.7 棱 柱/55

第一课时 棱柱的概念和性质/55

第二课时 棱柱的性质/58

本节综合练习/61

9.8 棱 锥/63

第一课时 棱锥的概念与性质/63

第二课时 棱锥的侧面积与体积,
多面体/68

本节综合练习/72

9.9 球/74

第一课时 球的概念和性质/74

第二课时 球的体积和表面积/78

本节综合练习/80

习题课二/82

◆本章综合测试◆/87

第10章 排列、组合和二项式定理/89

10.1 分类计数原理与分步计数原理/90

本节综合练习/93

10.2 排 列/95

第一课时 排列及排列数公式/95

第二课时 排列的综合运用/97

本节综合练习/101

10.3 组 合/102

第一课时 组合及组合数公式/102

第二课时 组合数的性质/105

第三课时 排列、组合的综合应用/107

本节综合练习/111



10.4 二项式定理/112

第一课时 二项式定理/112

第二课时 二项式系数的性质及应用/115

本节综合练习/119

习题课三/120

⇒本章综合测试/124

第11章 概率/126

11.1 随机事件的概率/127

第一课时/127

第二课时/129

本节综合练习/131

11.2 互斥事件有一个发生的概率/132

第一课时/132

第二课时/135

本节综合练习/137

11.3 相互独立事件同时发生的概率/138

第一课时/138

第二课时/140

第三课时/144

本节综合练习/146

习题课四/147

⇒本章综合测试/151

期末测试/153

参考答案



第9章 直线、平面、简单几何体

一、本章教材分析

三维空间是人类生活的现实空间,立体几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科,认识空间图形,培养和发展学生的空间想象能力、推理论证能力,运用图形语言进行交流的能力,以及化归转化的能力,既是高中数学教学的基本要求,也是学生继续学习的需要。

本章应掌握的主要内容如下:

1. 掌握平面的基本性质和平面的确定——三个公理、三个推论,证明有关共面、共线、共点的问题,证明若干个点共线问题的基本方法,是证明这些点是某两个平面的公共点;证明若干个点或若干条直线共面的问题,通常是根据确定平面的条件,由其中某些元素作出一个平面,再证明其他元素均在该平面内。

2. 掌握空间两直线的位置关系,异面直线的定义、性质和判定,异面直线所成的角和距离的概念及求法,求异面直线所成的角常采用“平移转化法”,异面直线的距离,只要求会计算已给出公垂线时的距离,也可以用等价转化法求线面距离、点面距离、三棱锥的高等,掌握反证法的证明思路与步骤,特别是异面直线的证明用反证法较多。

3. 将空间问题等价转化为平面问题是解决立体几何问题的常用方法,也就是降维思想。

4. 掌握直线与平面平行、垂直,平面与平面垂直、平行的判定定理和性质定理,特别是垂直问题,是立体几何的关键内容。

5. 理解棱柱(直棱柱、斜棱柱、正棱柱、平行六面体)、棱锥(正棱锥)的概念,了解它们间的包含关系;掌握正棱柱、正棱锥、球(尤其是正方体、正四面体、球)的性质,并利用它们解题。

6. 掌握棱柱的平行于底面的截面性质并应用解题,特别是截面面积与底面面积的比与高的比的关系,体积之比与高的比的关系。

7. 掌握直棱柱、正棱锥、球的侧(表)面积公式及其应用,熟练掌握体内与高、斜高、侧棱有关的直角三角形的计算,掌握棱柱、棱锥、球的体积公式,了解斜棱柱的侧面积等于它的直截面的周长与侧棱长的乘积,它的体积等于它的直截面面积与侧棱长的积等体积计算的变式。

8. 复杂的几何体都是由简单的几何体组成的,要注意“割”与“补”等方法的应用(常用方法是“割成锥,补成锥”),注意改变观察几何体的角度,得到最佳求积法,注意等积变形的应用。

9. 要善于构造正方体、长方体、正四面体、球等特殊几何体解题。

二、学法建议

本章的学习目标是掌握平面的基本性质,空间的线线、线面、面面的位置关系,以及几种最基本的简单几何体、平行和垂直是位置关系研究的重点,建立正确的空间观念,提高空间想象能力和逻辑思维能力是难点。

