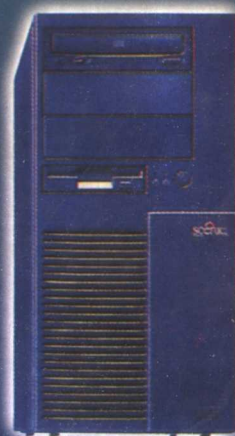


AUTOMATIC CONTROL THEORY

自动控制理论

主编 原忠虎 李浚圣 韩晓微



NEUPRESS
东北大学出版社

自动控制理论

主 编 原忠虎 李浚圣 韩晓微

东北大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

自动控制理论/原忠虎, 李浚圣, 韩晓微主编. —沈阳: 东北大学出版社, 2001.4
ISBN 7-81054-604-X

I. 自… II. ①原… ②李… ③韩… III. 自动控制理论-高等学校-教材 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 05313 号

内 容 提 要

本书是高等工科院校多学科教学用书, 主要包括自动控制原理、现代控制理论和控制系统仿真分析与辅助设计的相关内容。内容精炼, 深入浅出, 注重理解与掌握主要结论, 重在提高应用现代化工具分析问题、解决问题的能力。

本书可作为高等工科院校自动控制、自动化、机电一体化、计算机技术及应用等相关专业本科生教材, 也可供工程技术人员自学和工作参考。

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110004)

电话: (024)23890881

传真: (024)23892538

网址: <http://www.neupress.com> E-mail: neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷

东北大学出版社发行

开本: 787mm × 1092mm 1/16

字数: 318 千字

印张: 12.75

印数: 1~1000 册

2001 年 4 月第 1 版

2001 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑: 向 荣

责任校对: 冯 伟

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定价: 29.00 元

前 言

按照“面向工程、加强基础、突出能力”的指导思想,体现“专业面广、课时数少”的精神,我们编写了这本能适用于高等工科院校多种学科的《自动控制理论》教材。

本书把自动控制原理、现代控制理论及控制系统仿真分析与辅助设计的相关内容有机地融合在一起,注重理解与掌握主要结论,重在提高应用现代化工具分析问题、解决问题的能力。本书内容精炼,层次分明,重点突出,深入浅出,概念清晰,理论联系实际,删除了一些繁琐的理论推导与证明,增加了一些工程实例。

全书共 11 章,主要包括:自动控制的一般概念;建立控制系统数学模型的几种方法以及各方法间的相互转换;线性定常系统的时域分析方法,以一、二阶系统为典型,阐述了系统参数与性能指标间的关系;控制系统的频率响应分析方法;系统的根轨迹分析方法;控制系统稳定性分析的各种方法;状态空间分析法,包括状态空间概念、能控、能观分析、状态反馈配置极点与状态观测器等内容;控制系统设计的有关内容;非线性系统的特性与分析方法;解决离散系统的相关问题;以 MATLAB 为工具,对控制系统进行分析与设计,并给出了大量的应用实例。

本书由集体合作完成,第 1,2,3,4 章由原忠虎编写;第 5,6,7 章由李浚圣编写;第 8,9,10 章由韩晓微编写;第 11 章由李浚圣和韩晓微共同编写;原忠虎负责全书的统编定稿工作。

限于编者水平,且编写时间仓促,书中不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2000 年 12 月

目 录

第1章 自动控制的一般概念	1
1.1 自动控制	1
1.2 反馈控制原理	1
1.3 自动控制系统的分类	2
1.4 典型输入信号	3
习题1	4
第2章 控制系统的数学模型	6
2.1 系统微分方程的建立	6
2.1.1 系统微分方程的建立	6
2.1.2 拉普拉斯变换	7
2.1.3 线性常微分方程的拉氏变换法求解	9
2.2 传递函数	11
2.2.1 传递函数的定义	11
2.2.2 典型环节的传递函数	12
2.3 系统的状态方程	13
2.4 系统传递函数与状态方程的相互转换	16
2.4.1 由传递函数求状态方程	16
2.4.2 由状态方程求传递函数	17
2.5 结构图及其简化	19
2.5.1 结构图的组成	19
2.5.2 结构图的等效变换	19
2.6 信号流程图	23
2.6.1 常用术语	23
2.6.2 系统结构图改写为信号流图	24
2.6.3 梅逊(Mason)增益公式	25
习题2	25
第3章 时域分析	28
3.1 一阶系统的时间响应	28
3.1.1 一阶系统的数学模型	28
3.1.2 一阶系统的单位阶跃响应	28
3.1.3 一阶系统的单位脉冲响应	29
3.1.4 一阶系统的单位斜坡响应	29

