非线性方程的单调迭代方法

王文霞 著

中国科学技术出版社

非线性方程的单调迭代方法

王文霞 著

江苏工业学院图书馆
藏书章

中国科学技术出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

非线性方程的单调迭代方法 / 王文霞著.-北京:中国科学技术出版社,2007.3

ISBN 978-7-5046-4632-3

Ⅰ.非… Ⅱ.王… Ⅲ.非线性方程-单调-迭代法 Ⅳ.O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 025963 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志,未贴防伪标志的为盗版图书。

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:010-62103210 传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷
★
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:11.125 字数:200 千字
2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5046-4632-3/O·125
印数:1-1000 册 定价:28.00 元

摘　要

在本书中，我们利用上下解及单调迭代方法讨论了Banach空间中四类非线性方程的解的存在性、唯一性及迭代逼近. 其一为具有凹(凸)性的非线性算子方程; 其二为具有凹–凸性的非线性混合单调算子方程; 其三为Banach空间中的非线性积分–微分方程; 其四为Banach空间中的非线性脉冲积分–微分方程.

本书共分为五章. 在第一章中，简要介绍了Banach空间中的锥及其所诱导的半序理论.

在第二章中，给出了诸凹(凸)算子(包括u_0–凹(凸), φ–凹(凸), α–凹(凸)及序凹(凸)算子等)的关系. 讨论了各类凹(凸)型的非线性、非紧单调算子存在唯一正不动点的充分条件及充分必要条件，并讨论了具有凹(凸)性的积分方程及微分方程正解的存在唯一性问题.

在第三章中，讨论了凹–凸型的非线性、非紧混合单调算子存在唯一正不动点的充分条件及充分必要条件，凸–凹型的非线性、非紧混合单调算子正不动点存在性及唯一性，并讨论了凹–凸型的积分方程及椭圆型微分方程正解的存在唯一性问题.

在第四章中，讨论了含有非线性算子的一阶混合型积分–微分方程的初值问题及周期边值问题的最大最小解的存在性，并利用所获得的结果讨论了含有非线性一阶微分项的二阶微分–积分方程的解的存在性问题.

在第五章中，讨论了含有非线性算子的一阶混合型脉冲积分–微分方程的初值问题及周期边值问题的最小最大解的存在性，并利用所获得的结果讨论了含有非线性一阶微分项的二阶脉冲微分–积分方程的解的存在性问题.

前　言

随着人类对自然、对世界的认识不断深入，在20世纪五六十年代"非线性科学"得到了飞速的发展，从那时起至今，非线性科学始终是国内外科学研究的热点. 作为非线性科学研究的基础理论和工具的非线性泛函分析，在20世纪六七十年代蓬勃兴起. 其基本方法及成果广泛地渗透到数理、生化、经管以及工程技术等诸多学科，并影响着他们的发展和应用. 它所研究的的核心问题是非线性方程的解的存在性问题.

近年来，在理论及应用中出现了大量的非线性问题是缺乏连续性和紧性的，比如，无穷维空间中的微分方程和积分方程、无界域上的各种方程大都不具紧性，而与脉冲、突变、断裂等问题相联系的方程大都不具有连续性. 在不具连续性或紧性的非线性算子的研究中，有一类非常重要的算子就是上世纪七十年代相继出现的凹凸算子. 由于这些算子不仅有重大的理论价值，而且很多结论可直接解决工程技术如核技术、航天航空技术、生化技术等具体问题，人们对这类算子的研究给予了极大的关注.

显然，在不具连续性或紧性的非线性算子方程的研究中，常用的非线性方法–拓扑度方法、变分方法不再适用. 取而代之的有效方法是半序方法. 本书利用上下解及单调迭代方法系统讨论了几类不具连续性或紧性的非线性方程的解的存在性及其存在性、唯一性及迭代逼近等问题.

我们系统讨论了具有凹(凸)性的非线性非紧算子方程

$$Ax = x \quad \text{及} \quad A(x,x) = x$$

的单调迭代求解；系统讨论了两类非线性非紧微分算子方程的单调迭代求解，一类是Banach空间中的非线性积分–微分方程，另一类是Banach空间中的非线性脉冲积分–微分方程.

