少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材（试用）

高等数学练习册

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

下册

国家行政学院出版社
红旗出版社

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材（试用）

高等数学练习册

（下　册）

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会　编

主　　编　罗　群
编写人员　罗　群　余翊华　樊　玲

国家行政学院出版社
红　旗　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/教育部《少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材》编写委员会编．－北京：国家行政学院出版社，2007.2

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材．试用

ISBN 978－7－80140－547－0

Ⅰ.高… Ⅱ.教… Ⅲ.高等数学－研究生教育－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第021011号

高等数学练习册

（下　册）

教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会　编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社　出版

北京市海淀区长春桥路6号(100089)

新华书店总经销

开封市第一印刷厂印刷

880×1230毫米　1/16开本　23.25印张　465千字

2007年2月第1版　2007年2月第1次印刷

印数：1－1000

ISBN 978-7-80140-547-0/0·46　定价：37.20元（全二册）

教育部“少数民族高层次骨干人才”
硕士研究生基础强化培训
教材编写委员会

主任委员　阿布都

副主任委员　次仁多布杰　张英海

编　　委　（按姓氏笔画为序）

马锦卫　朱建平　刘翠兰　李　山

邱树森　宋太成　张连江　张　澍

林家儒　林　锋　金炳镐　罗　群

周维群　钟义信　蒋原伦　韩俊梅

曾利君　曾卿秀　赖辉亮

前言

大力培养少数民族高层次骨干人才是实践“三个代表”重要思想、落实科学发展观、全面建设小康社会的迫切需要，是贯彻党的民族政策、增强民族团结、维护祖国统一的现实需要，是贯彻科教兴国战略、推进西部大开发战略的重大举措，是内地高校责无旁贷的政治任务。

为顺利实施国家“少数民族高层次骨干人才”培养计划，适应“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训教学的需要，教育部民族教育司组织编写了《古典文学》、《现当代文学》、《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》、《信息技术》、《英语》、《马克思主义理论》、《民族理论与民族政策》等“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训系列教材。本套教材的使用对象为参加“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训的学生。

按照教育部对硕士研究生基础强化培训的教学要求，本套教材参照近年来少数民族本科毕业生的普遍水平，以及少数民族学生在研究生入学考试中的重点难点，遵循强化基础、突出重点的原则进行编写，使这套教材的基础课程综合水平达到攻读硕士研究生课程的基本要求，从而全面提高学生的科学和人文素养，增强学生的实践能力和科研创新能力，为在西部大开发和民族地区发展中的骨干打下坚实的知识基础。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

编写说明

高等数学是理工科与经济管理各专业的一门重要基础课，它的基本内容与思想方法，在数学的各个分支以及科学技术的各个领域都有广泛应用。

本书是为少数民族硕士研究生在高等数学方面作基础强化培训而编写的教材，分为上、下两册。上册已出版，这是下册。下册内容为：多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程共4章，各节配有习题。书中知识结构系统完整，注重基本理论与思维方法，扩展的部分加以“*”号，内容安排由浅入深、渐进综合，条理清晰、论证详细，例题丰富、习题精选，利于学生加深概念理解，巩固基本知识，提高抽象思维和应用能力，满足理工、经管各类专业少数民族研究生的不同层次需要，使学生的基础综合水平达到攻读硕士研究生课程的基本要求。

参加本书编写工作的有：余翊华（第八章）、罗群（第九、十章）、樊玲（第十一章）。

在教材编写的过程中，我们得到了教育部民族教育司、北京邮电大学、北京邮电大学民族教育学院和信息工程学院以及红旗出版社、国家行政学院出版社的大力支持，得到了阮传概、陆传赉、钮心忻教授和朱建平老师的大力帮助。北京邮电大学牛少彰教授、闵祥伟教授和西南大学陈映萍教授一起，对书稿进行了认真审阅，提出了许多宝贵意见和建议。在此，我们表示衷心的感谢。

限于编者水平，同时由于编写时间也非常仓促，教材中一定存在不妥之处，诚恳希望广大读者批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2006年12月

目　录

第八章

多元函数微分学

内容提要

一、多元函数的极限与连续性

1. 多元函数的概念

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个区域,若对于每一个 $\boldsymbol{x}\in D$,有唯一的实数 y 与其对应,则称 $\boldsymbol{x}$ 是自变量,y 是 $\boldsymbol{x}$ 的多元函数,记做

$$y=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in D,$$

D 称为多元函数的定义域.

