21世纪高职系列教材
SHIJI GAOZHI XILIE JIAOCAI

应用高等数学

主编 / 钟继雷

哈尔滨工程大学出版社

21世纪高职系列教材

SHIJI GAOZHI XILIE JIAOCAI

应用高等数学

主编 / 钟继雷　副主编 / 陆　毅　周雪娟

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学教学基本要求》,结合作者多年从事教学改革的实践经验而编写的。考虑到高职高专层次的特点,全书始终贯彻"在基础课的教学中,要求以应用为目的,以必需、够用为度"的原则,突出了理工类高职高专教育的特色,在保留高等数学核心内容的情况下,教学内容、课时以适应目前高职高专教育中对高等数学减少学时的要求,内容由浅入深,循序渐进,激发兴趣,便于自学。本书共分七章,主要内容是函数、极限与连续;导数与微分;导数的应用;不定积分;定积分及其应用;常微分方程;无穷级数。

本书可供高职高专理工类院校师生教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学/钟继雷主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.9

ISBN 978-7-81133-040-3

Ⅰ.应… Ⅱ.钟… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 144933 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 肇东粮食印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 12.5
字 数 230 千字
版 次 2007 年 9 月第 1 版
印 次 2007 年 9 月第 1 次印刷
定 价 22.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等职业教育系列教材编委会

（按姓氏笔画排序）

前言

教材建设工作是整个高职教育教学基本建设工作中的重要组成部分。近些年来,由于高等教育大众化进程不断加快,高等职业技术教育迅猛发展,对高职工科类各专业的基础课教学,尤其是高等数学的教学提出了新的教学要求。因此,研究并深入探讨适合于目前高职学生特点及工科类专业实际需要的基础课程高等数学的教学和使用教材是十分必要的。

编者经过长期教学实践,根据教育部《高职高专教育高等数学教学基本要求》,考虑到高职工科类专业要求和学生实际基础水平的特点,贯彻“在基础课的教学中,要求以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,在保留高等数学核心内容的情况下,教学内容、课时以适应目前高职教育中对高等数学减少学时的要求,在教学内容上作了精心选择,尽量考虑教材突出重点,化难为易,精心编写了供高职工科类专业使用的应用高等数学教材。本教材主要内容是函数、极限与连续;导数与微分;导数的应用;不定积分;定积分及其应用;微分方程;无穷级数等。对教材内容的选取既考虑其系统性,又注重其相对独立性,为教学中恰当取舍留有余地。

本教材结合高等职业教育特点,优化微积分学经典内容体系,淡化数学理论,对绝大多数定理只作说明,不要求证明,重视为专业服务,突出知识点与实际问题的联系;把教学经验融入教材中,如将定积分概念作为一种教学尝试,在学生初步了解定积分定义的基础上直截了当地引入牛顿-莱布尼兹公式用于定积分计算,使内容既容易理解又便于掌握。教材内容由浅入深,循序渐进,激发兴趣,便于自学。教材中每一节之后附有习题,每章之后附有复习题。为方便自学,书末给出部分习题答案。

本教材由浙江国际海运职业技术学院钟继雷副教授任主编,陆毅副教授、周雪娟副教授任副主编,其中第一、二、三章微分学部分由陆毅编写,第四、五章积分学部分由钟继雷编写,第六章微分方程和第七章无穷级数部分由周雪娟编写。全书由钟继雷统稿。编写过程中比较广泛地吸取了有关高职学院的教学经验,也参考了不少同类教材,在此谨向有关教师及这些教材的编写者致谢。

由于我们水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正。

编者

2007 年 6 月

目 录

第一章　函数、极限与连续 ………………………………………… 1
第一节　函数 ………………………………………… 1
第二节　极限的概念 ………………………………………… 11
第三节　极限的运算 ………………………………………… 15
第四节　两个重要极限 ………………………………………… 20
第五节　函数的连续性 ………………………………………… 23
第二章　导数与微分 ………………………………………… 32
第一节　导数的概念 ………………………………………… 32
第二节　导数的运算 ………………………………………… 36
第三节　复合函数的求导法则 ………………………………………… 38
第四节　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数 ………………… 41
第五节　高阶导数 ………………………………………… 43
第六节　微分 ………………………………………… 45
第三章　导数的应用 ………………………………………… 54
第一节　微分中值定理　洛必达法则 ………………………………………… 54
第二节　函数的单调性与极值 ………………………………………… 58
第三节　函数的最大值与最小值 ………………………………………… 63
第四节　曲线的凹凸性与拐点　函数图形的描绘 ……………………… 67
*第五节　曲率 ………………………………………… 73
第四章　不定积分 ………………………………………… 79
第一节　不定积分的概念与性质 ………………………………………… 79
第二节　换元积分法 ………………………………………… 83
第三节　分部积分法 ………………………………………… 90