3.1.5 一阶系统的单位抛物线响应·····	30
3.2 二阶系统的时间响应·····	30
3.2.1 二阶系统的数学模型·····	30
3.2.2 二阶系统的单位阶跃响应·····	31
3.2.3 动态性能指标·····	32
3.3 高阶系统的性能分析·····	33
3.4 稳态误差计算·····	35
3.4.1 误差传递函数·····	35
3.4.2 系统的类型和典型作用下的稳态误差·····	36
3.4.3 动态误差系数法·····	38
习题 3 ·····	40
第 4 章 频率响应分析 ·····	42
4.1 频率特性·····	42
4.2 幅相频率特性曲线·····	43
4.3 对数频率特性曲线·····	45
4.3.1 对数坐标系·····	45
4.3.2 典型环节的对数频率特性·····	45
4.3.3 开环对数频率特性曲线·····	49
4.4 幅值裕度和相角裕度·····	51
习题 4 ·····	52
第 5 章 根轨迹分析 ·····	54
5.1 根轨迹方程·····	54
5.1.1 控制系统的特征方程·····	54
5.1.2 幅值条件和相角条件·····	55
5.1.3 二阶控制系统计算法的根轨迹图·····	55
5.2 根轨迹绘制的基本法则·····	56
5.2.1 根轨迹的分支数·····	56
5.2.2 根轨迹的连续性和对称性·····	56
5.2.3 根轨迹的起点和终点·····	57
5.2.4 根轨迹的渐近线·····	57
5.2.5 实轴上的根轨迹·····	58
5.2.6 根轨迹的分离(会合)点·····	58
5.2.7 根轨迹的出射角和入射角·····	60
5.2.8 根轨迹与虚轴的交点·····	61
5.2.9 控制系统根轨迹的绘制·····	62
5.3 广义根轨迹·····	64
5.3.1 参数根轨迹·····	64
5.3.2 零度根轨迹·····	65

5.4 控制系统的根轨迹分析	66
5.4.1 系统稳定性的分析	66
5.4.2 闭环零、极点分布对系统性能的影响	68
5.4.3 利用主导极点估算系统的性能指标	69
习题 5	70
第 6 章 控制系统的稳定性	72
6.1 代数法稳定性分析	72
6.1.1 稳定性定义	72
6.1.2 霍尔维茨(Hurwitz)稳定判据	73
6.1.3 劳斯(Routh)稳定判据	74
6.2 频率法稳定性分析	77
6.2.1 奈奎斯特(Nyquist)稳定判据	77
6.2.2 波德(Bode)稳定判据	77
6.3 根轨迹法稳定性分析	78
6.4 李雅普诺夫直接法稳定性分析	78
6.4.1 平衡状态及其稳定性	78
6.4.2 李雅普诺夫直接法稳定性定理	79
6.4.3 线性定常系统稳定判据	80
习题 6	82
第 7 章 状态空间分析	84
7.1 状态方程的解	84
7.1.1 齐次状态方程的解	84
7.1.2 非齐次状态方程的解	85
7.2 矩阵指数	86
7.2.1 矩阵指数的性质	87
7.2.2 直接方法计算矩阵指数	88
7.2.3 拉氏变换法计算矩阵指数	88
7.2.4 化矩阵 A 为标准型法计算矩阵指数	89
7.3 系统的能控性	91
7.4 系统的能观测性	94
7.4.1 线性定常连续系统的能观测性	94
7.4.2 能观测性与能控性的对偶原理	95
7.4.3 能控标准型与能观测标准型	96
7.4.4 系统的分解	99
7.5 状态反馈与输出反馈	99
7.5.1 状态反馈与极点配置	99
7.5.2 输出反馈与极点配置	100
7.6 状态观测器	101