2. 多元函数的极限定义

设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 的某一邻域内有定义(点 $\boldsymbol{a}$ 可除外).如果存在实数 A,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时,有

$$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时的极限,记做

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A \text{ 或 } f(\boldsymbol{x})\to A\quad(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

多元函数极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$ 中,“$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$”是指 $\boldsymbol{x}$ 以任何方式趋于 $\boldsymbol{a}$ 时,其函数值 $f(\boldsymbol{x})$ 趋于 A.因此,在判断多元函数极限不存在时,一般考虑点 $\boldsymbol{x}$ 按其种特殊方式趋于 $\boldsymbol{a}$ 时,$f(\boldsymbol{x})$ 的极限是否存在.如果当 $\boldsymbol{x}$ 沿两种不同路径趋于 $\boldsymbol{a}$ 时,$f(\boldsymbol{x})$ 趋于两个不同常数,或者 $\boldsymbol{x}$ 沿某种特殊路径趋于 $\boldsymbol{a}$ 时,$f(\boldsymbol{x})$ 的极限不存在,那么就可以确定 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ 不存在.

3. 关于多元函数极限的几条性质

(1)四则运算法则

设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$,$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})=B$,则

(ⅰ)$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}[f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x})]=A\pm B=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})\pm\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})$;

(ⅱ)$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=AB=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})$;

(ⅲ)当 $B\neq0$ 时,$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})}{\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})}$.

(2)夹逼法则

设 $f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$ 和 $h(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个去心领域内有定义，并且满足 $f(\boldsymbol{x})\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant h(\boldsymbol{x})$. 如果 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}h(\boldsymbol{x})$，那么 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})=A$.

4. 多元函数的连续性

设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个领域内有定义，且

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a}),$$

则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 处连续. 函数的不连续点称为间断点.

多元初等函数在其定义区域内是连续的.

如果函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在区域 D 内的每一点都连续，则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内连续，或称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 D 内的连续函数.

二、偏导数与全微分

1. 偏导数

(1)偏导数的概念

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记做 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0,y_0)$.

类似地，$f(x,y)$ 关于 y 和偏导数定义为

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

实际上，$f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 分别是一元函数 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$ 分别在点 x_0 与 y_0 处的导数.

(2)高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的两个偏导数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 都存在，那么在 D 内，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数. 如果这两个函数关于 x 和 y 的偏导数存在，则称这些偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，共有四个：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),$$

其中，第二，三两个偏导数称为二阶混合偏导数.

用类似的方法可以给出三阶，四阶，…，n 阶偏导数.

(3)二阶混合偏导数相等的充分条件

如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 f_{xy} 与 f_{yx} 在区域 D 内连续，那么在 D 内有

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

2. 全微分

(1)全微分的定义

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\tag{8.1}$$

其中，A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数在点 (x,y) 处的全微分，记做 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

从(8.1)式可以看出，当 $\rho\to 0$ 时，全增量 Δz 与全微分 $\mathrm{d}z$ 的差是 ρ 的高阶无穷小，所以当 ρ 较小时，可以用 $\mathrm{d}z$ 近似代替 Δz.

(2)可微的必要条件

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则：

(ⅰ)$f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续；

(ⅱ)函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

(3)可微的充分条件

若函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内处处可偏导，且偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在该点连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微.

特别注意多元函数与一元函数几个相关概念关系的异同.

一元函数导数与连续的关系为，一元函数在某点可导，则在该点必连续，反之，连续未必可导. 但对多元函数，此结论不成立，即多元函数在一点处的偏导数存在不能保证函数在该点连续，多元函数在一点不连续也并不能说函数在该点偏导数不存在.

一元函数可导与可微的关系为，一元函数在某点可导与可微是等价的. 而多元函数在某点处的偏导数均存在并不能保证它在该点的可微性，偏导数存在仅是可微的一个必要条件.

3. 多元复合函数的求导法则

若函数 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 可微，而 $u=u(t),v=v(t)$ 关于 t 可导，则复合函数 $z=f[u(t),v(t)]$ 关于 t 也可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{8.2}$$

若函数 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 可微，且 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在 (x,y) 都存在偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在 (x,y) 存在偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{8.4}$$

公式(8.2)和公式(8.3)，(8.4)都叫链锁法则，前者只有一个自变量，后者有两个自变量. 当自变量及中间变量的个数为其他情况时，相应的链锁法则可依次类推.

求复合函数的偏导数，关键是分清各变量间的复合关系.