须注意:

1. 注意立体图形与平面图形的区别,要善于将立体图形转化为平面图形;
2. 要注意提高画图、识图、解释图的水平,运用集合的观点,准确建立图形、文字、符号三种数学语言的联系;
3. 由于本章概念很多,要注意对它们及时加以整理总结,找出它们的联系,正确地运用所学概念、定理、公式等进行合理的论证和计算。

三、高考热点

从近几年的高考来看,对立体几何知识的考查还是比较稳定的,分值约占整个试卷的15%~20%,题型一般是“两小一大”,即两个选择题(或一个选择题一个填空题)加上一个大题,主要考查学生的空间想象能力,驾驭几何语言的能力,逻辑思维能力以及推理和运算的能力等,同时也有考查与其他知识交会的综合应用知识的能力,如与三角、向量、函数、不等式等知识的综合等。近年来,立体几何高考命题形式比较稳定,题目难易适中,常常立足于棱柱、棱锥和正方体,因此在学习时应该重视以多面体为依托,重视多面体性质的应用,才能发现隐蔽条件,利用隐蔽条件解题。



9.1 平面

第一课时 平面的有关问题及公理 1



知识清单

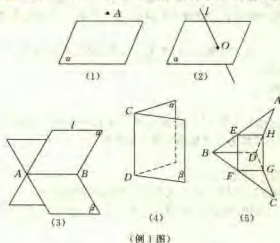
1. 平面是数学中只描述而不加定义的最基本的原始概念之一,它是从我们日常生活中见到的具体的平的面中抽象而来的.作为几何概念的平面已不再具有直观物体的一切具体属性,它具有_____性.平面无_____,无_____.
2. 平面的画法:通常画_____来表示平面.有时根据需要也可用其他平面图形表示平面,如_____,_____等.
3. 平面的表示方法:平面一般用希腊字母_____,_____,_____,...来表示,还可以用平行四边形的_____来表示.
4. 立体几何中,被平面遮住的部分可画成_____或不画,如果辅助线被遮住也同样处理.
5. 公理 1:如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线上_____都在这个平面内.它是判断_____的依据.

知识 规律 方法

巩固 提高 练习

一 图形语言与符号语言的互化

例 1 用集合符号表示下图中点、直线、平面之间的关系.



(例 1 图)

分析:点与直线,点与平面是元素与集合的关系,直线与平面,平面与平面,直线与直线是集合与集合的关系.

解:上图中:

- (1) $A \in \alpha$; (2) $l \cap \alpha = O$; (3) $\alpha \cap \beta = AB$, $l \subset \alpha$; (4) $\alpha \cap \beta = CD$; (5) 面 $ABD \cap$ 面 $CBD = BD$, 面 $CBD \cap$ 面 $EFGH =$

1. 若 A 表示点, a 表示直线, α, β 表示平面, 则下列命题中, 错误的表述是().

- A. $a \subset \alpha, A \in a \Rightarrow A \in \alpha$
B. $a \not\subset \alpha, A \in a \Rightarrow A \notin \alpha$
C. $A \in \alpha, A \in \beta, a \cap \beta = a \Rightarrow A \in a$
D. $A \in \alpha, A \notin a \Rightarrow a \not\subset \alpha$

2. 将命题“平面 α 内的直线 l 上的一点 P 必在 α 内”用符号语言表述是().

- A. $P \in l, l \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$
B. $P \subset \alpha, l \subset \alpha \Rightarrow P \subset \alpha$
C. $P \in l, l \subset \alpha \Rightarrow P \subset \alpha$
D. $P \in l, l \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$

3. 按给定的要求, 下图中图形画得正确的是().

- A 中: $a \subset \alpha$;
B 中: $\alpha \cap \beta = A$;
C 中: $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = O$;
D 中: $A \in \alpha, A \in \beta, a \cap \beta = EF$.



A



B



$FG, EF \cap \text{面} ABD = E, EF \cap \text{面} CBD = F, HG \cap \text{面} ABD = H, HG \cap \text{面} CBD = G$.

例2 若点 Q 在直线 b 上, b 在平面 β 内, 则 Q, b, β 之间的关系, 可记做().