7.6.1 全维状态观测器	101
7.6.2 降维状态观测器	103
习题 7	108
第 8 章 控制系统的综合	110
8.1 常用的校正网络	110
8.1.1 无源超前校正网络	110
8.1.2 无源迟后校正网络	111
8.1.3 无源迟后-超前校正网络	112
8.2 串联校正	113
8.2.1 串联超前校正	114
8.2.2 串联迟后校正	115
8.3 反馈校正	117
习题 8	120
第 9 章 非线性控制系统	121
9.1 典型非线性特性	121
9.1.1 饱和特性	121
9.1.2 死区特性	121
9.1.3 间隙特性	122
9.1.4 摩擦特性	122
9.1.5 继电器特性	123
9.2 相平面法	123
9.2.1 相平面图的绘制	123
9.2.2 奇点	126
9.2.3 极限环	130
9.3 常见非线性特性的描述函数	131
9.3.1 描述函数的基本概念	131
9.3.2 非线性控制系统的典型结构	132
9.3.3 典型非线性特性的 $N(X)$	135
9.3.4 非线性系统的分析	136
习题 9	141
第 10 章 采样系统分析	142
10.1 采样系统的典型结构	142
10.2 信号的采样和保持	143
10.2.1 信号的采样过程	143
10.2.2 信号的保持过程	145
10.3 z 变换	147
10.3.1 z 变换的定义	147
10.3.2 z 变换的求法	148

10.3.3 z 变换的基本定理	151
10.3.4 z 反变换	152
10.4 采样系统的差分方程及其解法	154
10.5 脉冲传递函数	155
10.6 采样系统的稳定性分析	162
10.6.1 时域中稳定判据	162
10.6.2 z 域中稳定判据	163
10.6.3 ω 变换与劳斯稳定判据	163
10.7 采样系统的分析	164
10.7.1 采样系统的时间响应	164
10.7.2 采样系统的稳态误差	165
习题 10	166
第 11 章 控制系统 MATLAB 仿真	168
11.1 MATLAB 系统概述	168
11.1.1 MATLAB 的产生及主要内容	168
11.1.2 MATLAB 语言的特点	169
11.2 MATLAB 的安装、启动和基本操作	171
11.2.1 MATLAB 的安装	171
11.2.2 MATLAB 的启动和基本操作	171
11.3 自动控制系统的仿真	172
11.4 连续系统的时间响应曲线	174
11.4.1 连续系统的时间响应与动态性能指标	174
11.4.2 时间响应仿真常用的 MATLAB 语句	175
11.4.3 时间响应曲线的绘制举例	176
11.5 连续系统的根轨迹绘制	179
11.5.1 根轨迹的概念	179
11.5.2 根轨迹绘制的举例	181
11.6 线性连续系统的奈奎斯特图	183
11.7 线性连续系统的伯德图	185
11.8 MATLAB 仿真的界面设计简介	187
11.8.1 图形用户界面简介	187
11.8.2 用户界面的简单设计	191
习题 11	192
参考文献	194

第 1 章 自动控制的一般概念

1.1 自动控制

在工程和科学发展中,自动控制技术起着越来越重要的作用。需要控制的事例大致有两类:一类是定性的控制,另一类是定量的控制。例如洗衣机的定时洗涤,然后漂清再脱水,这就是一类定性控制,其控制方法是依照预先给出的顺序命令进行的,其目的是使被控制的那些量处于开、关等几个状态,而并不要求连续地精确地控制这些量。而空调器的控制就与此不同,不论室外温度高低,也不论室内人多人少,室内温度都要达到要求的值。这一类控制的目的是使被控制量不受干扰影响而连续地精确地达到要求的量值,属于定量控制。本书将专门介绍定量控制。定量控制不仅应用于日常生活中,而且更广泛地应用到工业自动化生产中。例如电网电压不受负荷大小的影响而保持平稳,电机转速一定或按要求的调速规律变化而不受负载大小的影响,热处理的炉温保持恒定等。