4. 隐函数的求导公式

(1)一个方程的情形

(ⅰ)设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

(ⅱ)设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数,且

$$F(x_0,y_0,z_0)=0,\quad F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

(2)方程组的情形

设函数 $F(x,y,u,v)$,$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的雅可比(Jacobi)行列式:

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零,则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$,在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y),\end{cases}$ 它们满足条件

$$u_0=u(x_0,y_0),\quad v_0=v(x_0,y_0),$$

并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

当自变量及函数的个数为其他情况时,偏导数的公式以此类推.

5.方向导数与梯度

(1)方向导数

设函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域内有定义,$\boldsymbol{l}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个单位向量,f 在点 $\boldsymbol{a}$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{a})=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{a})}{t},$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

它表示 f 在点 a 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

对于 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果它在点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可微，则函数在点 P 沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，并且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cos<\boldsymbol{l},\hat{x}_i>,$$

其中，$\cos<\boldsymbol{l},\hat{x}_i>(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

(2)梯度

设 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数存在，则称向量

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$

为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 梯度向量(简称梯度)，记做 $\mathrm{grad}f$ 或 ∇f.

函数 f 在给定点处沿梯度方向的方向导数最大，其值等于 $|\mathrm{grad}f|$.

三、多元函数微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线和法平面

(1)设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad a\leqslant t\leqslant b,\\ z=z(t),\end{cases}$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Γ 上的一点(对应于 $t=t_0$). 设 $x(t),y(t),z(t)$ 对 t 可导，且 $x'(t_0)$，$y'(t_0)$，$z'(t_0)$ 不全为 0，则曲线 Γ 在点 M_0 处的切向量为

$$\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\},$$

曲线在点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2)如果曲线 Γ 以一般方程给出

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，且 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$ 在点 M_0 的某个邻域内有连续的偏导数. 若 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}\neq 0$，则 Γ 在点 M_0 处的切向量为

$$\tau=\left.\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}\right|_{M_0}.$$

此时，曲线的切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}.$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

2. 曲面的切平面与法线

(1)设曲面$\sum$的方程为

$$F(x,y,z)=0,$$

点$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上的一点. 设F_x,F_y,F_z在M_0处连续,不全为零,则曲面$\sum$在M_0点处的法向量是

$$\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\},$$

过M_0点的切平面的方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(2)曲面$\sum$由显式方程

$$z=f(x,y)$$

确定时,它可以看作是

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0.$$

这时,过曲面上一点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\},$$

切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

四、多元函数的极值

1. 极大值与极小值的定义

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域内有定义,若对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y),都有

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0),$$

则称函数在点(x_0,y_0)有极大值$f(x_0,y_0)$,称点(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极大值点;若对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y),都有

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0),$$

则称函数在点(x_0,y_0)有极小值$f(x_0,y_0)$,称点(x_0,y_0)为$f(x,y)$的极小值点.

极大值,极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

2. 函数有极值的必要条件

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数,且在点(x_0,y_0)处有极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0.$$

3. 函数有极值的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$; $f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0),$$

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需要另作讨论.

4. 条件极值

设有目标函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求目标函数 u 在条件 $\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，$\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，$\cdots$，$\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ $(m<n)$ 下的极值问题，称为条件极值问题.

求条件极值的一般方法是拉格朗日乘子法. 例如，函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，首先构造辅助函数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

令函数 $F(x,y,\lambda)$ 关于 x,y,λ 的三个偏导数为零，得方程组

$$\begin{cases}F_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0,\\F_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0,\\F_\lambda(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

从方程组中解出 x,y 及 λ，这样得到的 (x,y) 就是函数 $z=f(xy)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)\doteq0$ 下的可能极值点.

称函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 是拉格朗日函数，λ 是拉格朗日乘子.

当自变量及约束条件的个数为其他情况时，依此类推.

综合举例

一、多元函数的极限与连续

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{x\sin y}$；　　(2) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(3) $z=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；　　(4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

解 (1) 当且仅当 $x\sin y\geqslant0$ 时，$\sqrt{x\sin y}$ 才有意义. 所以函数的定义域为

$$x\geqslant0\ 且\ 2k\pi\leqslant y\leqslant(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

或

$$x\leqslant0\ 且\ (2k+1)\pi\leqslant y\leqslant(2k+2)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

(2) 根据 $y^2-2x+1>0$，所以定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2>2x-1\}$.