- A. $Q \in b \in \beta$ B. $Q \in b \subset \beta$ C. $Q \subset b \subset \beta$ D. $Q \subset b \in \beta$

分析: 本题考查用符号表示点、线、面之间的关系, 关键是弄清点与直线是元素与集合的关系, 直线与平面是集合与集合之间的关系.

解: $\because$ 点 Q 在直线 b 上, $\therefore Q \in b$.

又 $\because$ 直线 b 在平面 β 内, $\therefore b \subset \beta, \therefore Q \in b \subset \beta$.

答案为 B.



C



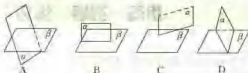
D

(第3题图)

评注: 线是点的集合, 面也是点的集合, 点与线、面应是元素与集合的关系, 而线与面的关系应为集合与集合之间的关系.

二 图形的画法

例3 下图表示的两个相交平面中, 画法正确的是().



(例3图)

分析: 画两个平面相交时, 应画出它们的交线, 并且被遮住的部分要画成虚线或不画.

图 A 中没有画出平面 α 与平面 β 的交线, 另外被遮住的部分也没有画成虚线, 因此 A 的画法不正确. 同样可知 B, C 的画法也不正确, 故应选 D.

答案 D

三 对平面的理解

例4 已知下列四个命题:

- ① 铺得很平的一张白纸是一个平面;
- ② 一个平面的面积可以等于 6 m^2 ;
- ③ 平面是矩形或平行四边形形状;
- ④ 两个平面重合在一起比一个平面厚.

其中正确命题的个数是().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

分析: 平面没有厚度, 故④假; 平面是无限延展的, 故①②③假, 所以选 A.

答案 A

评注: 平面是从我们的生活中抽象出来的理想化的几何元素, 它具有无厚度、无大小、无限延展的特点.

4. 下图是平面图形还是空间图形?



(第4题图)

5. 下列说法中, 表示平面的是().

- A. 水面 B. 镜面
C. 板面 D. 铅垂面

6. 下列说法正确的有().

- ① 铺得很平的一张白纸就是一个平面;
 - ② 一个平面的面积可以等于 100 m^2 ;
 - ③ 通常 200 页的书要比 20 页的书厚一些, 那么 200 个平面重合在一起时, 一定会比 20 个平面重合在一起要厚一些的;
 - ④ 平面是矩形或者是平行四边形形状的.
- A. 0 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

7. 我们用—个平行四边形 $ABCD$ 来表示一个平面时, 这个平面可以记做①平面 $ABCD$; ②平面 AC ; ③平面 AB ; ④平面 BC ; ⑤ $\triangle ABC$, 其中正确的说法有().

- A. 2 种 B. 3 种
C. 4 种 D. 5 种



第二课时 公理 2, 公理 3



1. 公理 2: 若两个平面有一个公共点, 那么它们还有其他公共点, 且所有这些公共点的集合是_____ , 其符号表示为 $P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow$ _____.

2. 公理 2 有五点作用: ①判断两平面相交; ②证明点在线上; ③证明三点共线; ④_____ ; ⑤画两平面的交线.

3. 公理 3: 经过_____ 的三点, 有且只有一个平面.

4. 公理 3 的推论 1: 经过一条直线和这条直线外一点有且只有一个平面.

推论 2: 经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论 3: _____.

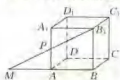
5. 公理 3 及其三个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据, 是证明点、线共面的依据, 也是作截面、辅助平面的依据.

知识 规律 方法

巩固 提高 练习

一 画两平面的交线

例 1 如下图, 在正方体 AC_1 中, P 是 AA_1 的中点, 求证平面 PB_1C_1 与平面 $ABCD$ 相交, 并确定这两个平面的交线.



(例 1 图)

分析: 证明两个平面相交, 只要能找到这两个平面的一个公共点即可. 确定两个平面的交线, 应找到这两个平面的两个公共点, 两个公共点的连线就是它们的交线.