本书的主体内容是在作者博士毕业论文的基础上，溶入了作者近年来的研究成果. 为了内容上的完整性和系统性，本书也精心选用了其他学者某些成果.

由于作者水平所限，书中难免出现一些不妥和错误，敬请读者指正.

王文霞

2006年10月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第一章 Banach空间中的锥与半序理论简介

单调迭代方法是研究非线性方程解的存在问题的一类重要方法，它的基础为半序理论. 本章主要介绍实Banach空间中锥的概念以及由锥所诱导的半序，并介绍了正规锥、正则锥、极小锥以及强极小锥等基本概念及其基本性质.

§1.1 锥与半序

设E是一个Banach空间，θ是E中的零元素，P是E中的闭凸子集.

定义1.1.1 P称为E中的锥, 若P满足如下条件:
(i) $x \in P, \lambda \geq 0$, 则$\lambda x \in P$;
(ii) $x \in P, -x \in P$, 则$x = \theta$.
用P°表示P的内点集. 如果$P^\circ \neq \phi$, 则称P是一个体锥.

通过锥P我们可以在E中引入半序：$\forall x, y \in E$, 如果$y - x \in P$, 则称x小于等于y, 记为$x \leq y$, 并记$x \leq y, x \neq y$为$x < y$; 当P是体锥时，如果$y - x \in P^\circ$, 则记$x \ll y$.

注1.1.1 容易证明，上述引入的半序关系满足如下性质：对任意的$x, y \in E$,
(1) 若$x \leq y, \lambda \geq 0$, 则$\lambda x \leq \lambda y$.
(2) 若$x \leq y$, 则$-x \geq -y$.
(3) 设$\{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\} \subset E, x_0, y \in E$. 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n \leq y (n = 1, 2, \cdots)$, 则$x_0 \leq y$.

定义1.1.2 设P是E的锥，则称

$$P^* = \{f \in E^* \mid f(x) \geq 0, \forall x \in P\}$$

为P的对偶锥.

定理1.1.1 设P是E的锥，则下列诸结论成立:
(1) $x_1 \notin P \Rightarrow \exists f_1 \in P^*, s.t., f_1(x_1) < 0$;
(2) $x_2 > \theta \Rightarrow \exists f_2 \in P^*, s.t., f_2(x_2) > 0$;
(3) $x \in P \Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall f \in P^*$;
(4) 设P是体锥. 则$x \in P^\circ \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall f \in P^* \setminus \{\theta\}$;
(5) 若E可分，则$\exists f_0 \in P^*, s.t., f_0(x) > 0, \forall x \in P \setminus \{\theta\}$;
证明 (1) 由第二凸集分离定理，存在$f_1 \in E^*$及$c \in R$, 使得

$$f_1(x_1) < c \ \text{且}\ f_1(x) > c, \ \forall x \in P$$

由于$c < f_1(\theta) = 0$, 故$c < 0$, 从而$f_1(x_1) < 0$.

以下证明$f_1 \in P^*$. 对$\forall x \in P$, 因为$nx \in P, n = 1, 2, \cdots$, 从而$f_1(nx) > c$, 即

$$f_1(x) > \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

在上式中令$n \to \infty$有，$f_1(x) \geq 0$. 故$f_1 \in P^*$.

(2) 由$x_2 > \theta$有$-x_2 \notin P$. 根据结论(1)存在$f_2 \in P^*$, 使得$f_2(x_2) > 0$.

(3) 充分性由结论(1)显然; 而由定义1.1.2容易看到必要性成立.

(4) “$\Rightarrow$” 设$x \in P^\circ$. 于是存在$r > 0$ 使得

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leq r\} \subset P$$

从而

$$x \pm rz \geq \theta, \forall z \in E, \|z\| \leq 1$$

由此可知，对$\forall f \in P^* \backslash \{\theta\}$, 有$f(x) \geq r|f(z)|$, $\forall z \in E, \|z\| \leq 1$, 故$f(x) \geq r\|f\| > 0$.

