

2008年

MBA

联考数学应试指导 及典型题型训练

主 编:

范培华 (北京大学)

李永乐 (清华大学)

袁荫棠 (中国人民大学)

蔡竞云 (北京 159 中学)

总策划: 甄 诚

组 稿: 北京市社科赛斯 MBA 培训中心

支 持: 中国 MBA 备考网

(WWW.MBASCHOOL.COM.CN)

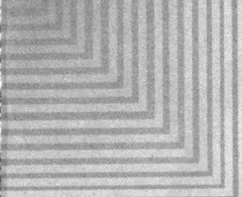
中国 MBA 教育网

(WWW.MBAEDU.CN)



清华大学出版社





2008年

MBA MBA

联考数学应试指导 及典型题型训练

总策划：甄 诚

组 稿：北京市社科赛斯 MBA 培训中心

支 持：中国 MBA 备考网

(WWW.MBASCHOOL.COM.CN)

中国 MBA 教育网

(WWW.MBAEDU.CN)

主 编：

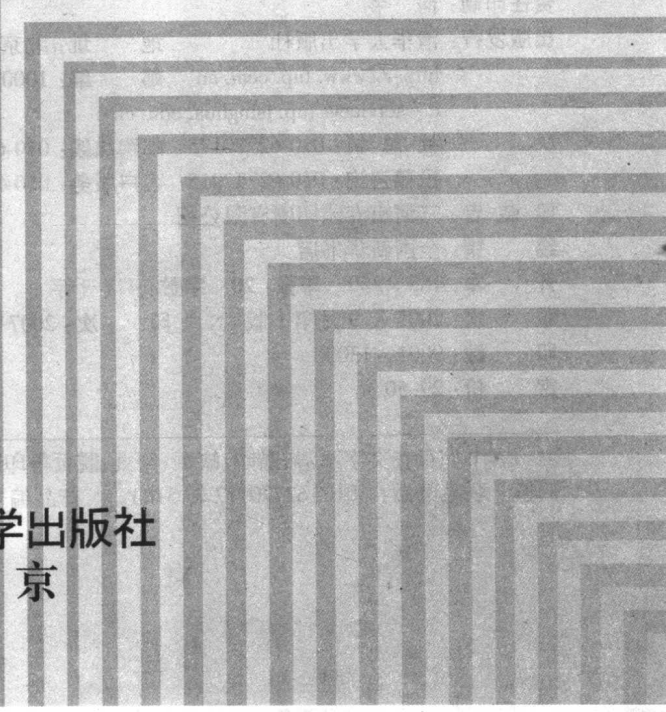
范培华 (北京大学)

李永乐 (清华大学)

袁荫棠 (中国人民大学)

蔡竞云 (北京 159 中学)

清华大学出版社
北 京



内 容 简 介

本书根据 2008 年 MBA 联考数学考试大纲编写,全书共分四部分:初等数学、微积分、线性代数及概率论。每部分按章编写,配有大量的典型例题,并对解题的思路、方法与技巧加以总结,对易出错误、易混淆的概念给予特别的提醒,并配以反例来帮助读者加深理解。

本书适合 MBA 考生备考自学使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

MBA 联考数学应试指导及典型题型训练/范培华等主编. —北京:清华大学出版社,2005.9
ISBN 978-7-302-11743-8

I. M… II. 范… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101196 号

责任编辑:龙海峰

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社 总 机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印张:20 字数:471 千字

版 次:2005 年 9 月第 1 版 印 次:2007 年 9 月第 3 次印刷

印 数:9001~13000

定 价:29.50 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:020135-03/F

前 言

为了帮助报考 MBA 的考生能全面准确地理解和掌握 MBA 考试大纲对教学的要求,系统复习有关的数学知识,提高考生对数学的应试能力,特编写此书。

全书按大纲的要求分初等数学、微积分、线性代数及概率四部分。每部分紧扣大纲,按章编写,每章又由四部分组成:

一、考试要点及内容提要——将有关的概念、公式、定理综合阐述归纳总结,使考生明确本章的重点及考点,并弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局的认识和把握。

二、典型题分析——将常见基础课题(包括问题求解题)归纳分类,总结各类题的解题思路与方法,注意一题多解,适当在题后加评注,以期开阔考生的解题思路,提高解题技巧与速度,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