解: 由于 A, B, B_1, P 共面, 延长 B_1P, BA , 因 P 是 AA_1 的中点, 有 $B_1P \cap BA = M$. 因 $B_1P \subset$ 平面 $PB_1C_1, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $M \in$ 平面 PB_1C_1 且 $M \in$ 平面 $ABCD$, 这说明平面 PB_1C_1 与平面 $ABCD$ 有一个公共点 M , 故平面 PB_1C_1 与平面 $ABCD$ 相交.

又由于 C_1P 与 CA 共面, 且直线 C_1P 与 CA 相交, 设 $C_1P \cap CA = N$. 因 $N \in C_1P$, 而 $C_1P \subset$ 平面 PB_1C_1 , 故 $N \in$ 平面 PB_1C_1 ; 又 $N \in CA$, 而 $CA \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $N \in$ 平面 $ABCD$. 这样点 N 也是平面 PB_1C_1 与平面 $ABCD$ 的一个公共点. 连接 MN , 则直线 MN 就是平面 PB_1C_1 与平面 $ABCD$ 的交线.

悟评注: 确定两平面的交线, 只需找到它们的两个公共点, 连接起来即可.

1. 如图所示, 在空间四边形 $ABCD$ 的各边 AB, BC, CD, DA 上分别取 E, F, G, H 四点, 如果 EH, FG 交于一点 P , 则().

- A. P 一定在直线 BD 上
- B. P 一定在直线 AC 上
- C. P 在直线 AC 或 BD 上
- D. P 既不在直线 BD 上, 也不在直线 AC 上



(第 1 题图)

2. 如图所示, 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, 点 $A \in \alpha$, 点 $B \in \alpha$, 点 $C \in \beta$, 且 $C \in l$. 又 $AB \cap l = R$, A, B, C 三点确定的平面为 γ , 则 $\beta \cap \gamma$ 等于().

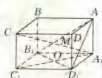
- A. 直线 AC
- B. 直线 BC
- C. 直线 CR
- D. 以上都不对



(第 2 题图)

3. 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是长方体, O 是 B_1D_1 的中点, 直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M , 则下列结论错误的是().

- A. A, M, O 三点共线
- B. A, M, O, A_1 四点共面
- C. A, O, C, M 四点共面
- D. B, B_1, O, M 四点共面



(第 3 题图)



一、共线问题

例2 已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外, $AB \cap \alpha = P$, $AC \cap \alpha = R$, $BC \cap \alpha = Q$, 如下图.

求证: P, Q, R 三点共线.



(例2图)

分析:应用公理2, 选择恰当的平面, 只要证明点都是某两个平面的公共点, 即可推出三点在两个平面的交线上.

证明: $\because AB \cap \alpha = P, \therefore P \in AB, P \in \text{平面 } \alpha$.

又 $AB \subset \text{平面 } ABC, P \in \text{平面 } ABC$.

$\therefore$ 由公理2可知:点 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

同理可证 Q, R 也在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

$\therefore P, Q, R$ 三点共线.

二、共面问题

例3 已知四条直线两两相交(每两条都相交), 且不共点, 求证: 这四条直线在同一平面内.

分析:对于文字的叙述型命题, 一定要先写出已知、求证, 画出图形来. 这道题是要证“共面”, 证明时, 可先由部分元素确定一个平面, 然后证明其余元素也在这个平面内.

四条直线两两相交且不共点, 可分为两种情况:
①有三线共点的情况; ②无三线共点的情况. 因此, 应分类进行证明.

已知: 四条直线 a, b, c, d 两两相交.

求证: a, b, c, d 四条直线在同一

平面内.

证明:①若 a, b, c 三线共点于 O , 如图(1)所示:

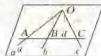
$\because O \in d, \therefore$ 经过 d 与点 O 有且仅有一个平面 α .

$\because A, B, C$ 分别是 d 与 a, b, c 的交点,

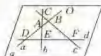
$\therefore A, B, C$ 三点在平面 α 内.

由公理1知 a, b, c 都在平面 α 内, 即 a, b, c, d 共面.

②若 a, b, c, d 无三线共点, 如图(2)所示:



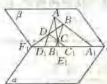
(1)



(2)

(例3图)

4. 如下图, 设 $\square ABCD$ 的各边和对角线所在的直线与平面 α 依次相交于 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, 求证: $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 六点在一条直线上.

