21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

电磁场与电磁波

第四版

全程导学及习题全解

严琪琪　赵立珍　编

邓　晖　主审

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

0441.4/101
2007

21世纪高等院 同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYU ONGBUFUDAO

电磁场与电磁波

第四版

全程导学及习题全解

严琪琪　赵立珍　编
邓　晖　主审

阜阳师范学院图书馆
藏书

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波全程导学及习题全解 / 严琪琪，赵立珍编.
—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-381-4

Ⅰ.电... Ⅱ.①严...②赵... Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料
②电磁波—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第104021号

电磁场与电磁波全程导学及习题全解

严琪琪　赵立珍　编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦11层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
开　本	787 × 1092　1/16
版　次	2007年9月第1版
印　次	2007年9月第1次印刷
印　张	13.875
字　数	200千字
印　数	1～5000册
定　价	16.00元
书　号	ISBN 978-7-80221-381-4

版权所有　侵权必究

前　言

“电磁场与电磁波”是电子信息类专业的一门技术基础课，本课程内容是电子信息类专业学生所具备的知识结构中的重要组成部分。“电磁场与电磁波”课程中的基础物理量是矢量场，内容比较抽象，被认为是一门教师难教，学生难学的课程。为方便学生在学习过程中进行参考，在出版社的大力支持下，配合教材，我们编写了这本学习辅导用书。

本书是由谢处方和饶克谨教授编写的《电磁场与电磁波》(第四版，杨显清、王园、赵家升修订，高等教育出版社）的配套辅导用书。本书内容与教材对应，分为八章，包括矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波和电磁辐射等内容。每章分为五部分:

一、本章知识要点

本章知识要点，对教材中的相应内容进行了系统、全面的归纳和总结，有助于读者全面掌握基本知识，清晰把握各章知识的脉络。同时，这一部分也可以作为复习备考的重要手册。

二、本章重点难点

本章重点难点，针对每一章中的重点、难点以及一些容易混淆的知识点进行了强调。

三、典型例题解析

给出一些经典例题的详细解答，从而帮助学习者真正掌握各章的精髓。

四、思考题解答

对教材中的思考题做了详细解答，给出了解题的思路，对培养学习者的思维能力，提高分析问题和解决问题的能力等，都有着较好的帮助作用。

五、习题全解

习题全解，对原教材中的全部习题做了详细解答。从学习者的角度，给出了解题的思路和步骤，对培养学习者的思维能力，树立理论联系实际的科学观点，提高综合分析问题和解决问题的能力等，都有着很大的帮助作用。

希望能帮助使用该教材的读者理解和掌握本课程的基本要求和重点内容，正确理解电磁场与电磁波的基本概念、规律和方法。本书编写中，参考了近年来国内外相关的教材和参考书，吸收了很多有益的经验，受到了不少启示。

本书由严琪琪，赵立珍等编写。全书由邓晖老师主审。本书还得到王天磊、金硕、胡涛等同志给予的大力支持和帮助，编者对此深表感谢。本书在编写过程中得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的帮助、支持，在此表示衷心的感谢！对《电磁场与电磁波》（第四版）教材作者谢处方、饶克谨教授和修订者杨显清、王园、赵家升等老师，表示衷心的谢意！

由于时间仓促，编者的水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2007年8月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章　矢量分析

本章知识要点

本章首先介绍了标量场和矢量场的概念，然后着重讨论标量场的梯度，矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律，在此基础上介绍格林定理和亥姆霍兹定理等几个重要定理.

一、标量场和矢量场

1. 若所研究的物理量为一标量，则该物理量所确定的场为标量场. 如温度场，密度场等. 用一个标量函数来表示该场为：

$$u=u(x,y,z)$$

2. 若所研究的物理量为一矢量，则该物理量所确定的场为矢量场. 如力场、电场等. 用一个矢量函数来表示该场为：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$$

二、标量场的梯度

标量场 u 的梯度是一个矢量场，它的方向沿场量 u 变化率最大的方向，大小等于其最大变化率.