*第四节　有理函数的积分 …… 94
第五章　定积分及其应用 …… 99
第一节　定积分的概念和性质 …… 99
第二节　定积分的换元积分法和分部积分法 …… 105
第三节　广义积分 …… 108
第四节　定积分的应用 …… 110
第六章　常微分方程 …… 122
第一节　常微分方程的基本概念 …… 122
第二节　一阶微分方程 …… 124
第三节　二阶常系数线性微分方程 …… 127
第四节　微分方程的应用举例 …… 135
第七章　无穷级数 …… 141
第一节　常数项级数 …… 141
第二节　常数项级数敛散性的判别 …… 145
第三节　幂级数 …… 150
第四节　函数展开成幂级数 …… 156
第五节　傅里叶(Fourier)级数 …… 162
习题参考答案 …… 176

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学中重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象. 极限的思想与理论是微积分研究的基本工具，高等数学中的其他几个重要的概念，如连续、微分、积分等，都归结于极限. 掌握极限的理论与方法是后续学习的前提条件. 本章将在对函数概念进行复习和补充的基础上，介绍数列与函数极限的概念、求极限的方法以及函数的连续性等内容.

第一节 函 数

一、函数的概念

（一）函数定义

定义 1.1 **设 D 是非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 当自变量 x 在定义域内取遍每一个数值时，对应的 y 构成一个数集 M，称为函数的值域.**

函数的定义域和对应法则是函数的两个要素. 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是相同的函数，否则是不同的函数. 如 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数，因为两个函数的定义域和对应法则都相同；而 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 则为不同的函数，因为它们的定义域不同.

（二）函数值

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值，则称函数在点 x_0 处有定义. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的对应值叫做函数在该点的函数值，记作 $y=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 实际应用中自变量也可以用 t 等字母来表示，对应法则也常用 φ,h,g,F 等表示，则函数记作 $\varphi(t),h(t),g(t),F(t)$ 等.

例 1－1 已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$，求 $f(0),f(-x)$.

解 $f(0)=\dfrac{0}{1-0}=0,f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1-(-x)}=\dfrac{x^2}{1+x}$.

例 1－2 已知 $f(x+1)=x^2-2$，求 $f(x),f(x^2)$.

解 令 $t=x+1$，则 $x=t-1,f(t)=(t-1)^2-2=t^2-2t-1$，即 $f(x)=x^2-2x-1$.

$$f(x^2)=(x^2)^2-2(x^2)-1=x^4-2x^2-1$$

（三）函数定义域的求法

如无特殊限定，函数定义域为使数学表达式有意义的自变量所能取值的实数集合，一般应考虑以下几个方面：

1. 分母不为零；
2. 偶次根式根号内的解析式不小于零；
3. $\log_a x$ 中的真数大于零，底数大于零不等于 1；
4. $\arcsin x$，$\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$.

例 1－3 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{4x-3}{\sqrt{x^2-4}}$；　　(2) $y=\log_3(x^2-2x-3)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 (1) $x^2-4>0$，即 $x<-2$ 或 $x>2$，所以定义域为 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x<-1 \text{ 或 } x>3\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$.

由此得到 $-3\leqslant x<-1$ 或 $3<x\leqslant 4$. 所以定义域为 $x\in[-3,-1)\cup(3,4]$.

（四）分段函数

在定义域的不同区间内，函数关系用不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是高等数学中常见的一种函数. 例如，在初等数学中出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

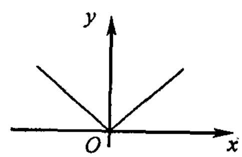


图 1－1

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合.

例 1－4 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1,\\ -2x+4 & x>1\end{cases}$

求 (1) $f(-2)$；(2) $f(\frac{1}{2})$；(3) 函数的定义域；(4) 画出函数图像.

解 (1) $f(-2)=-2+1=-1$.　　(2) $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

(3) 函数的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) 函数图像如图 1－2 所示.

