普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

线性代数

（经管类）

曹重光　于宪君　张显　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

线 性 代 数

(经管类)

曹重光　于宪君　张　显　编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书内容包括绪论，行列式，矩阵与线性方程组，n 维向量与线性方程组，特征值、特征向量和方阵的对角化，二次型等. 本书介绍了概念和理论的实际背景，突出线性方程组的主线，注重数学思想在其中的渗透和各部分内容的联系. 大量的例题和习题有利于学生线性代数能力的培养. 本书结构严谨，详略适当，叙述简明、生动，注重直观性和启发性，便于教和学.

本书可作为高等学校经济类、管理类及其他专业线性代数课程的教材，也可作为教师和学生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：经管类/曹重光，于宪君，张显编. —北京：科学出版社，2007
(普通高等教育“十一五”规划教材. 大学数学全程解决方案系列)
ISBN 978-7-03-019274-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①曹… ② 于… ③ 张… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 108880 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 吴伶伶 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：卢秋红

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—6 000 字数：212 000

定价：15.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

《大学数学全程解决方案系列》编委会

《大学数学全程解决方案系列》序

目前, 高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多, 其中不乏一些优秀教材, 它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内, 为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说, 不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异, 由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下, 我想, 这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果, 充分挖掘区域内的教学资源, 增加区域内教师的交流与互动, 优化创新和谐的教研氛围, 培育更加适应本地区高校的优秀教材, 科学出版社在广泛调研的基础上, 组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师, 拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材, 并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议. 在这次会议上, 大家推荐我作为这套丛书的编委会主任, 盛情难却, 我想, 若能和大家共同努力, 团结协作, 认真领会教育部的有关精神, 凭借科学出版社的优秀品牌, 做出一套大学数学类的优秀教材, 也的确是一件有意义的事情.

为此, 我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流, 希望在以下方面有所突破:

在教学内容上, 有较大创新, 紧跟时代步伐, 从知识点讲述, 到例题、习题, 都要体现时代的特色.

在教学方法上, 充分体现各学校的优秀教学成果, 集中黑龙江地区优秀的教学资源, 力求代表最好的教学水平.

在教学手段上, 充分发挥先进的教学理念, 运用先进的教学工具, 开发立体化的教学产品.

在教材设计上, 节约课时, 事半功倍 (比如在教材上给学生预留较大的自主空间, 让有进一步学习愿望的学生能够自主学习; 开发的课件让老师节约课时, 精心设计的练习册, 让老师节约更多的检查作业的时间).

在教学效果上, 满足对高等数学有不同要求的教师、学生, 让教师好用, 让学生适用.

如今, 这套丛书终于要面世了, 今年秋季有《微积分 (经管类)》、《线性代数 (经

管类)》、《线性代数 (理工类多学时)》、《线性代数 (理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版. 但我想, 尽管我们的初衷是美好的, 教材中必定还会存在这样那样的问题, 敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持, 科学出版社高等教育出版中心, 哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力, 在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　言

本书重视对数学思想的渗透以及对数学方法的介绍和应用; 重视从实际问题和理论需要出发, 引出数学概念、展开数学理论, 再把得到的理论和方法运用到实际问题的解决上, 其目的在于培养学生的应用意识以及解决实际问题的能力. 本书按照经济、管理类等本科专业对线性代数课程的教学要求编写, 同时希望对其他专业具有更广泛的适用性. 因而在本书中设置了标注“*”号的部分, 包括某些章节、定理及其证明、例题等, 供教师根据专业、学时等自由选用, 也可供学生自由阅读.

考虑到本课程的抽象性且学时有限是教与学的难点, 本书尽量减少一些理论的推导, 增加一些典型的有助于理解和消化主要内容及方法的例子, 以提高学生数学的基本素养. 为了增加教学的启发性, 本书正文中设置一些供学生思考的小问题. 为了加强能力培养和训练并贯彻循序渐进的原则, 本书各节后设练习题, 各章后设习题, 并且分 A、B 两类. 其中, B 类题不作为对全体学生的要求, 供学有余力的同学自由选用, 当然对于考研究生的同学来说也是一个很好的选择.