在直角坐标系中，梯度的计算式为：

$$\nabla u=(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z})u$$

在圆柱坐标系和球坐标系中，梯度的计算式分别为：

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial u}{\rho\partial \phi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial u}{r\partial \theta}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial u}{r\sin\theta\partial \phi}$$

三、矢量场的散度和旋度

1. 矢量场的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 是个标量，在直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系中的计算式分

别为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

2. 矢量场的旋度$\nabla \times \boldsymbol{F}$是个矢量，在直角坐标系，圆柱坐标系及球坐标系中分别表示为：

$$\nabla \times \boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix}$$

四、几个重要的定理

1. 散度定理：矢量场$\boldsymbol{F}$的散度$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$在体积$V$上的体积分，等于矢量场$\boldsymbol{F}$在限定该体积的闭合面$S$上的面积分.

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

2. 斯托克斯定理：矢量场$\boldsymbol{F}$的旋度$\nabla \times \boldsymbol{F}$在曲面$S$上的面积分等于矢量场$\boldsymbol{F}$在限定曲面的闭合曲线$C$上的线积分.

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

3. 格林定理

格林第一恒等式：$\int_V (\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V=\oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$

格林第二恒等式：$\int_V (\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\oint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$

4. 亥姆霍兹定理

在有限区域 V 内，任一矢量场由它的散度，旋度和边界条件惟一地确定，且可表示为：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\cdot u(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中，$u(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V\dfrac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'-\dfrac{1}{4\pi}\oint_S\dfrac{\boldsymbol{e}'_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\boldsymbol{e}'_{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$

本章重点难点

(1)掌握标量场的梯度，矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律.

(2)理解几个重要定理.

典型例题解析

例 1　设 u 是空间坐标 x,y,z 的函数，证明：

(1)$\nabla f(u)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u$

(2)$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

(3)$\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

证明　(1)$\because u$ 是空间坐标系 x,y,z 的函数，则

$$\begin{aligned}\nabla f(u)&=\frac{\partial f_x(u)}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f_y(u)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f_z(u)}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\partial f_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial f_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial f_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)=\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\nabla u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u)&=\frac{\partial A_x(u)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(u)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(u)}{\partial z}\\&=\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=\nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\end{aligned}$$

$$(3)\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x(u) & A_y(u) & A_z(u)\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z(u)}{\partial y}-\frac{\partial A_y(u)}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial z}-\frac{\partial A_z(u)}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y(x)}{\partial x}-\frac{\partial A_x(u)}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\left(\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\left(\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}=\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x(u)}{\partial u} & \dfrac{\partial A_y(u)}{\partial u} & \dfrac{\partial A_z(u)}{\partial u}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial A_z(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\left(\frac{\partial A_y(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial A_x(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

左边=右边　　$\therefore\nabla\times\boldsymbol{A}(u)=\nabla u\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}$

思考题解答

1.1　如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,是否意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$? 为什么?

解答　并不意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot\cos\theta_{AB}$,$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{C}|\cos\theta_{AC}$,只要 $|\boldsymbol{B}|\cos\theta_{AB}=|\boldsymbol{C}|\cos\theta_{AC}$,则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$. 此时的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 并不是唯一的. 所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,并不意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

1.2　如果 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 是否意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$? 为什么?

解答　并不意味着 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 因为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta_{AB}$,$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|\sin\theta_{AC}$,$\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}$、$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ 分别为满足右手螺旋法则的单位矢量. 只要 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 在同一平面上,则 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$,且 $|\boldsymbol{B}|\sin\theta_{AB}=|\boldsymbol{C}|\sin\theta_{AC}$,则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,所以此时的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 也不唯一确定.

1.3　两个矢量的点积能是负的吗? 如果是,必须是什么情况?