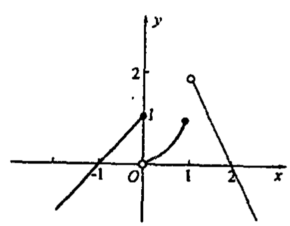


图 1－2

二、函数的性质

(一) 奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数. 如果既不是奇函数也不是偶函数，这样的函数称作非奇非偶函数.

在直角坐标系下，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 1 - 5 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(2) $y=4x^2-x$；

(3) $y=\sqrt{x}$；　　(4) $\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $f(-x)=4x^2+x$，$f(-x)\neq f(x)$，并且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为函数的定义域是 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，所以它是非奇非偶函数.

(4) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $\varphi(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(\sqrt{1+x^2}-x]\neq\varphi(x)$，而

$-\varphi(-x)=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=\varphi(x)$，即 $\varphi(-x)=-\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

(二) 单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在 (a,b) 内单调增加；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在 (a,b) 内单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，区间 (a,b) 称为单调区间.

例 1 - 6 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任意取两点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的；

当$x_1,x_2\in(-\infty,0)$时,$f(x_2)-f(x_1)<0$,即$f(x_2)<f(x_1)$,所以函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$内是单调减少的;

当$x_1\in(-\infty,0)$,$x_2\in(0,+\infty)$时,无法判断$f(x_1)$与$f(x_2)$的大小,所以函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

(三) 周期性

对于函数$y=f(x)$,如果存在一个常数$T\neq 0$,使得对于任意$x\in D$,必有$x\pm T\in D$,且恒有$f(x\pm T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,其中T叫做函数$f(x)$的周期. 通常所说的周期是指它的最小正周期. 例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数;$y=\tan x$,$y=\cot x$都是以π为周期的周期函数;$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期是$\frac{2\pi}{|\omega|}$;$y=\tan x$,$y=\cot x$的周期是$\frac{\pi}{|\omega|}$.

例1-7 求$y=\sin^2 x$的周期.

解
$$y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2},$$

由于$y=-\frac{\cos 2x}{2}$的周期是$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以函数的周期是$\pi$.

(四) 有界性

设函数$y=f(x)$在区间D上有定义,如果存在一个正数M,使得对于任意$x\in D$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在D上有界,也称$f(x)$为D上的有界函数. 否则称$f(x)$为D上的无界函数.

注意:有界性是依赖于区间的. 例如,函数$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界,但在区间$(1,2)$内有界.

三、反函数

定义1.2 设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域为M,如果对于M中的每一个值y,在D中有唯一的x值与之对应,则得到一个以y为自变量,x为因变量的函数. 称这个定义在M上的函数为$y=f(x)$的反函数,记作$x=f^{-1}(y)$,它的定义域为M,值域为D.

由于习惯上用x表示自变量,用y表示因变量,因此将$x=f^{-1}(y)$改写为以x为自变量,以y为因变量的函数$y=f^{-1}(x)$,这时可以说$y=f^{-1}(x)$是$y=f(x)$的反函数.

根据反函数的定义知,$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称.

例1-8 求函数$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数并写出它的定义域.

解 设$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,则$(e^x)^2-2ye^x-1=0$.

解得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$.

因为 $e^x > 0$，所以 $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$，即 $x = \ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

故所求的反函数是 $f^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), x \in R$.

四、初等函数

（一）基本初等函数

常数函数 $y = c$（c 为常数），幂函数 $y = x^\mu$（μ 为非零常数），指数函数 $y = a^x (a>0, a\neq 1)$，三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$ 统称为基本初等函数. 这些函数在中学数学中都已学过，现将其性质及图形列于表 1－1.

表 1－1　基本初等函数的主要性质及图形

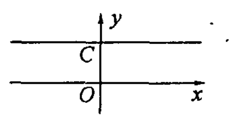
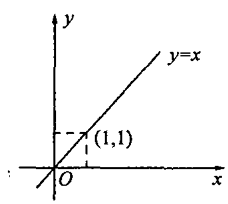
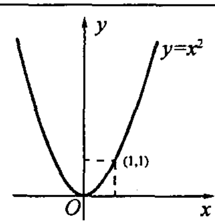
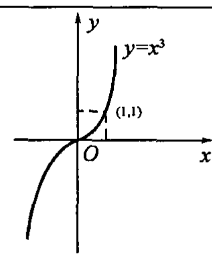
	解析式	定义域和值域	图　像	特　性
常数函数	$y=c$ （c 为常数）	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数，有界周期函数，图形与 x 轴平行
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数. 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加