三、题型训练(条件充分性判断)——针对 MBA 考题特点,编写了较多的概念题与计算题,帮助考生训练判断充分条件的能力,并加深对概念的理解。

四、习题与解答——本部分精选了适当的条件充分性判断题和问题求解题,并附有参考答案及提示,作为课后复习用。

不论是数学基本理论的建立,还是作数学运算或逻辑推理,无一不是以明确、清晰的概念为基础。考生要重视对概念的复习,应当从不同的角度,不同的面进行思考,准确地把握住概念的内涵,注意相关概念的联系与区别,否则,解题时思维上就会出现疑惑与混乱,方法上也就有种种谬误。

数学的基础知识是进一步深造的基础,MBA 历来重视对三基的考查,如果基本的数学方法没掌握,定理公式不熟悉,不仅速度上不来,而且在知识点的衔接与转换上也会有各种障碍,势必影响到综合题的解答。

数学离不开计算,不论是问题求解,还是条件充分性判断,通过计算求解都是重要的方法,因此提高运算能力、提高计算的准确性要引起考生足够的重视,不能华而不实、眼高手低。

与其他学科相比,考生的数学成绩相差历来较大,希望考生认真踏实地做每一套题,心态要平和,戒浮躁;要勤思考多动手,不断积累,一步一步地提高。

目 录

第一部分 初等数学

第一章 绝对值、比和比例、平均值、二项式定理	1
一、考试要点及内容提要	1
(一) 充分条件	1
(二) 绝对值	2
(三) 比和比例	2
(四) 平均值	3
(五) 排列、组合、二项式定理	3
二、典型题分析	5
三、题型训练	12
(一) 条件充分性判断	12
(二) 问题求解	15
四、习题与解答	16
参考答案	19
第二章 方程和不等式	24
一、考试要点及内容提要	24
(一) 一元一次方程	24
(二) 一元二次方程	24
(三) 二元一次方程组	24
(四) 不等式的主要性质	25
(五) 一元一次不等式	25
(六) 一元一次不等式组	25
(七) 一元二次不等式	25
二、典型题分析	26
三、题型训练	31
(一) 问题求解	31
(二) 条件充分性判断	33
四、习题与解答	34
参考答案	36
第三章 等差数列和等比数列	41
一、考试要点及内容提要	41
(一) 基本概念	41

(二) 等差数列	41
(三) 等比数列	41
二、典型题分析	42
三、题型训练	46
(一) 条件充分性判断	46
(二) 问题求解	48
四、习题与解答	49
参考答案	50

第二部分 微 积 分

第四章 函数、极限、连续	52
一、函数	52
(一) 函数的概念	52
(二) 函数的几何特性	52
(三) 初等函数	54
(四) 隐函数	56
(五) 分段函数	57
二、极限	57
(一) 数列极限	57
(二) 函数的极限	58
(三) 函数极限的性质	58
(四) 无穷小量与无穷大量	59
三、函数的连续性	60
(一) 函数连续的概念	60
(二) 间断点	60
(三) 闭区间上连续函数的性质	60
第五章 一元函数微分学	62
一、考试要点及内容提要	62
(一) 导数的概念	62
(二) 导数的运算	63
(三) 微分	64
(四) 函数的增减性、极值、最值	64
(五) 函数图形的凹凸性、拐点及其判定	65
二、典型题分析	66
题型一 有关导数与微分的概念和计算	66
题型二 切线方程与法线方程	70
题型三 导数的应用(一)	74

题型四 导数的应用(二)	81
三、条件充分性判断	83
四、习题与解答	91
参考答案	94
第六章 一元函数积分学	99
一、考试要点及内容提要	99
(一) 不定积分	99
(二) 定积分	101
二、典型题分析	106
题型一 有关原函数与定积分的概念	106
题型二 定积分的计算	108
题型三 利用若干积分技巧计算定积分	110
题型四 与变限定积分相关的问题	112
题型五 广义积分	115
题型六 定积分的应用	117
三、条件充分性判断	125
四、习题与解答	132
参考答案	135
第七章 多元函数微分学	141
一、考试要点及内容提要	141
(一) 重要定义、定理及公式	141
(二) 求偏导数的思路	142
(三) 求函数极值的思路	143
二、典型题分析	144
题型一 偏导数的计算	144
题型二 多元函数极值	147
三、条件充分性判断	150
四、习题与解答	151
参考答案	153

