孙西芃 王建忠 涂晓青● 编著

经济类院校基础课程本科系列教学辅导书

微积分（上册）习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

4

西南财经大学出版社

微积分（上册）
习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

孙西芃 王建忠 涂晓青● 编著

经济类院校基础课程本科系列教学辅导书

微积分(上册)习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)习题解答/孙西芃,王建忠,涂晓青编著.—成都:西南财经大学出版社,2007.9

ISBN 978-7-81088-826-4

Ⅰ.微… Ⅱ.①孙…②王…③涂… Ⅲ.微积分—高等学校—解题 Ⅳ.0172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第117044号

微积分(上册)习题解答

孙西芃 王建忠 涂晓青 编著

责任编辑:王正好 于海生

封面设计:杨红鹰

责任印制:王艳

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785 87352368
印　　刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	9.25
字　　数:	180千字
版　　次:	2007年9月第1版
印　　次:	2007年9月第1次印刷
印　　数:	1—4000册
书　　号:	ISBN 978-7-81088-826-4
定　　价:	16.00元

前 言

本书是西南财经大学出版社出版的《微积分》(上册)一书的配套教材,主要面向使用《微积分》(上册)教材的广大教师、学生和自学者,同时也可供报考经济类硕士研究生的考生作复习之用。

做习题是学习和领会课程基本内容必不可少的重要环节。通过练习,可以巩固和加深对教材基本原理的理解,提高综合分析能力,掌握解题技巧。

限于编者水平,加之时间仓促,本书不足与错误在所难免,恳请各位同仁专家和读者不吝赐教,以利我们进一步提高。

目 录

目 录

第 1 章　函数

习题 1.1

1. 如果集合 $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$ 求：

(1) $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$;　　(3) $A\backslash B$.

解　(1) $A\cup B=\{x|x>3\}$.

(2) $A\cap B=\{x|4<x<5\}$.

(3) $A\backslash B=\{x|3<x\leqslant 4\}$.

2. 解下列不等式：

(1) $x^2<4$;　　(2) $|x-4|<7$;　　(3) $x^2-5x+6<0$.

解　(1) 由 $x^2<4$，得 $|x|<2$，于是 $-2<x<2$.

(2) 由 $|x-4|<7$，得 $-7<x-4<7$，于是 $-3<x<11$.

(3) 由 $x^2-5x+6<0$，得 $(x-2)(x-3)<0$，推得

$$\begin{cases}x-2>0\\x-3<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2<0\\x-3>0\end{cases}$$

于是 $2<x<3$.

3. 用区间表示下列不等式的解集合：

(1) $|x-2|<3$;　　(2) $0<(x-2)^2<4$;

(3) $|x-\alpha|<\delta$，(α 常数，$\delta>0$)；　　(4) $|x+1|>2$.

解　(1) 由 $|x-2|<3$，有 $-3<x-2<3$，即 $-1<x<5$，区间为 $(-1,5)$.

(2) 由 $0<(x-2)^2<4$，有 $0<|x-2|<2$，即 $-2<x-2<2$，且 $x\neq 2$，区间为 $(0,2)$，$(2,4)$.

(3) 由 $|x-\alpha|<\delta$，有 $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$，区间为 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$.

(4) 由 $|x+1|>2$，有 $x+1>2$ 或 $x+1<-2$，区间为 $(-\infty,-3)$，$(1,+\infty)$.

习题1.2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{1}{\mathrm{x}}$；

(5) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\lg(x+1)}$；

(6) $y=\begin{cases}x^2 & -3\leqslant x\leqslant 0\\ 2^x & 0<x<3\end{cases}$.

解 (1)要使函数有意义 x 应满足不等式

$9-x^2\geqslant 0$，函数的定义域为 $-3\leqslant x\leqslant 3$.

(2)要使函数有意义 x 应满足关系式

$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

(3)要使函数有意义 x 应满足不等式

$\lg\dfrac{5\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}{4}\geqslant 0$，推得 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即 $5x-x^2\geqslant 4$，得 $x^2-5x+4\leqslant 0$，于是函数的定义域为 $[1,4]$.