“$\Leftarrow$” 若$x_0 \notin P^\circ$. 令

$$P_1 = \{x \in E \mid x = tx_0, t \geq 0\}$$

显然P_1也是E中的锥，且$P^\circ \cap P_1 = \emptyset$. 于是由凸集第一分离定理，$\exists f_0 \in E^*, f_0 \neq \theta$及$c_0 \in R$, 使得

$$f_0(x) \leq c_0(\forall x \in P_1); \quad f_0(x) \geq c_0(\forall x \in P)$$

由于$\theta \in P \cap P_1$, 故$c_0 = 0$, 从而$f_0(x_0) \leq 0$, 矛盾!

(5) 令$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. 因为$E$可分，故存在可数集$F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} (\subset B)$ 在B中稠密. 对$\forall f_1, f_2 \in E^*$, 定义

$$d(f_1, f_2) = \sup_n \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{n} \tag{1.1.1}$$

易证由(1.1.1)式定义的$d(\cdot, \cdot)$为E^*上的度量, 于是(E^*, d)为度量空间. 从而

$$B^* = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\}$$

也是度量空间.显然，若$d(f_m, f_0) \to 0 (f_m, f_0 \in B^*)$, 则$f_m$弱$*$收敛于$f_0$, 即$f_m(x) \to f_0(x), \forall x \in E (m \to \infty)$. 反之，如果$f_m$弱$*$收敛于$f_0 (f_m, f_0 \in B^*)$, 则对$\forall \varepsilon > 0$, 取$n_0 \in Z^+$, s.t. $n > n_0$有$\frac{2}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是有

$$\frac{|f_m(x_n) - f_0(x_n)|}{n} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0, m = 1, 2, \cdots \tag{1.1.2}$$

再取正整数m_0, 使得

$$\frac{|f_m(x_n) - f_0(x_n)|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall m > m_0, n = 1, 2, \cdots, n_0 \tag{1.1.3}$$

于是由(1.1.2)式和(1.1.3)式得

$$d(f_m,f_0)=\sup_n\frac{|f_m(x_n)-f_0(x_n)|}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\forall m>m_0$$

因此，$d(f_m,f_0)\to 0(m\to\infty)$.

由于B^*是弱$*$紧的，故$B^*\cap P^*$按距离(1.1.1)式成为一个紧度量空间，由此知$B^*\cap P^*$是可分的，即存在可数集$V=\{f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots\}\subset B^*\cap P^*$, 使得$V$在$B^*\cap P^*$中稠密. 现定义泛函$f_0$如下：

$$f_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{2^n},\forall x\in E \tag{1.1.4}$$

易知$f_0\in P^*$. 以下证明f_0满足条件.事实上，若$\exists x_0>\theta$, 使得$f_0(x_0)=0$, 于是由(1.1.4)式知$f_n(x_0)=0,n=1,2,\cdots$. 由于V在$B^*\cap P^*$中稠密，并按距离(1.1.1)收敛等价于弱$*$收敛有

$$f(x_0)=0,\forall f\in B^*\cap P^*$$

由此可知$f(x_0)=0,\forall f\in P^*$, 与结论(2)矛盾！证毕.

定义1.1.3 设P为E中的锥. 若$E=P-P$, 即$\forall x\in E,\exists y,z\in P$, 使得$x=y-z$. 则$P$称为再生锥.

定理1.1.2 若P是E的体锥，则P为再生的.

证明 取$x_0\in P^\circ$. 于是存在$r>0$, 使得

$$B(x_0,r)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leq r\}\subset P$$

从而对任意的$x\in E(x\neq\theta)$有$x_0\pm\frac{r}{\|x\|}x\in B(x_0,r)\subset P$. 令

$$y=\frac{\|x\|}{2r}(x_0+\frac{r}{\|x\|}x)\in P,\quad z=\frac{\|x\|}{2r}(x_0-\frac{r}{\|x\|}x)\in P$$

则$x=y-z$. 故P是再生的. 证毕.