第三部分 线性代数

第八章 行列式	156
一、考试要点及内容提要	156
(一) 行列式的概念	156
(二) 行列式按行(列)展开公式	156
(三) 行列式的性质	157

(四) 重要公式	158
(五) 克莱姆法则	159
二、基础题解析	160
第九章 矩阵	165
一、考试要点及内容提要	165
(一) 重要定义	165
(二) 主要定理	168
(三) 重要法则、公式	168
二、典型题分析	170
(一) 矩阵的概念及运算	170
(二) n 阶矩阵的方幂	172
(三) 可逆矩阵	174
(四) 求解矩阵方程	176
(五) 方阵的行列式	179
(六) 矩阵的秩	180
三、条件充分性判断	181
四、习题与解答	184
参考答案	185
第十章 向量	188
一、考试要点及内容提要	188
(一) 基本概念	188
(二) 主要定理	189
二、典型题分析	190
(一) 线性相关的判定	190
(二) 向量组的秩与极大线性无关组	194
(三) 与线性表示相关联的问题	195
三、习题与解答	200
参考答案	201
第十一章 线性方程组	205
一、考试要点及内容提要	205
(一) 基本概念	205
(二) 主要定理	206
(三) 重要方法	208
二、典型题分析	208
(一) $Ax=0$ 有非零解、基础解系	208
(二) 非齐次线性方程组的求解	211

三、条件充分性判断	215
四、习题与解答	218
参考答案	219
第十二章 特征值与特征向量	222
一、考试要点及内容提要	222
二、典型题分析	222
(一) 已知矩阵 A 求其特征值、特征向量	222
(二) 抽象矩阵的特征值	224
三、条件充分性判断	227
第四部分 概 率 论	
第十三章 随机事件及其概率	229
一、考试要点及内容提要	229
(一) 随机事件的概念	229
(二) 随机事件的概率及其性质	231
(三) 条件概率与独立性	233
二、典型题分析	234
题型一 事件间的关系与运算	234
题型二 概率的概念与性质	237
题型三 事件的独立性与独立重复试验	246
三、条件充分性判断	253
四、习题与解答	256
参考答案	258
第十四章 随机变量	262
一、考试要点及内容提要	262
(一) 随机变量的分布	262
(二) 常见的重要分布	264
(三) 随机变量的数字特征	265
二、典型题分析	267
题型一 确定随机变量分布中的未知参数	267
题型二 确定随机变量的概率分布	272
题型三 有关常见分布的题	280
题型四 随机变量的数字特征	286
三、条件充分性判断	294
四、习题与解答	301
参考答案	304

第一部分 初等数学

第一章 绝对值、比和比例、平均值、二项式定理

一、考试要点及内容提要

(一) 充分条件

定义：如果条件 A 成立，那么就能推出结论 B 成立，即 $A \Rightarrow B$ ，这时，我们就说 A 是 B 的充分条件。

例如：若 $x > 0$ ，则 $x^2 > 0$

写成： $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

在这个命题中，“ $x > 0$ ”是“ $x^2 > 0$ ”的充分条件。

注 也有所谓必要条件的概念。例如，四边相等是四边形成为正方形的必要条件，也就是说，没有四边相等这个条件，四边形一定不是正方形。

一个命题中的条件对于结论来说，可能是充分不必要条件，也可能是必要不充分条件，还可能是既充分又必要条件或者是既不充分又不必要条件，将命题的条件记为 A ，结论记为 B ，由 A 与 B 之间的推理关系就可以判定条件的类别（注意箭头有单向、双向之分）。

若 $A \Rightarrow B$ ，则 A 是 B 的充分而不必要条件；

若 $A \Leftarrow B$ ，则 A 是 B 的必要而不充分条件；

若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 A 是 B 的充分且必要条件；

若 $A \nRightarrow B$ ，则 A 是 B 的既不充分又不必要条件。

在本书中有一类题叫做条件充分性判断，这里所说的充分性就是上述定义中所述概念，只要分析条件是否充分即可，而不必考虑条件是否必要。在这类题中有五个选项，规定为

(A) 条件(1)充分，但条件(2)不充分；

(B) 条件(2)充分，但条件(1)不充分；

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分，但条件(1)和(2)联合起来充分；

(D) 条件(1)充分，条件(2)也充分；

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分，联合起来也不充分。

▲以上规定全书都适用，以后不再重复说明。

【例题】 等式 $x=y$ 成立 (x, y 是实数)。

(1) $x^2=y^2$ ； (2) x 和 y 同号。

答案 (C)