(4) x 应满足关系式

$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\\ x\neq 0\end{cases}$，推得 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ x\geqslant 1\text{，或 }x\leqslant -1\\ x\neq 0\end{cases}$，于是函数的定义域为

$(-\infty,-1]\cup[1,3]$.

(5) x 应满足关系式

$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+1>0\\ x+1\neq 1\end{cases}$，函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

(6)分段函数的定义域为各段定义域的并，得函数定义域为 $[-3,3)$.

2. 下列各题中的函数是否相同？

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(3) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$.

解 (1) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$的定义域为$x\neq 1$，$y=x+1$的定义域为一切实数，故它们是不同的函数.

(2) $y=\ln x^2$的定义域为$x\neq 0$，$y=2\ln x$的定义域为$x>0$，故它们是不同的函数.

(3) 因为对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，所以此二函数相同.

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x^2-1$；　　(2) $y=|x+1|$；

(3) $y=x\cos x$；　　(4) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

(5) 如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，

$y=f(x)+f(-x)$ 和 $y=f(x)-f(-x)$.

解 (1) 由于$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$，故$y=x^2-1$是偶函数

(2) 由于$f(-x)=|-x+1|$，而$f(-x)\neq f(x)$，且$f(-x)\neq -f(x)$，故$y=|x+1|$是非奇非偶函数.

(3) 由于$f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$，故$y=x\cos x$是奇函数.

(4) 由于
$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\lg\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})}\\&=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$
故$y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

(5) 如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，

令$F(x)=f(x)+f(-x)$，由于$F(-x)=f(-x)+f(-(-x))=F(x)$，

故$y=f(x)+f(-x)$是偶函数.

令$G(x)=f(x)-f(-x)$，由于$G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$，故$y=f(x)-f(-x)$是奇函数.

4. 判断下列函数的有界性:

(1) $y=\frac{x^2}{1+x^2+x^4}$；　　(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=x\sin x$.

解 (1) 由于对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$0\leqslant\frac{x^2}{1+x^2+x^4}\leqslant 1$，因此函数在

其定义域内有界.

(2)由于对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|\sin x^2|\leqslant 1$,因此函数在其定义域内有界.

(3)如果 x 取值为 $2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=1,2,\cdots)$ 时,$y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,对任意的正数 M,当 k 的值很大时,有 $2k\pi+\frac{\pi}{2}>M$,因此函数是无界的.

5. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 内的. 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设 $F(x)=f(x)+g(x)$,($f(x),g(x)$ 为偶函数,$x\in(-l,l)$),
由于 $F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$
因此 $F(x)$ 是偶函数,即两个偶函数的和是偶函数.

设 $G(x)=f(x)+g(x)$,($f(x),g(x)$ 为奇函数,$x\in(-l,l)$),
由于 $G(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-G(x)$
因此 $G(x)$ 是奇函数,即两个奇函数的和是奇函数.

(2) 设 $F(x)=f(x)g(x)$,($f(x),g(x)$ 为偶函数,$x\in(-l,l)$),
由于 $F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$
因此 $F(x)$ 是偶函数,即两个偶函数的乘积是偶函数.

$F(x)=f(x)g(x)$,($f(x),g(x)$ 为奇函数,$x\in(-l,l)$),
由于 $F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$
因此 $F(x)$ 是偶函数,即两个奇函数的乘积是偶函数.

$F(x)=f(x)g(x)$,($f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数 $x\in(-l,l)$),
由于 $F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$
因此 $F(x)$ 是奇函数,即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

习题 1.3

1. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$,求:

$$f(0),\quad f(-x),\quad f(\frac{1}{x}),\quad f(x+1).$$

解 $f(0)=2$,

$$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2,$$

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2-3\,\frac{1}{x}+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2,$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x.$$

2. 已知$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求:$f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}(x\neq1,x\neq\dfrac{1}{2})$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}(x\neq1,x\neq\frac{1}{2},x\neq\frac{1}{3})$$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$求:$f[f(x)]$.

解 令 $u=f(x)$,则此函数的值域为集合$\{0,1\}$,又$f(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant1\\ 0, & |u|>1\end{cases}$,

于是,$f[f(x)]=f(u)=1$

4. 若函数$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求:$f(x)$.