例1.1.1 设$E=R^n$. 令

$$P=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\;\Big|\; x_i\geq 0,n=1,2,\cdots,n\} \tag{1.1.5}$$

则P是E中的一个锥，且为体锥，显然

$$P^\circ=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n\;\Big|\; x_i>0,n=1,2,\cdots,n\}$$

从而P为R^n中的再生锥.

对于任意的$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$有

$$x\leq y\Longleftrightarrow x_i\leq y_i,i=1,2,\cdots,n$$

例1.1.2 设$E=C(G)$, 即G上实值连续函数全体构成的空间，其中G为R^n中的某有界闭集. 令

$$P=\{x\in C(G)\mid x(t)\geq 0,\forall\, t\in G\} \tag{1.1.6}$$

容易验证P是$C(G)$中体锥(从而为再生锥)且

$$P^\circ=\{x\in C(G)\mid x(t)>0,\forall\, t\in G\}$$

对于任意的$x,y\in C(G)$, 有$x\leq y\Longleftrightarrow x(t)\leq y(t),\forall\, t\in G.$

§1.2 正规锥

定义1.2.1 P称为E中的正规锥, 如果存在$\delta>0$使得对任意的$x_1,x_2\in P,\|x_1\|=\|x_2\|=1$, 恒有$\|x_1+x_2\|\geq\delta$.

例 R^2中的锥$P=\{(x,y)\mid |x|\leq|y|\}$是正规的，其中$\delta=\sqrt{2}$.

定理1.2.1 设P是E中的锥，则下列论断等价：

(1) P是正规的;

(2) 存在常数$N>0$, 使得

$$\theta\leq x\leq y\Rightarrow\|x\|\leq N\|y\|$$

此时称范数$\|\cdot\|$关于P是半单调的，满足上述式子中的最小正常数称做锥P的正规常数;

(3) 存在E上等价范数$\|\cdot\|_1$, 满足$\theta\leq x\leq y\Rightarrow\|x\|_1\leq\|y\|_1$, 此时称范数$\|\cdot\|_1$关于$P$是单调的;

(4) $x_n\leq z_n\leq y_n, n\in Z^+,\|x_n-x\|\to 0,\|y_n-x\|\to 0\Rightarrow\|z_n-x\|\to 0$;

(5) 任何区间$[x_1,x_2]=\{x|x_1\leq x\leq x_2\}$都是有界的.

证明 “$(1)\Rightarrow(2)$”

若范数$\|\cdot\|$关于P不是半单调的，则存在$\theta\leq x_n\leq y_n$, 使得

$$\|x_n\|>n\|y_n\|,\quad n=1,2,\cdots \tag{1.2.1}$$

令

$$z_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{n\|y_n\|},\quad h_n=-\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{n\|y_n\|}$$

则$z_n,h_n\in P$, 于是由P的正规性有

$$\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\|\geq\delta,\quad n=1,2,\cdots \tag{1.2.2}$$

由于$z_n+h_n=\frac{2y_n}{n\|y_n\|}$, 我们有

$$\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}=\frac{1}{\|z_n\|}(\frac{2y_n}{n\|y_n\|}-h_n)+\frac{h_n}{\|h_n\|}=\frac{2y_n}{n\|z_n\|\cdot\|y_n\|}+\frac{\|z_n\|-\|h_n\|}{\|z_n\|\cdot\|h_n\|}h_n$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

注意到$\|z_n\| \geq 1-\frac{1}{n}, \|h_n\| \leq 1+\frac{1}{n}$有$|\ \|z_n - \|h_n\|\ | \leq \frac{2}{n}$. 从而

$$\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\| \leq \frac{4}{n-1}$$

于是

$$\left\|\frac{z_n}{\|z_n\|}+\frac{h_n}{\|h_n\|}\right\| \to 0\ (n\to\infty)$$

此与(1.2.2)式矛盾！

"(2) ⇒ (3)" 对$\forall x \in E$, 令

$$\|x\|_1 = \inf_{u\leq x}\|u\| + \inf_{v\geq x}\|v\| \tag{1.2.3}$$

首先证明$\|\cdot\|_1$是E的一个范数.