(3) 根据

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x^2+y^2}\geqslant1,\\-1\leqslant\dfrac{1}{x^2+y^2}\leqslant1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\leqslant4,\\x^2+y^2\geqslant1,\end{cases}$$

所以定义域是 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

(4)根据

$$\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x-\sqrt{y}\geqslant 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ x^2\geqslant y.\end{cases}$$

所以定义域是 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

例 2 设 $f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x^3-2xy^2\sqrt{xy}+3xy^4}{y^3}$,试求 $f(x,y)$.

解 因为

$f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x^3-2xy^2\sqrt{xy}+3xy^4}{y^3}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-2\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\sqrt{xy}+3(\sqrt{xy})^2$. 令 $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\sqrt{xy}$,得

$$f(u,v)=u^3-2uv+3v^2.$$

例 3 求下列函数的极限:

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2y^2}$; (4)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

(5)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sin xy)^{\frac{1}{xy}}$; (6)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-2xy}{x^2+y^2}$;

解 (1)因为 $0\leqslant|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$,则

$$0\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0.$$

根据夹逼定理,有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(2)因为

$$0\leqslant\frac{x^2}{|x|+|y|}\leqslant\frac{x^2}{|x|}=|x|\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{|x|+|y|}=0$. 同理 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y^2}{|x|+|y|}=0$.

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$.

(3)这里函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2y^2}$ 在原点及 x 轴、y 轴上无定义,但在(0,0)的邻域内除去(0,0)及两直线段 $x=0,y=0$ 外均有定义,故可以考虑该函数在原点是否有极限的问题. 因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $(x^2+y^2)\to 0$,且 $\sin\dfrac{1}{x^2y^2}$ 是有界变量. 所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2y^2}=0.$$

(4)因为当 $(x,y)\to(0,3)$ 时,$xy\to 0$,所以 $\dfrac{\sin xy}{xy}\to 1$,于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot 3=3.$$

(5)原极限属于 1^{∞} 型.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sin xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}\right]^{\frac{\sin xy}{xy}}=e^{1}=e.$$

(6)因为 $\frac{1-2xy}{x^2+y^2}$ 在点(0,1)处连续,故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-2xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1.$$

例 4 证明下列函数极限不存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$.

解 (1)当 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋向于(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1+k}{1+k^2}.$$

当 k 取不同值时,上述极限值不相同,所以,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

(2)因为

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\frac{\left(\sin\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\frac{x^2+y^2}{2}\cdot x^2y^2}=\left(\frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2y^2},$$

根据 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2=1.$$

而当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋向于原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2y^2}$ 不存在. 综上所述,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ 不存在.

(3)当 (x,y) 沿 $y=x$ 趋向于(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+0}=1.$$

当 (x,y) 沿 $y=-x$ 趋向于(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=0.$$

所以,函数极限不存在.

(4)当(x,y)沿 $y=x$ 趋向于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^3}{x^2+x}=0.$$

当(x,y)沿 $y=x^3-x^2$ 趋向于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x^2\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^2+(x^3-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}1+(x^2-x)^3=1.$$

所以,函数极限不存在.

当证明多元函数极限不存在时,一般先考虑 x 以直线趋于 a 的特殊方式.但有时也会遇到这样的情况:虽然沿任意直线方向函数都趋于同一个常数,然而函数的极限仍有可能不存在,这时就需要考虑其他的方法,例如,考虑 $\boldsymbol{x}$ 以曲线趋于 $\boldsymbol{a}$ 的特殊方式.

例 5 如果对于任意的 k, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=A$ 成立,是否必有$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=A$? 说明理由.

解 不一定.例如,对于任意 k,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k}x=0,$$

但(x,y)沿着曲线 $y=-x+x^2$ 趋向于$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2\to 0}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(-x+x^2)}{x+(-x+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x^3}{x^2}=-1,$$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$不存在.

例 6 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

分别关于每个变量 x 或 y 是一元连续函数,但它在原点不是二元连续函数.

证 对每一个固定的 y_0,若 $y_0\neq 0$,则

$$f(x,y_0)=\frac{2xy_0}{x^2+y_0^2},$$

显然 $f(x,y_0)$是 x 的一元连续函数.若 $y_0=0$,则 $f(x,0)=0$,显然也是 x 的连续函数.同理,对于每一个固定的 x_0,$f(x_0,y)$是 y 的一元连续函数.

当(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于原点时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

当 k 取不同值时,上述极限值不相同,所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$不存在.因此,二元函数 $f(x,y)$在$(0,0)$点不连续.

例 7 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com