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

解答　能是负的. 因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\theta_{AB}$，当 $\frac{\pi}{2}<\theta_{AB}<\pi$ 时，$\cos\theta_{AB}<0$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}<0$.

1.4　什么是单位矢量？什么是常矢量？单位矢量是否为常矢量？

解答　模等于 1 的矢量叫做单位矢量. 常矢量是指大小和方向都不变的矢量. 单位矢量不一定都是常矢量.

1.5　在圆柱坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho a+\boldsymbol{e}_\phi b+\boldsymbol{e}_z c$，其中 a、b、c 为常数，则 $\boldsymbol{A}$ 是常矢量吗？为什么？

解答　$\boldsymbol{A}$ 是常矢量.

1.6　在球坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r a\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta a\sin\theta$，其中 a 为常数，则 $\boldsymbol{A}$ 能是常矢量吗？为什么？

解答　$\boldsymbol{A}$ 是常矢量.

$\because \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r a\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta a\sin\theta$

$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$

$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_x\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{e}_y\cos\theta\sin\varphi-\boldsymbol{e}_z\sin\theta$

$$\therefore \boldsymbol{A}=a\cos\theta(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\boldsymbol{e}_z)-a\sin\theta(\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y-\sin\theta\boldsymbol{e}_z)$$
$$=a\boldsymbol{e}_z$$

$\therefore \boldsymbol{A}$ 为常矢量.

1.7　什么是矢量场的通量？通量的值为正、负或 0 分别表示什么意义？

解答　矢量场 $\boldsymbol{F}$ 穿出闭合曲面 S 的通量为：

$$\psi=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_n dS$$

当 $\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}>0$ 时，表示穿出闭合曲面 S 的通量多于进入的通量，此时闭合曲面 S 内必有发出矢量线的源，称为正通量源.

当 $\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}<0$ 时，表示穿出闭合曲面 S 的通量少于进入的通量，此时闭合曲面 S 内必有汇集矢量线的源，称为负通量源.

当 $\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ 时，表示穿出闭合曲面 S 的通量等于进入的通量，此时闭合曲面内正通量源与负通量源的代数和为 0，或闭合面内无通量源.

1.8　什么是散度定理？它的意义是什么？

解答　矢量分析中的一个重要定理：

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}dV=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$$

称为散度(高斯)定理.

意义：矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 在体积 V 上的体积分等于矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在限定该体积的闭合

面 S 上的面积分,是矢量的散度的体积分与该矢量的闭合曲面积分之间的一个变换关系.

1.9 什么是矢量场的环流?环流的值为正、负或 0 分别表示什么意义?

解答 矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿场中的一条闭合回路 C 的曲线积分,$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$,称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿闭合路径 C 的环流.

$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}>0$ 或 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}<0$,表示场中有产生该矢量场的源,常称为旋涡源.

$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,表示场中没有产生该矢量场的源.

1.10 什么是斯托克斯定理?它的意义是什么?斯托克斯定理能用于闭合曲面吗?

解答 在矢量场 $\boldsymbol{F}$ 所在的空间中,对于任一以曲线 C 为周界的曲面 S,存在如下重要关系式:

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

称为斯托克斯定理.

意义:矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 在曲面 S 上的面积分等于矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在限定曲面的闭合曲线 C 上的线积分,是矢量旋度的曲面积分与该矢量沿闭合曲线积分之间的一个变换关系. 能用于闭合曲面.

1.11 如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 能够表示为一个矢量函数的旋度,这个矢量场具有什么特性?

解答 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$,即 $\boldsymbol{F}$ 为无散场.

1.12 如果矢量场 $\boldsymbol{F}$ 能够表示为一个标量函数的梯度,这个矢量场具有什么特性?

解答 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$,即 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场.

1.13 只有直矢量线的矢量场一定是无旋场,这种说法对吗?为什么?

解答 不对. 电力线可弯,但无旋.

1.14 无旋场与无散场的区别是什么?