为了使学生更好地理解所学习的有关内容, 本书在叙述和讲解中注意与学生已有知识背景的密切关系 (例如, 中学学过的向量和一次方程组的知识等). 为了帮助学生形象地理解一些抽象概念和理论, 本书在叙述中特别注意几何直观的辅助理解, 希望学生在学习中能多有体会. 为了使学生对本课程内容, 特别是各部分内容之间的联系一开始就有一个总体认识, 本书在第 1 章绪论中主要讲解线性代数的研究对象. 从生产、经济等实际问题引出线性方程组, 从求解方程组的需要提出一系列问题, 从而引出全书各章要解决的主要问题. 这样有助于理解求解线性方程组是贯穿全书的主要线索, 有助于学生带着问题学习各章.

本书适用学时数为 40~50 学时.

本书第 1 章由曹重光编写, 第 2、3 章由张显编写, 第 4~6 章由于宪君编写, 最后由曹重光进行统编. 本书的出版得到科学出版社、黑龙江大学、哈尔滨商业大学有关领导和同志的大力支持与帮助. 吴海燕打印和校对了全书, 在此一并致谢. 本书有不当之处, 敬请同行和读者不吝赐教.

编　者

2007 年 4 月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　线性代数的研究对象

线性代数作为一门课程, 它究竟要研究什么呢? 简单地说, 它是研究多变量之间的线性关系. 所谓线性关系即中学我们就知道的一次关系. 最简单的一次关系如 $y=3x$. 为了进一步说清楚这一点, 请看下面两个例子.

例 1.1.1　投入产出模型.

设某地区由农业、工业和服务业三个部门组成一个经济系统. 各部门的生产满足系统内部和外部的需求, 同时也消耗系统内部各部门的产品, 如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1　直接消耗系数

		消耗部门			外部需求费用	总产值
		农业	工业	服务业		
生产部门	农业	0.4	0.3	0.2	y_1	x_1
	工业	0.2	0.5	0.2	y_2	x_2
	服务业	0.3	0.1	0.4	y_3	x_3
新增产值		z_1	z_2	z_3		
总产值		x_1	x_2	x_3		

表 1.1.1 中, 农业那一行的 0.4 表示生产农业部门 1 元钱的产品需消耗农业部门的产品 0.4 元, 同样 0.3 表示生产农业部门 1 元钱的产品需消耗工业部门的产品 0.3 元, 其余类似.

(1) 求 y_1,y_2,y_3 与 x_1,x_2,x_3 的关系;

(2) 当 $y_1=40$ 亿元, $y_2=24$ 亿元, $y_3=16$ 亿元时, 求 x_1,x_2,x_3 以及 z_1,z_2,z_3.

解　(1) 因各部门总产值应等于各部门的自身和其他部门的生产消耗与外部需求的和, 故有

$$\begin{cases} x_1=0.4x_1+0.3x_2+0.2x_3+y_1, \\ x_2=0.2x_1+0.5x_2+0.2x_3+y_2, \\ x_3=0.3x_1+0.1x_2+0.4x_3+y_3. \end{cases}$$

于是可整理得

$$\begin{cases} y_1=0.6x_1-0.3x_2-0.2x_3, \\ y_2=-0.2x_1+0.5x_2-0.2x_3, \\ y_3=-0.3x_1-0.1x_2+0.6x_3. \end{cases} \tag{1.1}$$

(2) 求 x_1, x_2, x_3, 即解下列方程组

$$\begin{cases} 0.6x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 = 40, \\ -0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 24, \\ -0.3x_1 - 0.1x_2 + 0.6x_3 = 16. \end{cases} \tag{1.2}$$

用加减消元法可求得

$$x_1 = 232(\text{亿元}); \quad x_2 = 212(\text{亿元}), \quad x_3 = 178(\text{亿元}).$$

又由于各部门的总产值等于该部门自身消耗数和其他部门的消耗数加上新创产值可得

$$\begin{cases} (0.4 + 0.2 + 0.3)x_1 + z_1 = x_1, \\ (0.3 + 0.5 + 0.1)x_2 + z_2 = x_2, \\ (0.2 + 0.2 + 0.4)x_3 + z_3 = x_3. \end{cases}$$

由此可求出

$$z_1 = 23.2(\text{亿元}), \quad z_2 = 21.2(\text{亿元}), \quad z_3 = 35.6(\text{亿元}).$$

例 1.1.2　图 1.1.1 为一物流平衡图, 其中 x_1 表示从站 A 流向站 B 的货物吨数, x_4 表示从站 B 流向站 D 的货物吨数, 20 表示从站 D 流向站 C 的货物吨数等. 如果要求在每一站流入吨数与流出吨数相等, 求 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 应如何选择.