表1－1　基本初等函数的图形及主要性质(续)

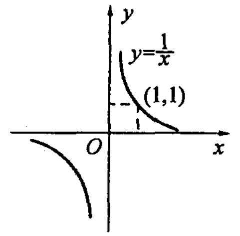
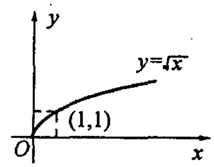
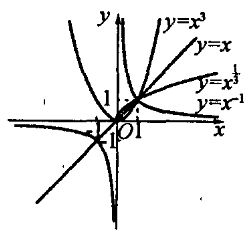
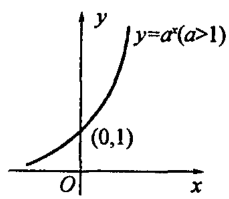
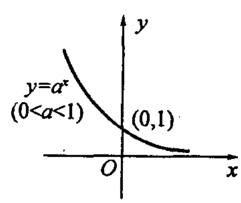
	解析式	定义域和值域	图像	特性
幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数,单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
	$y=x^{u}$			图形经过点(1,1). u为偶数时,图形关于y轴对称;u为奇数时,图形关于原点对称. 当$u>0$时,在第一象限内为增函数;当$u<0$时,在第一象限内为减函数
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图形在x轴上方且都通过点(0,1),是增函数
	$y=a^{x}$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图形在x轴上方且都通过点(0,1),是减函数

表1－1 基本初等函数的主要性质及图形(续)

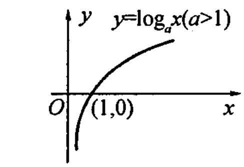
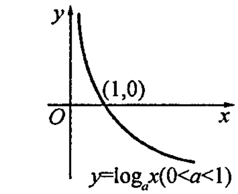
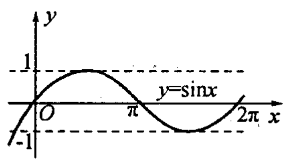
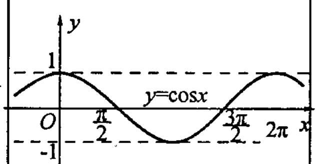
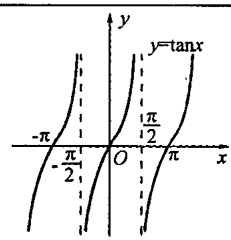
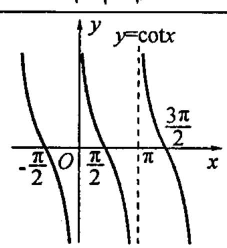
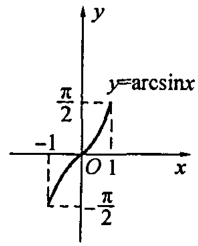
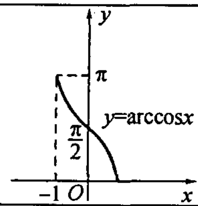
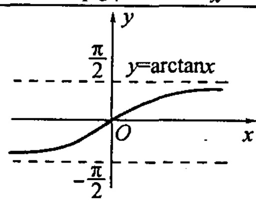
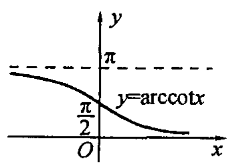
	解析式	定义域和值域	图 像	特 性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图形在y轴右方且都通过点$(1,0)$,是增函数
	$y=\log_a x$ $(0>a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图形在y轴右方且都通过点$(1,0)$,是减函数
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数,有界周期函数,周期为2π,在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加,在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上单调减少$(k\in z)$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数,有界周期函数,周期为2π,在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上单调减少,$[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$上单调增加$(k\in z)$
	$y=\tan x$	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in z\}$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期函数,周期为π,在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加$(k\in z)$
	$y=\cot x$	$\{x\mid x\in R,x\neq k\pi,k\in z\}$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期函数,周期为π,在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少$(k\in z)$

表 1－1　基本初等函数的主要性质及图形(续)

	解析式	定义域和值域	图　像	特　性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,有界,单调增加
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界,单调减少
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,有界,单调增加
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,\pi]$		有界,单调减少

(二) 复合函数

在实际问题中,常常会遇到由几个较简单的函数组成的较为复杂的函数. 例如,从静止状态自由下落的质量为 m 的物体,其动能 E 与速度 v 的关系为

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1-1}$$

由于速度 v 与时间 t 有关系

$$v=gt \tag{1-2}$$

从而得到

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2 \tag{1-3}$$

这样,物体动能 E 就成为时间 t 的函数,把式(1－3)叫做由式(1－1)、式(1－2)两个函数构成的复合函数.