解答 无旋场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度处处为 0,即 $\nabla\times\boldsymbol{F}\equiv 0$,它是由散度源所产生的,它总可以表示为某一标量场的梯度,即 $\nabla\times(\nabla u)=0$.

无散场 $\boldsymbol{F}$ 的散度处处为 0,即 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}\equiv 0$,它是由旋涡源所产生的,它总可以表示为某一矢量场的旋涡,即 $\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{A})=0$.

习题全解

1.1 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3$$

$$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_x2$$

求：(1)$\boldsymbol{e}_A$；(2)$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4)$\theta_{AB}$；(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(7)$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(8)$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

解　(1)$\because \boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$

$\therefore |\boldsymbol{A}|=\sqrt{1+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

$\therefore \boldsymbol{e}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z$

(2)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)-(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

$\therefore |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{1+6^2+4^2}=\sqrt{53}$

(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-8-3=-11$

(4)$\because \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta_{AB}$

$\therefore \cos\theta_{AB}=\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\dfrac{-11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}}=-\dfrac{11}{\sqrt{238}}$

$\therefore \theta_{AB}=\arccos\left(-\dfrac{11}{\sqrt{238}}\right)$

(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为：

$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB}=|\boldsymbol{A}|\cdot\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=-\dfrac{11}{\sqrt{17}}$

(6)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{e}_x-13\boldsymbol{e}_y-10\boldsymbol{e}_z$

(7)$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z$

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z)=8+10-60=-42$

$\because \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

$\therefore (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=-42$

(8)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

$\therefore (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{e}_x-40\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

$$=11\boldsymbol{B}+11\boldsymbol{C}$$
$$=11(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)+11(5\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_z)$$
$$=55\boldsymbol{e}_x-44\boldsymbol{e}_y-11\boldsymbol{e}_z$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$.

(1)判断$\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形;(2)求三角形的面积.

解 (1) $|P_1P_2|=\sqrt{(4-0)^2+(1-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{17}$

$$|P_2P_3|=\sqrt{(6-4)^2+(2-1)^2+(5+3)^2}=\sqrt{69}$$

$$|P_3P_1|=\sqrt{(0-6)^2+(1-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{86}$$

$$|P_3P_1|^2=86,|P_1P_2|^2+|P_2P_3|^2=69+17=86$$

即$|P_3P_1|^2=|P_1P_2|^2+|P_2P_3|^2$

$\therefore\triangle P_1P_2P_3$ 为一直角三角形.

(2)$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\cdot|P_1P_2|\cdot|P_2P_3|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{69}=\frac{1}{2}\sqrt{1173}\approx17.13$

1.3 求点 $P'(-3,1,4)$到点 $P(2,-2,3)$的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向.

解 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}'=(2+3)\boldsymbol{e}_x+(-2-1)\boldsymbol{e}_y+(3-4)\boldsymbol{e}_z=5\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$

则 $\boldsymbol{R}$ 与 x,y,z 轴的夹角分别为:

$$\theta_x=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+3^2+1^2}}\right)=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)=32.31^\circ$$

$$\theta_y=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right)=120.47^\circ$$

$$\theta_z=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{35}}\right)=99.73^\circ$$

1.4 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6$,求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量.

解 $\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\frac{(2\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z)\cdot(4\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y+6\boldsymbol{e}_z)}{\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-5)^2+6^2}}=\frac{8-15-24}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{77}}=-\frac{31}{\sqrt{2233}}$

$\therefore\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为:

$$\theta_{AB}=\arccos\left(-\frac{31}{\sqrt{2233}}\right)=131^\circ$$

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为:

$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cdot\cos\theta_{AB}=|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{31}{\sqrt{77}}$$

1.5 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$,求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 上的分量.

