



北京市高等教育精品教材立项项目

非线性有限元基础

殷有泉 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

0241.82/52

2007

北京市高等教育精品教材立项项目

非线性有限元基础

殷有泉 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非线性有限元基础/殷有泉著. —北京:北京大学出版社, 2007. 12
ISBN 978-7-301-12799-5

I. 非… I. 殷… III. 非线性-有限元分析 IV. O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 151785 号

书 名: 非线性有限元基础

著作责任者: 殷有泉 著

责任编辑: 邱淑清

标准书号: ISBN 978-7-301-12799-5/O · 0728

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021
出版部 62754962

电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

850 毫米×1168 毫米 32 开本 12 印张 310 千字

2007 年 12 月第 1 版 2007 年 12 月第 1 次印刷

定 价: 23.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

作者从现有的国内外大量的非线性有限元书刊文献中,根据其对理论的理解和编程计算的实践经验,取其最重要最核心部分,作为本书的基本内容,使其具有突出理论要点和联系实际的特色,是一本有创见的能反映国内外现有学术水平、并易于为读者掌握非线性有限元理论的教材。全书内容包括三部分。第一部分为第一章,介绍非线性方程组的数值解法。第二部分为第二章至第四章,介绍材料非线性问题的有限元法及其应用。第三部分为第五章至第七章,主要涉及有限应变和大位移情况的非线性有限元的理论和应用。本书深入浅出地介绍了三方面基础知识:本构关系,有限应变下的应变和应力度量及非线性方程组的数值求解方法。对初学者来说,掌握了这三方面的难点,加上已有的线性有限元知识,便可掌握非线性有限元法了。读者在此基础上可以读懂有关专著和文献资料,并能正确使用程序解决工程中的非线性问题。

本书可作为高等院校力学专业和航空航天、船舶、土木工程与岩石工程等其他工程科学专业高年级大学生以及研究生课程的教材,也可作为广大工程科学技术人员自学非线性有限元的参考书。

作 者 简 介

殷有泉 北京大学力学与工程科学系教授,博士生导师。1937年生于辽宁省沈阳市,1963年毕业于北京大学数学力学系,后留校任教。多年来从事固体力学、计算力学和岩石力学等方面的教学与研究。著有《材料力学》,《固体力学非线性有限元引论》,《有限单元方法及其在地学中的应用》和《油水井套管外挤力计算及其力学基础》等著作,发表科学论文80余篇。

前 言

在上个世纪 60 年代,有限元法在数学理论和工程应用方面开始了奠基性的工作,随后它在各个领域都有了快速的发展。这表现在大量的文献及各种专用、通用程序的出现和多次有关国际会议的召开。对固体力学和结构力学来说,非线性问题的有限元分析日臻成熟,目前从国外引进了一些大型的通用程序供工程分析使用。然而,掌握非线性有限元法的原理,正确使用通用程序解算工程问题,以及读懂期刊上的文献资料,需要人们在数值方法、力学理论和有限元方面具备比以往更深入和广泛的基础知识。这些知识又难于在大学本科的教学计划中全面安排。作者在上世纪 80 年代先后在北京大学、中国科学院研究生院为研究生开设了相应的课程,并将这些课程的讲义整理为一本专著《固体力学非线性有限元引论》,在 1987 年列入《北京大学、清华大学固体力学丛书》出版。这本书出版至今已经有二十年时间了。在此期间,非线性有限元法在数学理论和工程应用上均有长足的发展。考虑了这些情况,作者感到有必要重新编写一本关于固体力学有限元法的教科书。为了区别于以前的教材,本书取名为《非线性有限元基础》。

本书共有七章,前四章只涉及小变形条件下的材料非线性问题,后三章进一步介绍大变形条件下几何非线性和材料非线性同时存在的问题。第一章首先介绍数值求解非线性方程组的各种迭代方法,包括 Newton 法、简化 Newton 法、修正 Newton 法和拟 Newton 法;随后介绍增量方法,包括载荷增量法、位移增量法和弧长法。在第二章对小应变本构理论作了详尽的介绍,特别强调应变空间表述的本构方程与有限元分析的位移法是相互配套的。进而介绍了材料的稳定性问题(本构矩阵的正定性问题),它们是岩

石混凝土结构稳定性分析的基础。在这一章还介绍了间断面的本构性质的表述和稳定性问题。在第三章介绍了材料非线性问题的有限元法。其中专门介绍了含间断面物体的虚功原理,使含间断面和无限区域的有限元分析在理论上和编程上得到统一的和严谨的表述。并且使得有限元法不仅能应用于结构的应力分析和位移分析,也能研究岩体工程的不稳定性(主要是极值点不稳定性)问题。在第四章介绍了非线性有限元法在实践中的应用。从宇航、反应堆设计到机械和岩土工程,材料非线性有限元法均有广泛的应用。本章很难涉及到所有方面,仅着重介绍一些新开拓的领域和国内作者的一些工作。从第五章开始,介绍有关大变形的问题。在第五章主要介绍大变形条件下应力和应变的度量和基本方程的表述。第六章介绍既是几何非线性又是材料非线性问题的有限元法。第七章介绍大变形问题在各个领域内某些应用。