定义 1.3 设 $y = f(u)$，而 $u = \varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，称 y 为 x 的复合函数，记作 $y = f[u(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例 1－9 写出下列函数的复合过程：

(1) $y = \ln\sin x$；　(2) $y = \cos^2 3x$；　(3) $y = e^{\sqrt{x^3-2x+3}}$.

解 (1) $y = \ln\sin x$ 由 $y = \ln u$ 和 $u = \sin x$ 复合而成；

(2) $y = \cos^2 3x$ 由 $y = u^2$，$u = \cos v$ 和 $v = 3x$ 复合而成；

(3) $y = e^{\sqrt{x^3-2x+3}}$ 由 $y = e^u$ 和 $u = \sqrt{v}$ 和 $v = x^3 - 2x + 3$ 复合而成.

需要强调的是，分析复合函数的结构时，应由外向内将其分解成若干个基本初等函数（或基本初等函数与基本初等函数的四则运算）.

（三）初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的，并可用一个解析式表示的函数叫做初等函数. 如例1－9中的三个函数都是初等函数. 而分段函数一般都不是用一个解析式表示的，因此它们都不是初等函数. 如 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leqslant 0 \\ x^2 & 0 < x \leqslant 1 \\ -2x+4 & x > 1 \end{cases}$ 是由三个解析式表示的函数.

五、建立函数关系式

用数学方法解决实际问题时，先要建立函数关系（或称建立数学模型），为此需明确问题中的自变量与函数，然后根据题意建立等式，从而得出函数关系，并根据实际问题的要求，确定函数的定义域.

（一）材料截取问题

例 1－10 将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材，列出矩形截面两条边长之间的函数关系.

解 设矩形截面的一条边长为 x，另一条边长为 y，由勾股定理得

$$x^2 + y^2 = d^2$$

解出 y，得 $y = \pm\sqrt{d^2 - x^2}$. 由于 y 只能取正值，所以 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$.

这就是矩形截面的两条边长之间的函数关系，它的定义域为 $(0, d)$.

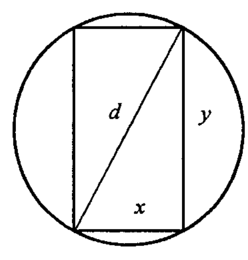


图 1－3

（二）出租车计费问题

例 1－11 某市出租车的起步价为10元. 超过4公里时，超过部分为每公里2元. 超过8公里时，超过部分为每公里加收20%. 求运价与里程之间的函数关系，并求乘车10公里

的付费金额.

分析:乘车里程 x 与付费金额 y 的关系为:

当 $0<x\leqslant 4$ 时,$y=10$;当 $4<x\leqslant 8$ 时,$y=10+2(x-4)=2x+2$;

当 $x>8$ 时,$y=10+2(8-4)+2(1+0.2)(x-8)=2.4x-1.2.$

解 设乘车里程 x 公里时,付费金额为 y 元.

根据题意可列出函数关系如下:

$$y=f(x)=\begin{cases}10 & 0<x\leqslant 4\\ 2x+2 & 4<x\leqslant 8\\ 2.4x-1.2 & x>8\end{cases}$$

所以 $f(10)=2.4\times 10-1.2=22.8$(元).

习 题 1-1

1. 下列各问中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数,为什么?

(1) $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$; (2) $f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$.

2. 设 $f(x)=x^2+1,g(x)=\sin 2x$,求 $f(0),f(\frac{1}{a}),f(2t),f[g(x)],g[f(x)]$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2+4x-3}$; (2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$;

(3) $y=\ln(1-x^2)$; (4) $y=\arcsin 3x$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}3-x & -3<x<0\\ 0 & x=0\\ 3x & x>0\end{cases}$,求 $f(x)$ 的定义域及 $f(-1),f(2)$ 的值,并作出它的图形.

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x\cos x$; (2) $y=\cos x-\sin x$;

(3) $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$; (4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. 求下列函数的反函数:

(1) $y=2x+1$; (2) $y=1-\ln x$; (3) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

7. 写出下列复合函数的复合过程:

(1) $y=\arcsin 3x$; (2) $y=\sqrt{\cos(x-1)}$;

(3) $y=2^{1-x^2}$; (4) $y=\lg\sin^2 3x$.