解 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$,因此$f(x)=x^2-2$.

5. 求下列函数的反函数:

(1)$y=\dfrac{x+2}{x-2}$; (2)$y=x^3+2$;

(3)$y=2\sin3x$; (4)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;

(5)$y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant4.\\ 2^x, & x>4\end{cases}$

解 (1)由 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$解出 x,有 $x=\dfrac{2(y+1)}{y-1}$,得反函数 $y=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$.

(2)由 $y=x^3+2$ 解出 x,有 $x=\sqrt[3]{y-2}$,得反函数 $y=\sqrt[3]{x-2}$.

(3)由 $y=2\sin3x$ 解出 x,有 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}(-2\leqslant y\leqslant2)$,

得反函数 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}(-2\leqslant x\leqslant2)$

(4)由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$解出 x,有 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}(0<y<1)$,

得反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}(0<x<1)$

(5)由 $y=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & x>4\end{cases}$ 解出 x

当 $x<1$ 时解出 x,有 $x=y\quad(y<1)$

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时解出 x,有 $x=\sqrt{y}\quad(1\leqslant y\leqslant 16)$

当 $x>4$ 时解出 x,有 $x=\log_2 y\quad(y>16)$

得反函数

$$y=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$$

习题 1.4

1. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合或四则运算而成:

(1)$y=e^{\arcsin x^2}$;　　(2)$y=(\frac{x}{1+x})^2$;　　(3)$y=\sin x^2+\cos x^2$.

解　(1)$y=e^u,u=\arcsin v,v=x^2$

(2)$y=u^2,u=\frac{x}{1+x}$

(3)$y=\sin u+\cos u,u=x^2$

2. 下列函数中哪些是初等函数?

(1)$y=1-\sqrt{2x-1}$;　　(2)$y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$;

(3)$y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x\leqslant 2\\ 2+\sin x, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$;　　(4)$y=|\sin x|+2x$.

解　(3)这个分段函数很明显不能用基本初等函数复合或四则运算得到,因此它不是初等函数;而(1),(2),(4)均可由基本初等函数经复合或四则运算得到,因此是初等函数.

习题 1.5

1. 某化肥厂生产某产品 1000 吨,每吨定价 130 元,销量在 700 吨以内时,产品按原价出售,超过 700 吨时,超过部分需打 9 折出售;试将销售总收益表示为总销售量的函数.

解 设 x 为总销售量,y 为销售总收益,则

$0 < x \leqslant 700$ 时,销售总收益为 $130x$

$700 < x \leqslant 100$ 时,销售总收益为 $130 \times 700 + 130 \times 0.9 \times (x - 700)$

于是有

$$y = \begin{cases} 130x, & 0 < x \leqslant 700 \\ 9100 + 117(x - 700), & 700 < x \leqslant 1000 \end{cases}$$

2. 某手表厂生产一只手表可变成本为 15 元,每天的固定成本为 2000 元,如果每只手表出厂价为 20 元,为了不亏本,该厂每天至少应生产多少只手表?

解 设手表产量为 Q,成本为 C,收益为 R,则

$C = 15Q + 2000, R = 20Q$

利润为 $R - C = 5Q - 2000$

令 $R - C = 5Q - 2000 \geqslant 0$,得 $Q \geqslant 400$,即,每天至少生产 400 只.

3. 设玩具厂的成本是产量的线性函数,如果每天生产 60 个玩具成本为 300 元,每天生产 80 个成本为 340 元. 求:成本函数及每天固定成本和每天变动成本.

解 设成本为 C,产量为 Q,由题意有

$C = aQ + b$

将 $Q = 60, C = 300; Q = 80, C = 340$ 代入,有

$$\begin{cases} 60a + b = 300 \\ 80a + b = 340 \end{cases}$$

解的 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 180 \end{cases}$,于是

$C = 2Q + 180$ 因此每天固定成本为 180 元,每天变动成本为 2 元.

4. 已知下列需求函数和供给函数,求相应的市场均衡价格 p_0.