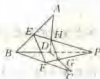


(第4题图)

评注:证明若干点共线问题, 找出相交的平面与平面的交线, 由公理2, 证明这些点都在这两个平面的交线上即可.

5. 已知一条直线和三条平行直线都相交, 求证: 四条直线在同一平面内.

6. 如下图, 平面四边形 $EFGH$ 的顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四条边上, 若 EH 不平行于 FG , 求证: 直线 EH, BD 和 FG 相交于一点.



(第6题图)

评注:共面问题的证明常用下列方法:

- (1) 先确定一个平面, 再证明相交的点或线在这个平面内;
- (2) 先证两直线或线在多个平面, 再证明这些平面重合;



$\because a \cap b = A, \therefore$ 经过 a, b 有且仅有一个平面 α .

$\therefore B, C \in \alpha$, 由公理 1 知 $c \subset \alpha$.

同理, $d \subset \alpha$, 从而有 a, b, c, d 共面.

综上所述, 四条直线两两相交, 且不共点, 这四条直线必共面.

四 平面的个数的确定

例 4 已知: a, b, c, d 是两两平行的四条直线.

试求: 由 a, b, c, d 四条直线确定的平面的个数.

分析: 应分三种情况进行讨论: ① 四线共面; ② 四线不共面, 但四线中存在三线共面; ③ 四线中无三线共面, 然后利用推论 3 进行求解.

解: ① 当这四条两两平行的直线共面时, 仅确定一个平面;

② 当这两两平行的直线中存在着三线共面, 而四条不共面时, 不妨设 a, b, c 共面, 而 d 与 a, b, c 各确定一个平面, 再加上 a, b, c 确定的平面, 共确定四个平面;

③ 当这四条两两平行的直线无三线共面时, a 与 b, a 与 c, a 与 d, b 与 c, b 与 d, c 与 d 为六对平行直线, 确定六个面.

评注: 对这类问题, 要注意结合几何图形或采用列举法, 全面考虑每一种可能情况, 做到无遗漏.

(3) 用反证法.

在解决某些数学问题时, 需进行分类讨论, 这时应做到“不重”, “不漏”, 理解题意, 依据公理, 合理分类, 分清各种位置的可能性, 是得到正确答案的关键.

7. 空间三个平面如果每两个都相交, 那么它们的交线的条数是().

A. 一条 B. 两条 C. 三条 D. 一条或三条

8. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?

9. 三条直线两两相交, 可以确定平面的个数是().

A. 1 个 B. 1 个或 2 个

C. 1 个或 3 个 D. 3 个

10. 不共面的四点可以确定几个平面?

● ● ● 本节综合练习 ● ● ●

1. 下列命题中, 正确的是().

- A. 空间三点确定一个平面
B. 一条直线和一个点确定一个平面
C. 任意三点必共面
D. 与同一直线相交的两条直线共面

2. 一条直线 l 及在 l 外的三点所确定的平面个数为().

- A. 1 个 B. 3 个
C. 4 个 D. 以上答案都可能

3. 三条直线两两相交, 经过这三条直线的平面有().

- A. 0 个 B. 1 个 C. 0 个或 1 个 D. 3 个

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 与对角线 A_1C 共面的棱共有().

- A. 4 条 B. 5 条 C. 6 条 D. 7 条

5. 在空间中, 下列命题错误的是().

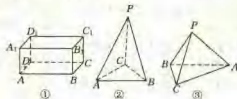
- A. 圆上三点可确定一个平面
B. 圆心和圆上两点可确定一个平面
C. 四条平行线不能确定五个平面

D. 不共线的五点确定五个平面, 则必有三点共线

6. 在空间中, 可以确定一个平面的条件是().

- A. 三个点
B. 两条直线
C. 三条直线, 其中的一条与另外两条直线分别相交
D. 两两相交的三条直线
E. 三条直线, 它们两两相交, 但不交于同一点

7. 下面 4 个与图相关的命题:



(第 7 题图)

(1) 图①中有三条虚线, 被遮挡的面有三个;

(2) 图②中被遮挡的面有三个;

(3) 图③中被遮挡的面有一个;



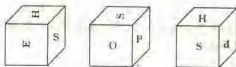
(4)图①中长方体的底面 $ABCD$ 与图②中三棱锥的底面 ABC 所在的平面均可以表示为平面 AC .