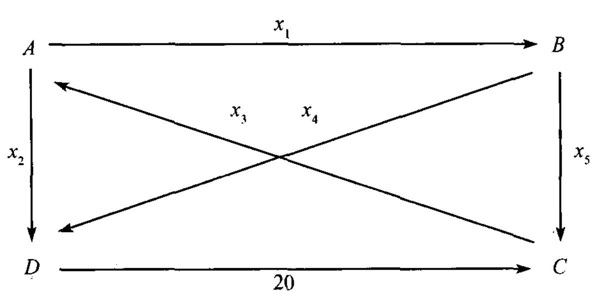

图 1.1.1

解　由题意知 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3, \\ x_4 + x_5 = x_1, \\ x_5 + 20 = x_3, \\ 20 = x_2 + x_4, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 - x_5 = 20, \\ x_2 + x_4 = 20. \end{cases} \tag{1.3}$$

暂时我们不去解这个方程组, 待学过后面的消去法后会很容易解, 那时该题将留为习题.

投入产出的数学模型是俄裔美国学者 W. Leontief 于 20 世纪 30 年代首次提出, 将其应用于对国民经济的分析并获得成功, 因此 Leontief 获得了 1973 年诺贝尔经济学奖. 上面的例 1.1.1 只是说明性的例子, 想要了解更深入的内容可参看文献 [1,2].

由例 1.1.1 我们看到外部消耗变量 y_1, y_2, y_3 与各部门产值变量 x_1, x_2, x_3 之间具有方程组 (1.1) 的线性关系. 为解决例 1.1.1(2) 则需求解方程组 (1.2), 而为解答例 1.1.2 则需求解方程组 (1.3). 其实方程组 (1.3) 是比方程组 (1.2) 更具一般性的. 因为方程的个数未必和未知数的个数一样多.

一般地, 设

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 a_{ij} 为已知数, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. 则称上述方程组 (1.4) 为变量 $x_1, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, \cdots, y_m$ 之间的线性关系. 特别当 $m = n$ 时, 又称其为一个线性变换.

如果 $y_1, \cdots, y_m$ 分别为已知数 $b_1, \cdots, b_m$. 则求解 $x_1, \cdots, x_n$ 称为解线性方程组.

由上述分析可知**线性代数的主要研究对象即变量之间的线性关系**. 生产、经济、社会所提出来的实际问题往往需要去求解线性方程组. 所以**线性方程组的求解理论是线性代数要重点研究的内容**.

线性代数作为一个学科是代数学的一个分支. 代数学主要是研究运算系统的, 而线性代数研究的运算则主要是线性运算. 其实线性运算包括两种运算: 加法和数乘. 在中学已学过具有两个分量的平面向量及具有三个分量的空间向量, 在线性代数里将研究更一般的具有 n 个分量的向量.

设 n 个数的有序组 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是一个 n 维向量 (当然也可以写成 $(a_1, \cdots, a_n)$), 我们可以如下规定两个向量的加法:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},$$

一个数与一个向量的数乘法:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix},$$

这种规定与我们知道的平面向量、空间向量的结果是一致的.

按照如上规定的运算可以将方程组 (1.4) 写成向量形式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

而解线性方程组即求满足

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

的未知数 $x_1, \cdots, x_n$.

1.2　消去法与矩阵的初等变换

在中学我们会用加减消元法解二元一次方程组及三元一次方程组, 本节要在此基础上得出解一般情形的线性方程组的消去法.

回忆解二元 (三元) 一次方程组的加减消元法, 实际上是不断地对方程施行如下的同解变换:

(1) 某个方程乘以一个非零常数;

(2) 某个方程的倍数加到另一个方程上去.

我们当然可以用这个办法去处理一般的线性方程组. 不难看出这种对方程的变换实际上是对方程中已知数表进行的. 这种矩形的数表平时几乎到处都用, 如成绩表、财务表、物质调拨表等.

定义 1.2.1 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行、n 列的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵, 记作 A 或 $A_{m\times n}$, 也记作 $(a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 称为 A 的 (i,j) 位置元素 $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$, 下标 i,j 分别称为 a_{ij} 的行标和列标.