解 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-13\boldsymbol{e}_x+22\boldsymbol{e}_y+10\boldsymbol{e}_z$

$\therefore(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$在$\boldsymbol{C}$上的分量为：

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_C=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|\cdot\cos\theta_{(A\times B)C}=\frac{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=\frac{-25}{\sqrt{3}}=-\frac{25}{3}\sqrt{3}$$

1.6 证明：如果$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

证明 $\because\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

$\therefore\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$

又$\because\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$

$\therefore\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$

$\therefore\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

1.7 如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量积和矢量积，那么便可以确定该未知矢量. 设$\boldsymbol{A}$为一已知矢量，$p=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$而$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，$p$和$\boldsymbol{P}$已知，试求$\boldsymbol{X}$.

解 $\because\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$

则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$

$\therefore\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{X}=\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$

又$\because\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=p$

$\therefore\boldsymbol{X}=\dfrac{p\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$

1.8 在圆柱坐标中，一点的位置由$\left(4,\frac{2\pi}{3},3\right)$定出，求该点在：(1)直角坐标中的坐标；(2)球坐标中的坐标.

解 (1)由题意知，在圆柱坐标系中$r=4,\theta=\frac{2}{3}\pi,z=3$.

$\therefore$该点在直角坐标系中的坐标为：

$$x=r\cos\theta=4\times\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-2$$

$$y=r\sin\theta=4\times\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\sqrt{3}$$

$$z=3$$

即$(-2,2\sqrt{3},3)$为该点在直角坐标系中的坐标.

(2) $\because x=r\sin\theta\cos\varphi=-2$

$y=r\sin\theta\sin\varphi=2\sqrt{3}$

$z=r\cos\theta=3$

$\therefore \tan\varphi=-\sqrt{3}$

$\therefore \varphi=\dfrac{2}{3}\pi, \tan\theta=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \theta=\arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$\therefore r=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore$该点在球坐标系中的坐标为$\left(5, \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right), \dfrac{2}{3}\pi\right)$

1.9 用球坐标表示的场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{25}{r^2}$.

(1)求在直角坐标中点(−3,4,−5)处的$|\boldsymbol{E}|$和E_x;

(2)求在直角坐标中点(−3,4,−5)处$\boldsymbol{E}$与矢量$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z$构成的夹角.

解 (1)在点(−3,4,−5)处,$r=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{50}$

$\therefore |\boldsymbol{E}|=\dfrac{25}{r^2}=\dfrac{25}{50}=\dfrac{1}{2}$

$$E_x=|\boldsymbol{E}|\cos\theta_{rx}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{10\sqrt{2}}=0.212$$

(2)在点(−3,4,−5)处,$\boldsymbol{r}=-3\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y-5\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}=\frac{25}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{25}{(5\sqrt{2})^3}\cdot(-3\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y-5\boldsymbol{e}_z)=\frac{-3\boldsymbol{e}_x+4\boldsymbol{e}_y-5\boldsymbol{e}_z}{10\sqrt{2}}$$

$\therefore \cos\theta_{EB}=\dfrac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|}=-\dfrac{19}{15\sqrt{2}}$

$\therefore \theta_{EB}=\arccos\left(-\dfrac{19}{15\sqrt{2}}\right)$

1.10 球坐标中两个点(r_1,θ_1,ϕ_1)和(r_2,θ_2,ϕ_2)定出两个位置矢量$\boldsymbol{R}_1$和$\boldsymbol{R}_2$.证明$\boldsymbol{R}_1$和$\boldsymbol{R}_2$间夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

证明 由题意知,

$$\boldsymbol{R}_1=r_1\sin\theta_1\cos\phi_1\boldsymbol{e}_x+r_1\sin\theta_1\sin\phi_1\boldsymbol{e}_y+r_1\cos\theta_1\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{R}_2=r_2\sin\theta_2\cos\phi_2\boldsymbol{e}_x+r_2\sin\theta_2\sin\phi_2\boldsymbol{e}_y+r_2\cos\theta_2\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore \cos\gamma=\frac{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1||\boldsymbol{R}_2|}$$

$$=\frac{r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_1\cos\phi_2+r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi_1\sin\phi_2+r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{r_1r_2}$$

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com