其中正确命题的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

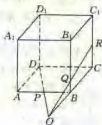
8. $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \gamma \cap \alpha = c$. 若 $a \cap b \cap c = P$, 则 α, β, γ 三个平面将空间分成_____个部分.

9. 有一种骰子, 每一面上都有一个英文字母, 下图是从三种不同角度看同一枚骰子的情形. 请问: H 反面的字母是什么?



(第9题图)

10. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R 分别在棱 AB, BB_1, CC_1 上, 且 DP, RQ 相交于点 O . 求证: O, B, C 三点共线.



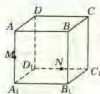
(第10题图)

11. 如下图, 正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , M, N 分别是 AA_1, D_1C_1 的中点, 过 D, M, N 三点的平面与正方体下底面相交于直线 l .

(1)画出直线 l 的位置;

(2)设 $l \cap A_1B_1 = P$, 求 PB_1 的长;

(3)求 D_1 到 l 的距离.



(第11题图)

9.2 空间直线

第一课时 空间两条直线的位置关系及平行直线



1. 两条直线的位置关系:

按是否共面分为 $\begin{cases} \text{共面直线} \begin{cases} \text{_____} \\ \text{_____} \end{cases} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

按公共点个数分为 $\begin{cases} \text{只有一个公共点: _____} \\ \text{无公共点: _____} \end{cases}$

2. 异面直线是指_____. 画异面直线时通常用平面衬托法.

3. 分别在两个平面内的两条直线_____异面直线. (填“是”、“不是”或“不一定是”)

4. 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则_____. (公理4)

5. 若一个角的两边与另一个角的两边分别平行且方向相同, 那么这两个角_____. (等角定理)

6. 若两条相交直线与另两条相交直线分别平行, 那么这两组直线所成的_____相等. (等角定理的推论)

7. 空间四边形是指_____的四边形.



知识 规律 方法

巩固 提高 练习

一 两条直线间的位置关系

例1 a, b, c 是空间三条直线, 下面给出四个命题:

① $a \perp b, b \perp c$, 则 $a \parallel c$;

② 若 a, b 是异面直线, b, c 是异面直线, 则 a, c 也是异面直线;

③ 若 a, b 相交, b, c 相交, 则 a, c 也相交;

④ 若 a, b 共面, b, c 共面, 则 a, c 也共面.

其中真命题的个数是().

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

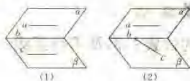
分析: 本题考查了两条直线的位置关系, 应分析出每个条件所对应的可能情况, 然后加以判断, 结合图形是一种常用的方法.

解: ① 由 $a \perp b, b \perp c$ 可知, a 与 c 平行、相交、异面都有可能, 故①错.

② 由条件可知, 与 b 异面的直线 a 与 c 之间三种位置关系都有可能, 故②错.

③ 若 a, b 相交, b, c 相交, 可以推断 a 与 c 三种位置关系都有可能, 故③错.

④ 由 a, b 共面, b, c 共面, 则可得 a, c 可能共面, 也可能异面, 如下图(1)所示, a 与 c 共面; 如下图(2)所示, a 与 c 异面, 故④错.



(例1图)

答案: D

● 备注: 在平面几何中成立的推理、定理、命题等, 在空间不一定成立, 要认真分析.

二 异面直线的判定

例2 已知不共面的直线 a, b, c 相交于 O 点, M, P 是直线 a 上两点, N, Q 分别是 b, c 上的点, 求证: MN 和 PQ 是异面直线.

分析: 若 MN, PQ 不共面, 则为异面直线; 若 MN, PQ 共面, 则为相交直线或平行直线.

证明: 假设 MN, PQ 在同一平面 α 内, 则 $M \in \alpha, P \in \alpha, N \in \alpha, Q \in \alpha, \therefore a \subset \alpha$.

1. 两条直线不平行是这两条直线异面的().

A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 以上都不对

2. 在空间中, 有下列命题: ①有两组对边相等的四边形是平行四边形; ②四边相等的四边形是菱形; ③平行于同一条直线的两直线平行; ④有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等, 其中命题为真的个数是().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 不重合的两条直线 a, b 与直线 l 都相交成 θ 角, 则 a, b 的位置关系是().