分析 由 $x^2=y^2$ 可得 $x=y$ 或 $x=-y$ ，这说明条件 $x^2=y^2$ 不是 $x=y$ 的充分条件，即条件(1)不充分；又 x 和 y 同号时， x 与 y 不一定相等，这说明条件(2)也不充分；但是把条件(1)和条件(2)联合起来， $x^2=y^2$ 且 x 与 y 同号，则必然推得 $x=y$ ，这说明条件(1)和(2)

联合起来充分,故选(C).

(二) 绝对值

(1) 定义: 实数 a 的绝对值 $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

(2) 性质: $|a| \geq 0$; $|a| = |-a|$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(3) 几何意义: 实数 a 的绝对值就是数轴上与 a 对应的点到原点的距离, 如图 1-1 所示.

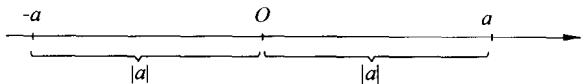


图 1-1

(4) 运算法则:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0);$$

$$|a| \leq b \quad (b > 0) \Leftrightarrow -b \leq a \leq b;$$

$$|a| > b \quad (b > 0) \Leftrightarrow a < -b \quad \text{或} \quad a > b;$$

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

(三) 比和比例

(1) 比的定义: 两个数相除, 又叫做这两个数的比. 把 a 与 b ($b \neq 0$) 的比记为 $a:b$, $a:b = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ 的值叫做 a 比 b 的比值.

(2) 比的性质:

$$a:b = ma:mb \quad (m \neq 0);$$

$$a:b = t \Leftrightarrow a = tb.$$

(3) 百分比: 把比值表示成分母为 100 的分数, 这个分数就称为百分比或百分率, 如 $1:2 = 50\%$.

(4) 比例的定义: 两个比相等的式子叫做比例. 比例可写成

$$a:b = c:d \quad \text{或} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{其中各分母均不为零}).$$

在上面的比例中, a, d 叫做比例外项, b, c 叫做比例内项, 如果 $b=c$, 比例就成为

$$a:b = b:d \quad \text{即} \quad b^2 = ad.$$

此时, b 叫做 a 和 d 的比例中项, 或者把 b 叫做 a 和 d 的等比中项, 即 a, b, d 成等比数列.

(5) 比例的性质: 对于比例 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 有下列性质:

① $ad = bc$ (内项积等于外项积);

② $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (互换内项或互换外项, 等式仍成立);

$$\textcircled{3} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (\text{合比定理});$$

$$\textcircled{4} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (\text{分比定理});$$

$$\textcircled{5} \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (\text{合分比定理}).$$

(6) 正比例和反比例

正比例定义: 若变量 x 和 y 适合 $y=kx(k \neq 0)$, 则称 x 和 y 成正比例, k 为比例系数.

反比例定义: 若变量 x 和 y 适合 $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$, 则称 x 和 y 成反比例, k 为比例系数.

(四) 平均值

(1) 算术平均值: n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

简记为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

(2) 几何平均值: n 个正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的几何平均值为

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

简记为

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

(五) 排列、组合、二项式定理

1. 基本原理

(1) 加法原理: 做一件事情, 完成它可以有 n 类办法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, $\dots$ 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

种不同的方法.

(2) 乘法原理: 做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, $\dots$ 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$$

种不同的方法.

注 在使用两个原理解题时, 必须分清基本原理的条件和结论, 比较它们的异同. 它们的共同点是把一个原始事件分解成若干个分事件来完成. 区别在于一个和分类有关, 一个与分步有关, 如果完成一件事情有 n 类办法, 这 n 类办法彼此之间是相互独立的. 无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事情, 求完成这件事情的方法种数, 就用加法原理; 如果完成一件事情需要分成 n 个步骤, 各个步骤都是不可缺少的, 需要依次完成所有的步骤, 才能完成这件事情, 而完成每一个步骤各有若干种不同的方法, 求完成这件事情的方法种数就用乘法原理.