为了使被控量达到要求,就需要一定的操作,这就是控制。所谓控制,是指对被控制对象中某一被控制量或某些被控制量,克服干扰影响达到预先要求状态的手段或操作。控制是一种手段,或是一种操作,实现这种操作可以通过两种途径:一种是由人自己来做;另一种是由人所设计的机器装置完全自动地实现。前一种途径叫人工控制。后一种途径叫自动控制。

整个控制过程,需要完成几项工作,具体地有测量、比较、放大、执行、校正等。自动控制只要用机器装置完全自动地完成上述几项工作就能实现。控制过程一般离不开测量、比较、放大、执行、校正等环节,这些环节由相应的装置来完成,如测量装置、比较装置、放大装置等。装置就是组成元件。能够自动地完成控制过程各项工作的装置总体称为自动控制装置,把被控制对象和自动控制装置结合而构成的整体叫做自动控制系统。本书将介绍自动控制系统的数学模型、自动控制系统常用的几种分析方法,以及如何设计满足一定要求的自动控制系统。

1.2 反馈控制原理

自动控制装置可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制,其中最基本的一种是基于反馈控制原理组成的反馈控制系统。在反馈控制系统中,自动控制装置对被控对象施加的控制作用,是取自被控制量的反馈信息,用来不断修正被控量的偏差,从而实现对被控对象进行控制的任务。这就是反馈控制的原理。

反馈控制系统的工作过程是,由测量装置对被控制量进行检测,并将它反馈回比较电路与给定值相减而得到偏差量,经过放大器放大、变换后,执行装置便依据偏差量的性质对被控制量进行相应的调节,从而使偏差消失或减少到允许的范围内,完成控制任务。典型的反

反馈控制系统基本组成如图 1-1 所示。图中,用“○”表示比较装置,它将测量装置(元件)检测的被控制量与参考输入量进行比较。“-”号表示两者符号相反,即负反馈,“+”号表示两者符号相同,即正反馈,图 1-1 中只有负反馈。信号从输入端沿箭头方向到达输出端的传输通路称为前向通路;系统输出量经过测量装置(元件)反馈到输入端的传输通路称为主反馈回路。前向通路与主反馈通路共同构成主回路。此外,还有局部反馈通路以及由它构成的内回路。只包含一个主反馈通路的系统称为单回路系统;含有两个或两个以上反馈通路的系统称为多回路系统。

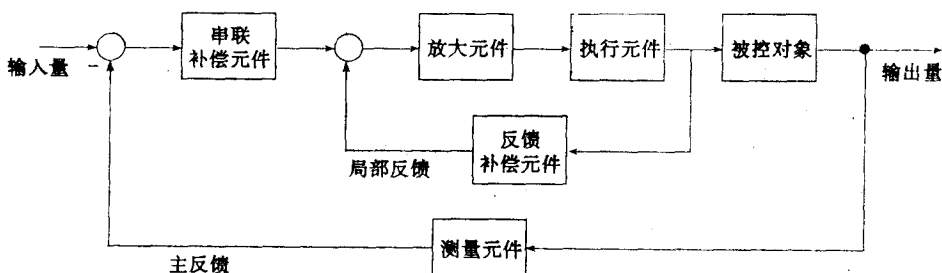


图 1-1 反馈控制系统基本组成

反馈控制是按偏差进行控制的,其特点是不论什么原因使被控制量偏离期望值而出现偏差时,必定会产生一个相应的控制作用去减小或消除这个偏差,使被控制量与期望值相一致。因此,反馈控制系统具有抑制任何内、外扰动对被控制量产生影响的能力,有较高的控制精度。不过这种系统使用的装置(元件)多,线路复杂,特别是系统的性能分析和设计都比较麻烦。尽管如此,反馈控制系统仍是一种重要的并被广泛应用的控制系统,是自动控制理论主要的研究对象。