A. 平行
B. 平行或相交
C. 异面或平行或相交
D. 不能确定

4. 在空间中, 下列命题正确的是().

A. 若两条直线和第三条直线所成的角相等, 则这两直线必平行

B. 若两条直线都和第三条直线垂直, 则这两条直线平行

C. 若两条直线都和第三条直线平行, 则这两条直线平行

D. 一个角的两边平行于另一个角的两边, 则这两个角相等

5. 平面 $\alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 a, b 是异面直线, 则 l 与 a, b 的关系是().

A. l 与 a, b 都不相交
B. l 至少与 a, b 之一相交
C. l 至少与 a, b 中的一条相交
D. l 与 a, b 都相交

6. 三个角是直角的四边形().

A. 一定是矩形
B. 一定是空间四边形
C. 是四个角为直角的平面四边形
D. 不能确定

7. 如果把两条异面直线看成一对, 那么在正方体的十二条棱所在的直线中, 共有几对异面直线? ()

A. 8 对 B. 16 对 C. 24 对 D. 32 对

8. 已知: 如下图, $a \cap \beta = a, b \subset \beta, a \cap b = A$, 且 $c \subset \alpha, c \parallel a$. 求证: b, c 为异面直线.



(第8题图)



$\because O \in a, \therefore O \in \alpha$.

又 $N \in a, Q \in a, N \in b, Q \in c$,

$\therefore b \subset \alpha, c \subset \alpha$.

$\therefore a, b, c$ 在同一平面 α 内, 与已知 a, b, c 不共面矛盾.

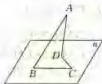
$\therefore MN, PQ$ 为异面直线.

评注: 此题采用了反证法. 其步骤为 (1) 反设 (否定结论); (2) 归罪——由所作假设出发, 连同已知条件, 通过推理, 导出矛盾; (3) 存真——由于矛盾的产生是由于所作的假设错误, 所以原命题正确.

9. 设 A, B, C, D 为空间四点, 且 AB 与 CD 异面, 如图, 求证:

(1) AD 与 BC 异面;

(2) AC 与 BD 异面.

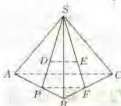


(第9题图)

平行线的证明

例3 已知: 如图, S 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, D, E 分别是 $\triangle SAB$ 和 $\triangle SBC$ 的重心.

求证: $DE \parallel AC$.



(例3图)

分析: 重心是三角形三条中线的交点. 连 SD, SE 并延长交 AB, BC 于 P, F 两点, 由 $\frac{SD}{SP} = \frac{SE}{SF} = \frac{2}{3}$, 可得 $DE \parallel PF$. 又 P, F 为 AB, BC 的中点, 知 $PF \parallel AC$.

证明: 分别连接 SD, SE 并延长交 AB 于 P 点, 交 BC 于 F 点, 连接 PF .

$\because D, E$ 分别是 $\triangle SAB$ 和 $\triangle SBC$ 的重心,

$\therefore P, F$ 分别是 AB, BC 的中点.

$\therefore PF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线. $\therefore PF \parallel AC$.

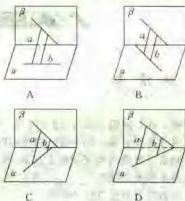
$\therefore \frac{SD}{SP} = \frac{SE}{SF} = \frac{2}{3}$.

$\therefore DE \parallel PF, \therefore DE \parallel AC$.

10. 若直线 a, b, c 满足 $a \parallel b, a$ 与 c 异面, 则 b 与 c ().

- A. 一定是异面直线 B. 一定是相交直线
C. 不可能是平行直线 D. 不可能是相交直线

11. 下图, 直线 a 与 b 是平行的关系只可能是 ().



(第11题图)

评注: 思维障碍是不会利用重心的性质将问题转化为 DE 与 PF 平行, 从而不能将关键的辅助线 PF 作出.

综合应用

例4 如图, 空间四边形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点.

(1) 求证: $EFGH$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AC = BD$, 求证: $EFGH$ 是菱形;

(3) 如果 $AC \perp BD$, 求证: $EFGH$ 是矩形.