如果 A 和 B 的行数相同且列数也相同则称为同型阵. 对同型阵 A 与 B 的所有 (i,j) 位置其对应元素都相同, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$. 例如, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -1 & 4 \\ 2 & z & -2 \end{pmatrix}$$

可得 $x=4, y=1, z=3$.

$n\times n$ 矩阵也称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵, 简称 n 阶阵. 一阶阵 (a) 也可写成 a.

用如上定义的矩阵我们可以把 $1\times n$ 矩阵称为 n 维行向量, $n\times 1$ 矩阵称为 n 维列向量.

定义 1.2.2 对矩阵的行 (列) 向量所做的以下变换称为矩阵的初等行 (列) 变换, 统称初等变换.

(1) 倍法：用非零数 k 乘第 i 行 (列) 各元素记为 $kr_i(kc_i)$.

(2) 消法：将第 j 行 (列) 的 k 倍加于第 i 行 (列) 记为 $kr_j+r_i(kc_j+c_i)$.

(3) 换法：将第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

由此, 解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

可以对其增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

施行以上三种初等变换. 前两种就是前边所说的同解变换; 后一种当然也是保证方程同解的, 之所以引入其实是为了方便. 下面我们举例说明.

例 1.2.1　解如下线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1-6x_2+4x_3-3x_4+3x_5=1, \\ 3x_1-4x_2+x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-2, \\ x_2-4x_3-x_5=-4. \end{cases}$$

解　设增广阵为 B

$$B \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_1+r_2]{-2r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2+r_3]{-r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此易见

$$\begin{cases} x_4=5-x_5, \\ x_2=-4+4x_3+x_5, \\ x_1=2x_2-3x_3+x_4-x_5+1=-2+5x_3, \\ x_3=x_3\text{任意}, \\ x_5=x_5\text{任意}. \end{cases}$$

用向量的线性运算表示解 (称为向量形式的解又叫解向量)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_5\text{任意}.$$

例 1.2.1 所用的方法称为消去法, 其实就是程序化地安排对线性方程组的增广矩阵的初等行变换, 逐个地消去一些未知数, 最后再回代得到可能带有自由未知量 (例如, 例 1.2.1 中的 x_3, x_5) 的解的表达式.

由此看出, 对矩阵施行的初等行变换的重要性, 其实运用数学归纳法 (对矩阵行数), 容易证明如下的定理 (证明略).

定理 1.2.1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则经过一系列初等行变换可以化成满足如下条件的称之谓阶梯形矩阵. (i) 若有零行 (元素全为 0 的行) 则零行必须集中在最下方; (ii) 非零行的左起第一个非零元素的列标随行标递增. 即

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1i_1} & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2i_2} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{ri_r} & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b_{ji_j} \neq 0 \ (j = 1, \cdots, r)$.

这样, **消去法的过程就是将方程组的增广矩阵用初等行变换化成阶梯形, 当有解时逐次回代可写出解. 什么时候可看出无解呢? 显然, 当且仅当阶梯形的最后一非零行只有一个非零元, 恰在最后一列时则意味着无解.** (为什么?)

1.3 问题及各章内容提示

本节我们提出一些问题从而提示以后各章要研究的主要内容.

(1) 在运用消去法时, 虽然实施初等行变换的过程不同, 但因为都是同解变换所以不会改变方程组有解还是无解, 有唯一解还是无穷多解这些基本事实. 这是否说明**矩阵在初等行变换下应该有一个不变量**? 从本质上来说, **它将决定线性方程组解的存在性及解的状态**? 这些问题的解决依赖于第 3 章对矩阵的深入研究.

(2) 显然不同的消去过程应该不会改变解向量集合. 在例 1.2.1 中曾给出了解集合的一个表述. 如果运用方法不同, 完全可以得到与此不同的表述. **这些不同的解向量的表述为什么能表达同一解集合? 到底线性方程组解的结构是怎样的?** 这些问题将在第 4 章对 n 维向量线性相关性的全面深入的研究和讨论中得到解决.

(3) 最简单的二元一次方程组在中学就研究过. 用加减消元法不难解出如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时有唯一解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

如果定义二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 则解可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

如果运用消去法, 经过一些较为复杂的讨论和计算, 可得出：当定义的如下三阶行列式

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

不为 0 时, 三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

有唯一解 (也可用行列式表示).

这样, 如何对 n 阶方阵定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$