1.3 自动控制系统的分类

自动控制系统有多种分类方法。按控制方式可分为开环控制系统、反馈控制系统、复合控制系统等;按控制装置类型可分为机械系统、电气系统、气动系统、生物系统等;按系统功用可分为温度控制系统、压力控制系统、位置控制系统等;按系统性能可分为线性系统 and 非线性系统、连续系统和离散系统、定常系统和时变系统、确定性系统和不确定性系统等;按参数变化规律可分为恒值控制系统、随动系统和程序控制系统等。为了全面反映自动控制系统的特性,常常将上述各种分类方法组合运用。

这里重点阐述线性连续控制系统、线性定常离散控制系统和非线性控制系统。

线性连续控制系统可以用线性微分方程式描述,其一般形式为

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d c(t)}{dt} + a_n c(t) \\ & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{d r(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

式中, $c(t)$ 是被控制量,又叫输出量; $r(t)$ 是系统的输入量。系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 是常数时,称为线性连续定常系统,系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 是随时间而变化的

量时,就称为线性连续时变系统。线性系统满足叠加性原理。

线性定常离散控制系统是指线性定常系统中的某处或多处的信号为脉冲序列或数字形式,因而信号在时间上是离散的。连续信号经过采样开关的采样就可以转换成离散信号。线性定常离散控制系统可以用线性差分方程描述,其一般形式为

$$\begin{aligned} & a_0 c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) \\ & = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \cdots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k) \end{aligned} \quad (1-2)$$

式中, $m \leq n$, n 为差分方程的次数; $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为常系数; $r(k)$ 和 $c(k)$ 分别为输入和输出采样序列。

非线性控制系统是指系统中存在非线性因素,系统中只要有一个部分(装置或元件)的输入、输出特性是非线性的,这类系统就称为非线性控制系统。非线性控制系统可以用非线性微分方程或非线性差分方程描述。非线性方程的特点是系数与变量有关,或者方程中含有变量及其导数的高次幂或乘积项,这些都是非线性因素。非线性控制系统不满足叠加性原理。

1.4 典型输入信号

典型输入信号是简单的时间函数,便于对控制系统进行数学处理和分析。实际控制系统的输入信号常具有随机性质,而且其瞬时函数关系往往不能以解析式表示。典型输入函数的响应特性与控制系统对实际输入信号的响应之间存在一定的关系,实际输入信号常常是一种或多种典型输入信号的组合。

常用的典型输入信号有阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数、脉冲函数和正弦函数。

阶跃函数的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

式中 R 为常数。当 $R=1$ 时,式(1-3)称为单位阶跃函数,单位阶跃函数又可表示为 $r(t) = 1(t)$ 。阶跃函数的图像如图 1-2 所示。

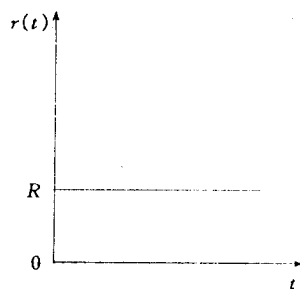


图 1-2 阶跃函数

斜坡函数又称速度函数,该信号对时间 t 的变化率是一个常数,数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

式中 R 为常数。当 $R=1$ 时, $r(t) = t$ 称为单位斜坡函数。斜坡函数的图像如图 1-3 所示。

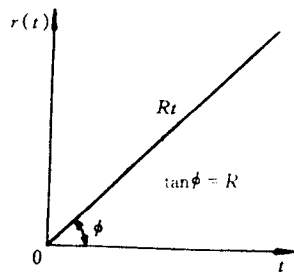


图 1-3 斜坡函数

抛物线函数又称加速度函数,数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

式中 R 为常数。当 $R=1$ 时, $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 称为单位抛物线函数。抛物线函数的图像如图 1-4 所示。

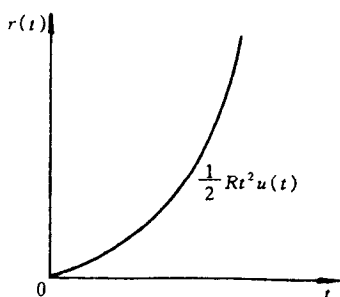


图 1-4 抛物线函数

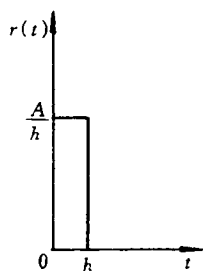


图 1-5 脉冲函数

脉冲函数的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{h} & 0 \leq t \leq h \\ 0 & t < 0, t > h \end{cases} \quad (1-6)$$