(1) $Q = \dfrac{100}{3} - \dfrac{2}{3}p, \quad S = -20 + p$;

(2) $p^2 + 2Q^2 = 114, \quad S = p - 3$.

解 (1) 令 $Q = S$ 有 $\dfrac{100}{3} - \dfrac{2}{3}p = -20 + p$,得 $p_0 = 32$

(2) 令 $Q = S$,得

$\begin{cases} p^2 + 2Q^2 = 114 \\ S = p - 3 \\ S = Q \end{cases}$ 整理得 $p^2 - 4p - 32 = 0$,解的 $p = 8, p = -4$(舍去)

所以 $p_0 = 8$

总习题 1

1. 填空题(略)

2. 选择题(略)

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域是区间 $[0,1]$，试求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(x-a)+f(x+a)\ (a>0)$.

解 (1) 由题意有，$x^2\leqslant 1$，于是函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2) 由题意有 $\begin{cases}0\leqslant x-a\leqslant 1\\0\leqslant x+a\leqslant 1\end{cases}$ 推得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，又当 $a>\frac{1}{2}$ 时无解，于是函数的定义域为

$$[a,1-a]\ (0<a\leqslant\frac{1}{2})$$

4. 设 $f(x)=e^x$，$g(x)=\begin{cases}-1, & |x|>1\\0, & |x|=1\\1, & |x|<1\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$，$f[g(x)]$.

解 令 $g(u)=\begin{cases}-1, & |u|>1\\0, & |u|=1\\1, & |u|<1\end{cases}$ $u=f(x)=e^x$，有

$x>0, u>1$；$x=0, u=1$；$x<0, u<1$；于是有

$$g[f(x)]=\begin{cases}-1, & x>0\\0, & x=0\\1, & x<0\end{cases}$$

令 $f(u)=e^u$，$u=g(x)=\begin{cases}-1, & |x|>1\\0, & |x|=1\\1, & |x|<1\end{cases}$，有

$|x|>1$ 时 $u=-1$；$|x|=1$ 时 $u=0$，$|x|<1$ 时 $u=1$，于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-1}, & |x|>1\\1, & |x|=1.\\e, & |x|<1\end{cases}$$

5. 设 $f(x)=2\ln x$，且 $f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)$，求 $\varphi(x)$ 及定义域.

解 设 $u=\varphi(x)$，则有 $f(u)=2\ln u$，于是有 $2\ln u=\ln(1-\ln x)$，

整理有 $\ln u^2=\ln(1-\ln x)$

即

$$u^2=(1-\ln x)$$

得

$$\varphi(x)=\sqrt{(1-\ln x)}\quad(0<x\leqslant e)$$

6. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 为常数），且 $|a|\neq|b|$. 求 $f(x)$ 并判断其奇偶性.

解 由于 $\begin{cases}af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}\\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx\end{cases}$ 有 $\begin{cases}a^2f(x)+abf(\frac{1}{x})=\frac{ac}{x}\\ abf(\frac{1}{x})+b^2f(x)=bcx\end{cases}$ 整理有

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx)$$

又

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{-x}+bx)=-\frac{c}{a^2-b^2}(\frac{a}{x}-bx)=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

7. 求函 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 数的反函数.

解 等式两端立方，有

$$\begin{aligned}y^3&=(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})^3\\&=2x+3(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}})^2\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}+3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})^2\\&=2x-3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}-3\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\\&=2x-3y\end{aligned}$$

解出 $x=\frac{y^3+3y}{2}$，反函数 $y=\frac{1}{2}(3x+x^2)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant0\end{cases}$；求 $f[\varphi(x)]$.

解 令 $f(u)=\begin{cases}e^u, & u<1\\ u, & u\geqslant1\end{cases}$，$u=\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant0\end{cases}$

当 $x<0$ 时，$u=x+2$，且有 $\begin{cases}u<1, & x<-1\\ u,\geqslant1 & x\geqslant-1\end{cases}$

当 $x\geqslant0$ 时，$u=x^2-1$，且有 $\begin{cases}u<1, & x<\sqrt{2}\\ u\geqslant1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$

最后有 $$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$