(i) 显然$\|\theta\|_1 = 0$. 若$\|x\|_1 = 0$, 由(1.2.3)式知，对$\forall \varepsilon > 0, \exists u, v \in E$, 使得$u \leq x \leq v, \|u\| < \varepsilon, \|v\| < \varepsilon$. 于是由结论(2)知

$$\|x\| \leq \|x-u\| + \|u\| \leq N\|v-u\| + \|u\| \leq (2N+1)\varepsilon$$

由ε的任意性有$x=\theta$.

(ii) 由(1.2.3)式显然有

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\ \|x\|_1, \forall x \in E, \lambda \in R$$

(iii) 设$x, y \in E$. 对$\forall \varepsilon > 0, \exists u_1, v_1, u_2, v_2 \in E$, s.t. $u_1 \leq x \leq v_1, u_2 \leq y \leq v_2$, 使得

$$\|u_1\| + \|v_1\| < \|x\|_1 + \varepsilon, \quad \|u_2\| + \|v_2\| < \|y\|_1 + \varepsilon$$

由于$u_1 + u_2 \leq x + y \leq v_1 + v_2$ 故

$$\|x+y\|_1 \leq \|u_1+u_2\| + \|v_1+v_2\|$$

从而

$$\|x+y\|_1 \leq \|u_1\| + \|u_2\| + \|v_1\| + \|v_2\| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + 2\varepsilon$$

由ε的任意性有$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

故$\|\cdot\|_1$是E上的一个范数.

接下来证明范数$\|\cdot\|_1$关于P是单调的. 设$\theta \leq x \leq y$, 于是$\inf_{u\leq x}\|u\| = \inf_{u\leq y}\|u\| = 0$, 从而

$$\|x\|_1 = \inf_{v\geq x}\|v\| \leq \inf_{v\geq y}\|v\| = \|y\|_1$$

最后证明$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|$等价. 显然, $\|x\|_1 \leq 2\|x\|$. 另一方面, 对$\forall u \leq x \leq v$有

$$\|x\| \leq \|x-u\| + \|u\| \leq N\|v-u\| + \|u\| \leq (N+1)(\|u\|+\|v\|)$$

故$\|x\| \le (N+1)\|x\|_1$.

"(3) ⇒ (4)" 由$x_n \le z_n \le y_n, n = 1, 2, \cdots$ 得$\theta \le z_n - x_n \le y_n - x_n$. 于是$\|z_n - x_n\|_1 \le \|y_n - x_n\|_1$. 因为$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|$等价，故存在常数$M > m > 0$使得

$$m\|x\| \le \|x\|_1 \le M\|x\|,\ x \in E$$

成立，于是

$$\|z_n - x_n\| \le \frac{1}{m}\|z_n - x_n\|_1 \le \frac{1}{m}\|y_n - x_n\|_1 \le \frac{M}{m}\|y_n - x\|$$

于是由$\|y_n - x\| \to 0$得$\|z_n - x_n\| \to 0$. 从而

$$\|z_n - x\| \le \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \to 0$$

"(4) ⇒ (5)" 若存在一个区间$[x_1, x_2]$无界，则存在$\{z_n\} \subset [x_1, x_2]$使得$\|z_n\| \to \infty (n \to \infty)$. 令

$$u_n = \frac{x_1}{\|z_n\|},\quad v_n = \frac{x_2}{\|z_n\|},\quad w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$$

显然$u_n \le w_n \le v_n, u_n \to 0, v_n \to 0$, 但$\lim\limits_{n\to\infty} w_n \ne 0$, 此与结论(3)矛盾!