加法原理是“分类”完成,乘法原理是“分步”完成.

“分类”或“分步”都应根据问题的特点确定分类或分步的标准,标准不同,分类或分步的结果可能不同,分类要求各种方法既不重复,又不遗漏,分步要求做下一个步骤时,选用的方法必须与做相邻的上一个步骤所选用的方法无关.

2. 排列

(1) 一般地说,从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leq n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

注 排列的定义包含两个基本内容:一是“取出元素”;二是“按照一定顺序排列”.

(2) 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,记为 P_n^m .

上述当 $m < n$ 时,称为选排列,当 $m = n$ 时,称为全排列记为 $P_n^m = P_n^n = n!$

$$(3) \text{ 公式: } P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

$$P_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

3. 组合

(1) 组合

一般地说,从 n 个不同元素中,任取 $m(m \leq n)$ 个元素并成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

注 排列与组合的共同点,就是都要“从 n 个不同元素中,任取 m 个元素”,而不同点就是前者要“按照一定的顺序排成一列”,而后者却是“不论怎样的顺序并成一组”.

(2) 组合数

从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数.

用符号 C_n^m 表示.

(3) 组合数公式

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!},$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

(4) 性质

$$\textcircled{1} C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$\textcircled{2} C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

注 第①个性质常用于当 $m > \frac{n}{2}$ 时组合数的计算,较简便性.

第②个性质常用于恒等变形和证明等式.

4. 二项式定理

(1) 二项式定理:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n.$$

这个等式就叫做二项式定理,等式的右边叫做二项展开式,展开式共有 $n+1$ 项,其中 C_n^r ($r=0,1,\dots,n$) 叫做二项式系数,二项式系数适合:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

(2) 展开式的通项公式:即展开式的第 $r+1$ 项,记为 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$.

(3) 二项式系数的性质.

① 在二项展开式中,与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等.

② 如果二项式的幂指数是偶数,那么中间一项的二项式系数最大;如果二项式的幂指数是奇数,那么中间两项的二项式系数相等并且最大.

下面的“杨辉三角”反映了以上性质,如图 1-2 所示.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & \dots & & (a+b)^1 \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \dots & & (a+b)^2 \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \dots & & (a+b)^3 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \dots & (a+b)^4 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \dots & (a+b)^5
 \end{array}$$

图 1-2

二、典型题分析

【例 1.1】 设 a, b, c 三个实数在数轴上的对应点为 A, B, C , 其位置如图 1-3 所示.

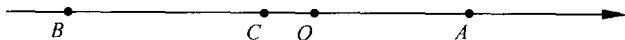


图 1-3

化简 $a - |a+b| + |c-a| + |c-b|$.

解 因为 $b < c < 0 < a$, $|b| > |c|$, $|b| > |a|$, $|c| < |a|$, 所以 $a+b < 0$, $c-a < 0$, $c-b > 0$, 因此原式 $= a - [-(a+b)] + [-(c-a)] + (c-b) = 3a$.

注 遇到实数绝对值问题,通常总是首先考虑该实数的正负号,然后根据实数绝对值的定义将绝对值符号去掉.本题就是根据图形得到三个绝对值符号中式子所表示数值的正负号,从而去掉了绝对值符号使原式得以化简.

【例 1.2】 已知: $|a|=5$, $|b|=7$, 且 $a \cdot b < 0$, 求 $|a+b|$ 的值.

解 由 $|a|=5$ 得 $a=\pm 5$, 由 $|b|=7$ 得 $b=\pm 7$, 因为 $a \cdot b < 0$, 即 a 和 b 是异号两数, 所以, 当 $a=5$ 时, $b=-7$, 而当 $a=-5$ 时, $b=7$, 于是 $|a+b|=2$.

注 常见的错误是认为 $|a+b|=|a|+|b|=12$.

应该知道 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 中, 当 a 和 b 同号时, 等号成立, 而本题中的 a 和 b 异号, 所以不能使用该公式来进行计算, 这是应加以注意的.

【例 1.3】 已知 $\sqrt{(a-20)^2} + |b+30| + (c-40)^2 = 0$, 求 $a+b+c$ 的值.