(例4图)

分析: 判断平行四边形只须找一组对边平行且相等或两组对边分别平行, 邻边相等的平行四边形是菱形, 邻边垂直的平行四边形是矩形.

证明: (1) 在 $\triangle ABD$ 中, $\because E, H$ 为 AB, AD 的中点,

12. 线段 AB, CD 在两面异面直线上, M, F 分别为 AB, CD 的中点, 则一定有 ().

A. $MF = AC + BD$ B. $MF = \frac{1}{2}(AC + BD)$

C. $MF < \frac{1}{2}(AC + BD)$ D. $MF > \frac{1}{2}(AC + BD)$

13. 如图, 四边形 $ABCD$ 是空间四边形, E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点. 若 $BD = 2, AC = 4$, 那么 $EG^2 + HF^2$ 的值确定吗? 若确定求出其值, 若不确定说明理由.



(第13题图)



$\therefore EH = \frac{1}{2}BD$ 且 $EH \parallel BD$. 同理在 $\triangle BCD$ 中, $EG \parallel$

$BD, FG = \frac{1}{2}BD$.

$\therefore EH \parallel FG$ 且 $EH = FG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

(2) $\because AC = BD$,

由(1)知 $EF = HG = \frac{1}{2}AC, EH = FG = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore EH = HG = GF = FE$.

$\therefore EFGH$ 是菱形.

(3) $\because AC \perp BD$, 由(1)知 $EF \parallel AC, EH \parallel BD$,

$\therefore EF \perp EH$.

又 $\because EFGH$ 是平行四边形, $\therefore EFGH$ 是矩形.

14. 下列命题正确的是().

- ① 空间四边形的两组对边分别相等, 那么这个四边形是平行四边形;
 - ② 空间中平行于同一直线的两直线平行;
 - ③ 空间中, 两个角两边分别平行, 则这两个角相等或互补;
 - ④ 连接空间四边形各边中点的四边形一定是梯形.
- A. ①② B. ②③
C. ②④ D. ③④

*** 评注: 此题在证明过程中运用了空间平行直线的传递性和异面直线所成角的定义.

第二课时 异面直线



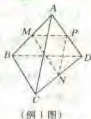
知识清单

1. 直线 a, b 是异面直线, 经过空间任一点 O , 作直线 a', b' , 并使 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 我们把直线 a' 和 b' 所成的角叫做异面直线 a 和 b 所成的角, 其范围是_____.
2. 若两条异面直线所成的角是直角, 我们就说这两条异面直线_____, 记做_____.
3. 和两条异面直线都_____的直线, 叫做两条异面直线的公垂线; 两条异面直线的_____叫做两条异面直线的距离.
4. 两条异面直线的公垂线有_____条, 和两条异面直线都垂直的直线有_____条.
5. 求两条异面直线所成的角的一般步骤:
(1) 用_____法作出异面直线所成的角(或其补角);
(2) 证明所作角是异面直线所成的角(或其补角);
(3) 把所作角集中到三角形中, 通过解三角形(多用余弦定理, 当余弦值为负值时, 说明所求角为异面直线所成的角的补角)求出角.
(4) 作出结论.

知识 规律 方法

一 求角度问题

例1 如右图, 空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 10, BD = 6, M, N$ 分别为 AB, CD 的中点, $MN = 7$. 求异面直线 AC, BD 所成的角.



(例1图)

分析: 作平行线, 找与异面直线所成的角相等的平面角, 将空间问题转化为平面问题.

解: 取 AD 中点 P , 连接 MP, NP .

$\because M, N$ 分别为 AB, CD 中点,

巩固 提高 练习

1. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

A_1A 和 D_1C_1 所成的角是_____.

AC 和 A_1B_1 所成角是_____.

DA_1 和 AC 所成角是_____.

AC 和 D_1B_1 所成角是_____.

AD_1 和 DC_1 所成角是_____.



(第1题图)

2. 若 $\angle AOB = 120^\circ$, 直线 $a \parallel OA$, a 和 OB 异面, 那么 a 和 OB 所成角是().

- A. 120° B. 60°
C. 60° 或 120° D. 不能确定