"(5)⇒ (1)" 如果(1)不成立，则存在$x_n, y_n \in P$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$使得

$$\|x_1 + x_2\| \le \frac{1}{4^n},\ n = 1, 2, \cdots$$

令

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}},\quad v_n = \frac{x_n + y_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}}, n = 1, 2, \cdots$$

我们有$\theta \le u_n \le v_n$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛于某$v \in E$. 显然$\theta \le u_n \le v_n \le v (n = 1, 2, \cdots)$, 由

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}} > \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots$$

故序区间$[\theta, v]$无界，此与(5)矛盾! 证毕.

例1.2.1 显然例1.1.1与例1.1.2中定义的锥都是正规锥，这是因为其范数都是单调的. 在空间$C(G)$中除了例1.1.2中定义的正规锥外, 我们还常常使用如下的锥.

$$P_1 = \{x \in C(G) \mid x(t) \ge 0, \forall\, t \in G,\ 且\ \int_{G_0} x(t)dt \le \varepsilon_0 \|x\|_C\}$$

$$P_2 = \{x \in C(G) \mid x(t) \ge 0, \forall\, t \in G,\ 且\ \min_{t \in G_1} x(t)dt \le \varepsilon_1 \|x\|_C\}$$

其中G_0, G_1皆为G的闭子集，$\varepsilon_0, \varepsilon_1$是常数且满足$0 < \varepsilon_0 < \mathrm{mes} G_0, 0 < \varepsilon_1 < 1$. 显然$P_1$, $P_2 \subset P$都是E中的正规锥.

§1.3 正则锥

定义1.3.1 P称为E中的正则锥, 如果E中任意单调递增且按序有上界的序列必有极限，即序列$\{x_n\} \subset E$, 及$y \in E$使得$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots \le y$, 都存在$x^* \in E$使得$\|x_n - x^*\| \to 0(n \to \infty)$.

注1.3.1 P正则 $\Longleftrightarrow$ E任何单调递减且按序有下界的序列必有极限.

定理1.3.1 若P为正则锥，则P必为正规锥.

证明 若P不正规，则存在$\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$ 使得

$$\theta \le x_n \le y_n, \ \|x_n\| > 2^n \|y_n\|, \ n = 1, 2, \cdots \tag{1.3.1}$$

令

$$u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, v_n = \frac{y_n}{2^n \|y_n\|}$$

由(1.3.1)式得

$$\theta \le u_n \le \frac{x_n}{2^n \|y_n\|} \le \frac{y_n}{2^n \|y_n\|} = v_n, n = 1, 2, \cdots \tag{1.3.2}$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \tag{1.3.3}$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛于$v \in E$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v \tag{1.3.4}$$

令

$$w_n = \begin{cases} v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m}, \ n = 2m \ (m = 1, 2, \cdots) \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m} + u_{2m+1}, \ n = 2m + 1 \ (m = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

则由(1.3.2), (1.3.3)和(1.3.4)得

$$\theta \le w_2 \le w_3 \le w_4 \le w_5 \le w_6 \le \ldots \le v \ \text{且} \ \sup_n \|w_n\| \le 2$$

注意到$\|w_{2m+1} - w_{2m}\| = \|u_{2m+1}\| = 1$, 故序列$\{w_n\}$不收敛，从而$P$非正则. 证毕.

例1.3.1 显然例1.1.1的锥是正则锥，这是因为R^n中序列的收敛等价于按坐标收敛，而单调有界数列必有极限.

例1.1.2中定义的锥不是正则锥(虽然它是正规锥). 事实上，我们不妨设$G = [0, 1]$. 令$x_n(t) = 1 - t^n (n = 1, 2, \cdots), y(t) = 1$, 则有

$$x_1(t) \le x_2(t) \le \cdots \le x_n(t) \le \cdots, \ t \in G$$

但是x_n在$C[0,1]$中显然不收敛.

例1.3.2 设$E = L^p(G)$, 其中$G \subset R^n, 0 < \mathrm{mes}G < \infty, 1 \leq p < \infty$. 令

$$P = \{x \in L^p(G) \mid x(t) \geq 0, \text{ a.e. } t \in G\}$$

则P为$L^p(G)$中的锥.