解 因为已知等式的各项均为非负数, 且它们的和为零, 所以这三个非负数均为零, 即

$$\sqrt{(a-20)^2} = |b+30| = (c-40)^2 = 0,$$

分别解得

$$a=20, \quad b=-30, \quad c=40,$$

故

$$a+b+c=20-30+40=30.$$

【例 1.4】 分别求适合下列条件的 x 的值或 x 的取值范围:

$$(1) |x+3|=5; \quad (2) |x-3|\leq 4; \quad (3) |x-4|\geq 1.$$

解 用绝对值的定义和运算法则来求解.

$$(1) \text{ 由 } x+3=\pm 5, \text{ 得 } x=2 \text{ 或 } x=-8;$$

$$(2) \text{ 由 } -4\leq x-3\leq 4, \text{ 得 } -1\leq x\leq 7;$$

$$(3) \text{ 由 } x-4\leq -1 \text{ 或 } x-4\geq 1, \text{ 得 } x\leq 3 \text{ 或 } x\geq 5.$$

【例 1.5】 公司共有职工 50 人,理论知识考核平均成绩为 81 分,其中科室职工平均成绩为 90 分,车间职工平均成绩为 75 分,求车间职工的人数.

解 因为 50 人的总平均分为 81 分,所以 50 人所得总分是 $50\times 81=4050$ 分,设车间职工有 x 人,则科室职工有 $50-x$ 人,其中车间职工所得总分是 $75x$ 分,科室职工所得总分是 $90(50-x)$ 分,这两项相加应等于全公司职工所得总分,即

$$75x+90(50-x)=4050,$$

$$15x=450,$$

$$x=30.$$

答 车间职工有 30 人.

注 应注意以下事实:全公司 50 人的考核均分为 81,其中 20 名科室职工考核均分为 90 分,30 名车间职工均分为 75 分,但是,

$$\frac{90+75}{2}\neq 81,$$

这说明对于一个平均数,必须明确它是哪些数的平均数,全公司 50 人考核成绩的均分是每个人考核成绩之和除以 50 所得之商,而科室职工考核成绩的均分是 20 名科室职工每人所得分数之和除以 20 所得之商.下列等式是正确的:

$$\frac{20\times 90+30\times 75}{20+30}=81.$$

【例 1.6】 某班同学在一次测验中,平均成绩为 75 分,其中男同学人数比女同学多 80%,而女同学平均成绩比男同学高 20%,求女同学的平均成绩.

解 设女同学有 x 人,则男同学有 $1.8x$ 人,因此全班总分为 $(x+1.8x)\times 75$,再设男同学平均成绩为 y 分,则女同学平均成绩为 $1.2y$ 分,因此男同学所得总分为 $1.8xy$ 分,女同学所得总分为 $1.2xy$ 分,男女同学各自的总分之和等于全班总分,于是有

$$1.8xy+1.2xy=(x+1.8x)\times 75,$$

即

$$3y=2.8\times 75.$$

解得

$$y=70,$$

故

$$1.2\times 70=84.$$

答 女同学平均成绩为 84 分.

注 对于百分数问题,应注意题目给定的每一个百分数的意义.例如本题中的 80%是

男同学人数比女同学人数多 80%，因此男同学人数实际上是女同学人数的 $1+80\%$ ，即 1.8 倍。

【例 1.7】 一公司向银行借款 34 万元，欲按 $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$ 的份额分配给下属甲、乙、丙三个车间进行技术改造，求甲车间应得的款数。

解 设甲、乙、丙三个车间应得的款数依次为 $\frac{t}{2}$ 万元、 $\frac{t}{3}$ 万元、 $\frac{t}{9}$ 万元，于是有

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{9} = 34,$$

解得

$$t = 36, \quad \frac{t}{2} = 18.$$

答 甲车间应得 18 万元。

【例 1.8】 设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$ ，求使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值。

解 由于 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$ ，因此设 $\frac{1}{x} = 4t, \frac{1}{y} = 5t, \frac{1}{z} = 6t$ ，则 $x = \frac{1}{4t}, y = \frac{1}{5t}, z = \frac{1}{6t}$ ，代入 $x+y+z=74$ ，得

$$\frac{1}{4t} + \frac{1}{5t} + \frac{1}{6t} = 74,$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{t} = 74,$$