式中 h 表示脉冲宽度,一般工程上要求 $h < 0.1T$, T 为系统时间常数。 A 为常数,当 $A=1$ 时, $h \rightarrow 0$, 则称为理想单位脉冲,又叫 δ 函数,表达式为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

$$\text{且有} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-8)$$

脉冲函数的图像如图 1-5 所示。

正弦函数的数学表达式为

$$r(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1-9)$$

式中, A 表示幅值, ϕ 表示相角, ω 表示振荡角频率。正弦函数的图像如图 1-6 所示。

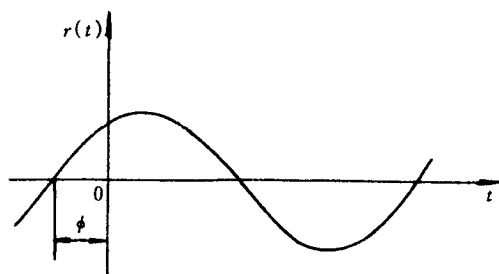


图 1-6 正弦函数

习 题 1

1-1 试画出反馈控制系统原则性的构成方块图,并说明各方块的作用及系统工作原理。

1-2 下列各式是描述系统的微分方程,其中 $c(t)$ 表示输出量, $r(t)$ 表示输入量,试判断哪些是线性定常或时变控制系统,哪些是非线性控制系统?

$$(1) \quad c(t) = 5 + r^2(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$$

$$(2) \quad \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + 8c(t) = r(t)$$

$$(3) \quad t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}$$

$$(4) \quad c(t) = r(t) \cos \omega t + 5$$

$$(5) \quad c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau$$

$$(6) \quad c(t) = r^2(t)$$

$$(7) \quad c(t) = \begin{cases} 0 & t < 6 \\ r(t) & t \geq 6 \end{cases}$$

第2章 控制系统的数学模型

控制系统的数学模型是描述系统内部物理量之间关系的数学表达式。建立控制系统数学模型的方法有分析法和实验法两种,采用分析法对系统各部分的运动机理进行分析,根据它们所依据的物理规律或其他定律求出相应的运动方程。建立控制系统的数学模型是分析和设计控制系统的首要工作。

在控制系统理论中,常用的数学模型有微分方程、差分方程和状态方程,以及传递函数和结构图等。

2.1 系统微分方程的建立

2.1.1 系统微分方程的建立

建立控制系统的微分方程时,一般先由系统原理线路图画出系统方块图,并分别列写组成系统各元件的微分方程,然后消去中间变量得到描述系统输出量与输入量之间的微分方程。列写微分方程时,一是应注意信号传送的单向性,即前一个元件的输出是后一个元件的输入,一级一级地单向传送;二是应注意前后连接的两个元件中,后级对前级的负载效应,如无源网络输入阻抗对前级的影响,齿轮系对电动机转动惯量的影响等。

例 2-1 图2-1是由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的无源网络。试写出以 $u_r(t)$ 为输入量,以 $u_c(t)$ 为输出量的网络微分方程。

解 设回路电流为 $i(t)$,方向如图2-1所示,根据基尔霍夫定律,得

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_r(t) \quad (2-1)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2-2)$$