(1) 因为$x \leq y \Longleftrightarrow x(t) \leq y(t)$, a.e. $t \in G$, 容易看出范数是单调的，从而P是正规的，其中正规常数为1.

(2) 因为$P^0 = \emptyset$, 故P不是体锥, 但P是再生的. 事实上，对$\forall x \in L^p(G)$, 令

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & \text{若}t\text{使得}x(t) \geq 0 \\ 0, & \text{若}t\text{使得}x(t) < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{若}t\text{使得}x(t) \geq 0 \\ -x(t), & \text{若}t\text{使得}x(t) < 0 \end{cases}$$

则$x = x_1 - x_2$.

(3) P是正则的.

事实上, 设$\{x_n\} \subset L^p(G), y \in L^p(G)$ 使得

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y$$

令$x^*(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t), t \in G$, 则$x^* \in L^p(G)$. 由

$$0 \leq x^*(t) - x_n(t) \leq x^*(t - x_1(t)), \text{ a.e. } t \in G, n = 1, 2, \cdots$$

于是，根据控制收敛定理得

$$\|x^* - x_n\|^p = \int_G |x*(t) - x_n(t)|^p dt \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$$

定理1.3.2 设Banach空间E为弱序列完备的，P为E的锥，则下述结论等价：

(i) P正规;

(ii) P正则.

证明 由定理1.3.1可知，只须证明P正规 $\Rightarrow$ P正则. 为此设$\{x_n\} \subset E$, 及$y \in E$ 满足$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq y$. 来证存在$x^* \in E$使得$\|x_n - x^*\| \to 0 (n \to \infty)$.

由定理1.2.2知P^*是再生的, 即$E^* = P^* - P^*$, 所以对任意的$f \in E^*$, 存在$g, h \in E^*$, 使得$f = g - h$.

由于

$$g(x_1) \leq g(x_2) \leq \ldots \leq g(x_n) \leq \ldots \leq g(y)$$

$$h(x_1) \leq h(x_2) \leq \ldots \leq h(x_n) \leq \ldots \leq h(y)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) - \lim_{n\to\infty} h(x_n)$$

即$\{f_n\}$存在极限, 从而$\{x_n\}$是弱Cauchy列, 由E的弱序列完备性知存在$x^* \in E$, 使得$x_n \to^w x^*$.

以下证明

$$x_n \leq x^*, i = 1, 2, \cdots \tag{1.3.5}$$

否则，存在某x_{n_0}使得$x^* - x_{n_0} \notin P$. 根据凸集第二分离定理，存在$f \in E^*$及$c \in R$使得

$$f(x^* - x_{n_0}) < c \text{ 且 } f(x) > c, \ \forall\ x \in P$$

于是对$\forall\ i > i_0$,

$$f(x^*) < f(x_{n_0}) + c \tag{1.3.6}$$

$$f(x^*) > f(x_{n_0}) + c \tag{1.3.7}$$

在(1.3.7)式中令$i \to \infty$, 得$f(x^*) \geq f(x_{n_0}) + c$, 此与(1.3.6)式矛盾. 故(1.3.5)式成立.

接下来证明$\{x_n\}$必含有强收敛于x^*的子列.

事实上, 如果$\{x_n\}$的任何子列都不强收敛于x^*, 则存在$\varepsilon_0 > 0$及正整数m, 使得

$$\|x^* - x_n\| \geq \varepsilon_0, \forall n > m \tag{1.3.8}$$

令$M_n = \{x \in E \mid x \leq x_n\}, M = \bigcup\limits_{n>m} M_n$. 由于$M_n$是凸集且$M_n \subset M_{n+1}(i = 1, 2, \cdots)$, 易知$M$是凸集，从而$M$的闭包$\overline{M}$也是凸集. 对于任意的给定的$x \in M, x$必属于某$M_n(n > m)$, 即$x \leq x_n$, 由(1.3.5)式知$\theta \leq x^* - x_n \leq x^* - x$, 从而，由(1.3.8)式得