解得

$$\frac{1}{t} = 120,$$

故

$$y = \frac{1}{5t} = \frac{120}{5} = 24.$$

注 根据比的性质 $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ ，由 $x : y = 2 : 3$ 并不能断定 $x=2, y=3$ 一定成立，因而只能设 $x=2t, y=3t$ ，然后由其他已知条件来确定 t 的值，从而求得 x 和 y 的值。以上两个例题就是依据这个原理来进行相应的设定。

【例 1.9】 当 x 为何值时，等式 $|x+2| + |x-4| = 6$ 成立？

解法一 用实数绝对值的几何意义求解，如图 1-4。

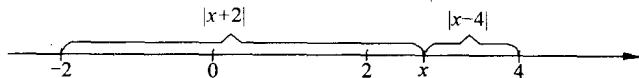


图 1-4

$|x+2| + |x-4|$ 的几何意义是点 x 到 -2 的距离加上点 x 到 4 的距离所得的和，而 -2 与 4 的距离恰好为 6，这说明当点 x 在 -2 和 4 之间（包括 -2 和 4 ）移动时，该等式一定成立，如果点 x 移动到 -2 以左或 4 以右时， $|x+2| + |x-4|$ 肯定比 6 大，因此 x 的取值范围为

$$-2 \leq x \leq 4.$$

解法二 用实数绝对值的定义去掉绝对值符号来求解. 为了去掉绝对值符号, 需进行分类讨论:

① 当 $x < -2$ 时, $x+2 < 0, x-4 < 0$, 原等式成为

$$-(x+2)-(x-4)=6,$$

$$x=-2.$$

而这与 $x < -2$ 不符, 所以在 $x < -2$ 范围内该等式不成立.

② 当 $-2 \leq x \leq 4$ 时, $x+2 \geq 0, x-4 \leq 0$, 原不等式成为

$$x+2-x+4=6,$$

$$6=6.$$

这说明在此范围内无论 x 取何值, 该等式均成立,

故 $-2 \leq x \leq 4$ 为合题之解.

③ 当 $x > 4$ 时, $x+2 > 0, x-4 > 0$, 原等式成为

$$x+2+x-4=6,$$

$$x=4.$$

而这与 $x > 4$ 不符, 所以在 $x > 4$ 范围内该等式不成立.

综上所述, 使原等式成立的 x 的取值范围为

$$-2 \leq x \leq 4.$$

解法三 根据公式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 求解.

在这个公式中, 当 a 和 b 同号, 即 $a \cdot b \geq 0$ 时, 公式中的等号成立, 因此

$$|x+2| + |x-4| = |x+2| + |4-x| = |x+2+4-x| = 6.$$

这个等式成立的条件是

$$(x+2)(x-4) \geq 0,$$

即

$$(x+2)(x-4) \leq 0,$$

解得

$$-2 \leq x \leq 4.$$

【例 1.10】 从 A 地到 B 地一天内有轮船 2 班, 火车 3 班, 汽车 8 班, 则一天内乘坐不同班次的轮船, 火车或汽车, 共有多少种不同的走法?

解 由加法原理共有 $2+3+8=13$ (种)

【例 1.11】 羽毛球队里有男队员 6 人, 女队员 5 人, 从中选出男、女队员各一人组成混合双打队, 不同的组队方法有几种?

解 由乘法原理共有 $6 \times 5 = 30$ (种)

【例 1.12】 (1) 四名运动员争夺三项冠军, 不同的结果最多有多少件?

(2) 四名运动员参加三项比赛, 每人限报一项, 不同的报名方法有多少种?

解 (1) 分析: 四名运动员争夺三项冠军, 可以分成三个步骤完成.

由乘法原理, 不同的结果的种数共用 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$.

答 四名运动员争夺三项冠军, 不同的结果的种数共有 $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ 种.

(2) 分析: 四名运动员参加三项比赛, 每人限报一项, 可以分成四个步骤完成.

由乘法原理, 不同的结果的种数共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$.

答 四名运动员报名各加三项比赛, 每人限报一项, 不同的报名方法有 3^4 种.

【例 1.13】 从 1 到 200 的自然数中, 有多少个个位数上都不含数字 5 的数.