由式(2-1)和(2-2)消去中间变量 $i(t)$,便得到系统(网络)的输出量 $u_c(t)$ 与输入量 $u_r(t)$ 之间的关系式

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t) \quad (2-3)$$

这是一个二阶线性微分方程,即是无源网络的数学模型。

例 2-2 图2-2是机械位移系统, M 表示物体质量, F 表示位移摩擦系数, K 表示弹簧弹性系数,试写出输入量位移 y 与输出量位移 x 之间的微分方程。

解 根据牛顿第二定律,得

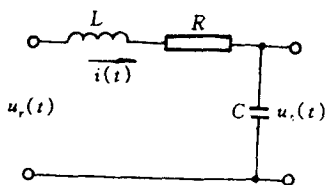


图 2-1 RLC 无源网络

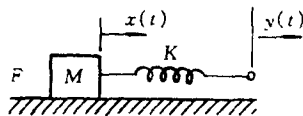


图 2-2 机械位移系统

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = f - F \frac{dx}{dt} \quad (2-4)$$

$$f = K(y - x) \quad (2-5)$$

其中 f 为弹簧弹力, $F \frac{dx}{dt}$ 为摩擦阻力, 消去中间变量 f , 得

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Kx = Ky \quad (2-6)$$

此式为所求的微分方程。

微分方程描述了控制系统的动态关系, 如果已知输入量及变量的初始条件, 对微分方程求解, 就可以得到系统输出量的表达式, 并由此对系统进行性能分析。微分方程求解方法一般有直接法和拉普拉斯变换法, 工程上采用拉普拉斯变换法, 一方面是为了方便, 更重要的是, 拉普拉斯变换法可以引出控制系统的另一种重要的数学模型——传递函数。

2.1.2 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换简称拉氏变换, 它是一种函数变换, 经过变换, 能够把一个微分方程变换成一个代数方程, 并且在变换的同时, 将初始条件引入, 避免了直接求解微分方程时求积分常数的麻烦, 使解微分方程的手续大为简化。另一方面, 在自动控制理论中传递函数的有关概念也要用到拉氏变换。

函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 用 $L[f(t)]$ 符号表示, 被定义成

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2-7)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 是复变量。

拉氏变换的逆变换称拉氏反变换, 记为 $L^{-1}[F(s)]$, 被定义成复变量的积分, 即

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st} ds \quad (2-8)$$

$f(t)$ 只有满足三个条件, 其拉氏变换才能存在, 这三个条件是: $t < 0$ 时, $f(t) = 0$; $t \geq 0$ 时, $f(t)$ 连续且有限段分段连续; $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty$ 。

在自动控制过程中, 这三个条件通常是满足的, 因此拉氏变换也总是存在。下面就几个常见函数, 求出它们的拉氏变换。

例 2-3 试求单位阶跃函数 $f(t) = 1(t)$ 的拉氏变换。

解 单位阶跃函数是自动控制理论中常用的典型输入信号, 其定义为

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

它的拉氏变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

即有

$$L[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (2-9)$$

例 2-4 试求单位脉冲函数的拉氏变换。

解 单位脉冲函数也是自动控制理论中常见的典型输入信号之一, 又称 δ 函数, 其定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

由拉氏变换定义式得

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

即有

$$L[\delta(t)] = 1 \quad (2-10)$$

为了进一步了解、使用拉氏变换, 下面介绍几个拉氏变换的重要法则。

(1) 线性性质。拉氏变换是线性变换, 有下面的等式成立

$$L[\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)] = \lambda_1 L[f(t)] + \lambda_2 L[g(t)] \quad (2-11)$$

其中 λ_1 和 λ_2 为常数。

(2) 拉氏变换的微分性质。函数微分的拉氏变换为

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0) \quad (2-12)$$

其中 $f(0)$ 为初值, 由初始条件确定。函数二阶微分的拉氏变换为

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2-13)$$

函数 n 阶微分的拉氏变换为

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (2-14)$$

(3) 拉氏变换的积分性质。函数积分的拉氏变换为

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (2-15)$$

以及

$$L\left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau) (d\tau)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) \quad (2-16)$$

(4) 时滞性质。时滞时间为 T 的时滞函数 $f(t-T)$, 其拉氏变换为

$$L[f(t-T)] = e^{-sT} F(s) \quad (2-17)$$

(5) 终值和初值定理。当 $sF(s)$ 的极点在 s 左半平面时, 有下面的等式成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2-18)$$

称为终值定理。初值定理是下式成立

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2-19)$$

例 2-5 试用积分性质, 求 $f(t) = t^n$ 的拉氏变换。

解 因 $L[1(t)] = \frac{1}{s}$