$$\varepsilon_0 \leq N\|x^* - x_n\| \leq \|x^* - x\|$$

于是得

$$\|x^* - x_n\| \geq \frac{\varepsilon_0}{N}, \forall\ x \in \overline{M}$$

故$x^* \notin \overline{M}$. 根据凸集第二分离定理, 存在$f_0 \in E^*$ 和$c_0 \in R$使得$f_0(x^*) < c_0$且$f_0(x) > c_0, \forall\ x \in \overline{M}$. 由于$x_n \in M_n \subset M, \forall n > m$, 我们有$f_0(x_n) > c_0, \forall n > m$. 于是有

$$f_0(x^*) = \lim_{i\to\infty} f_0(x_{n_i}) \geq c_0$$

此与$f_0(x^*) < c_0$矛盾!

故$\{x_n\}$有强收敛子列$\{x_{n_i}\}$收敛于x^*.

最后证明$\{x_n\}$强收敛于x^*.

事实上, 因为$\{x_{n_i}\} \longrightarrow x^* \in E$, 即$\|x_{n_i} - x^*\| \longrightarrow 0 (i \longrightarrow \infty)$. 由于对任何正整数$n$, 当$i$充分大时必有$x_{n_i} \geq x_n$, 取极限即得$x^* \geq x_n$. 由此可知$x^* \geq x_n, n = 1, 2, \cdots$. 据$P$的正规性，由不等式

$$\theta \leq x^* - x_n \leq x^* - x_{n_i}, \forall n_i > n$$

得

$$\|x^* - x_n\| \leq N\|x^* - x_{n_i}\|, \forall n_i > n$$

其中N为P的正规常数. 于是有$\|x^* - x_n\| \to 0(n \to \infty)$. 由正则锥的定义知$P$是正则的. 证毕.

由于自反Banach空间必是弱序列完备的，故下列结论成立.

定理1.3.3 设P是E中的一个锥. 若E是自反的，则P为正则锥 $\Longleftrightarrow$ P必为正规锥.

例1.3.3 设$E = l^1 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$. 令

$$P = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^1 \,\middle|\, x_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots\right\}$$

则P为l^1中的正则锥.

事实上, 由于范数是单调的, 故P是正规的. 又l^1是弱序列完备的, 由定理1.3.2知P正则.

§1.4 极小锥、全序极小锥与强极小锥

设P是E的一个锥，D为E中的非空集合. 若$z \in E$ 满足

(i) $x \leq z, \ \forall \ x \in D$;

(ii) $x \leq y, \forall x \in D \Rightarrow z \leq y$.

则称z是集合D的上确界，记为$\sup D$, 即$z = \sup D$.

类似的可以定义下确界$\inf D$.

集合D称为按序有上界，如果存在$v \in E$, 使得$x \leq v$, $\forall \ x \in D$. 类似的可以定义集合D按序有下界. 以后按序有上界简称为有上界，按序有下界简称为有下界.

定义1.4.1 设P为E中一个锥.

(i) 如果对E任何两个元素x, y, $\sup\{x, y\}$ 都存在，则称P是极小锥.

(ii) 如果对E任何有上界的全序集D都存在上确界，则称P称为E中的全序极小锥.

(iii) 如果对E任何有上界的非空集合D都存在上确界，则称P称为E中的强极小锥.

注1.4.1 由定义1.4.1易知：P极小 $\Longleftrightarrow$ 对E任何两个元素x, y, $\inf\{x, y\}$ 都存在；P全序极小 $\Longleftrightarrow$ 对E任何有下界的全序集都存在下确界；P强极小 $\Longleftrightarrow$ 对E任何有下界的非空集合D都存在下确界.

注1.4.2 由定义1.4.1易知：强极小锥是全序极小锥.

注1.4.3 如果P是极小锥，则对E中任何有限集$D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $\sup D$存在，且

$$\sup D = \sup\{x_1, \sup\{x_2, \cdots, x_n\}\} \tag{1.4.1}$$

例1.4.1 显然例1.1.1的锥是极小且强极小的. 而例1.1.2中定义的锥是极小锥但不是强极小锥.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com