全书内容的取舍考虑到本书读者是硕士研究生、高年级本科生和广大工程技术人员。本书定位于引论性质的教材。它着重介绍有关非线性有限元的基础知识。作者认为它们包括三个方面:第一,对材料非线性问题是材料的本构关系,特别是弹塑性材料本构关系;第二,对大变形问题是应力和应变度量;第三,对非线性方程组的数值求解方法。这三个方面分别在第二章、第五章和第一章作了详尽的介绍。掌握了这三方面的难点,加上已有的线性有限元知识,就不难掌握非线性有限元法了。对上述内容的介绍力求深入浅出,尽力使用简单的数学表述,例如,对大变形的表述仅采用 Descartes 直角坐标。作者认为读者掌握了本书的基础知识以后,不难通过自学去了解和掌握有关非线性有限元更广泛的内容(例如板壳等结构力学内容和动力学内容),并能读懂有关专著和文献资料,正确使用程序解决工程中的非线性问题。

本书可作为力学专业和其他工程专业的研究生、高年级大学生 45~60 学时课程教材,也可以作为广大工程科学的科技人员自学非线性有限元的参考书。对那些仅对材料非线性问题感兴趣的

读者,只需阅读本书的前四章。

在本书的撰写过程中,得到了中国石油大学(北京)张广清副教授,北京大学博士研究生李平恩的帮助,在此表示谢意。

由于作者水平所限,本书难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

殷有泉

2007年5月于北京大学

目 录

第一章 非线性方程组的数值解法	(1)
§ 1 Newton 法	(2)
§ 2 简化 Newton 法和修正 Newton 法	(8)
§ 3 拟 Newton 法	(12)
§ 4 增量方法	(19)
第二章 小应变条件下材料的本构方程	(30)
§ 1 弹性材料的本构方程	(31)
§ 2 应力空间表述的弹塑性材料的本构方程	(44)
§ 3 应变空间表述的弹塑性材料的本构方程	(64)
§ 4 岩石的塑性、损伤及其本构表述	(87)
§ 5 弹塑性材料的稳定性	(94)
§ 6 间断面的本构方程	(103)
§ 7 粘性材料的本构方程	(114)
第三章 材料非线性问题的有限元法	(127)
§ 1 虚功原理	(127)
§ 2 线弹性问题的有限元法概述	(132)
§ 3 等参数单元	(142)
§ 4 非线性弹性问题的有限元法	(154)
§ 5 存在间断面的虚功原理,节理单元和无限区域单元	(165)
§ 6 弹塑性问题的有限元法	(177)
§ 7 粘塑性和蠕变问题的有限元法	(184)
第四章 材料非线性有限元法的某些应用	(189)
§ 1 简单的弹塑性问题	(189)

§ 2	岩石工程的开挖和支护	(197)
§ 3	岩石力学问题的平衡稳定性	(216)
§ 4	刚体元方法	(231)
第五章	大变形问题的基本方程	(242)
§ 1	物体变形和运动, 变形梯度	(242)
§ 2	Green 应变和 Almansi 应变	(247)
§ 3	物质导数	(253)
§ 4	速度梯度, 变形率	(258)
§ 5	Cauchy 应力, 名义应力和第二类 Piola-Kirchhoff 应力	(263)
§ 6	平衡方程和虚功方程	(271)
§ 7	本构方程	(276)
第六章	大变形问题的有限元法	(284)
§ 1	用物质描述方法表述的弹性大变形问题	(284)
§ 2	大变形增量问题的 TL 方法和 UL 方法	(296)
§ 3	大变形问题的空间描述方法	(315)
§ 4	处理大变形问题的 ALE 方法	(322)
第七章	大变形问题的有限元法的某些应用	(333)
§ 1	Lagrange 方法在弹性大变形问题中的应用	(333)
§ 2	更新的 Lagrange (UL) 方法在弹塑性大变形问题中的 应用	(340)
§ 3	Euler 法在固体大变形分析中的应用	(352)
参考文献		(365)
名词索引		(369)

第一章 非线性方程组的数值解法

不论是材料非线性问题还是几何非线性问题,经过有限元离散之后,最终都归结为求解一个 N 个变量, N 个方程的非线性方程组

$$\begin{cases} \psi_1(a_1, \dots, a_N) = 0, \\ \vdots \\ \psi_N(a_1, \dots, a_N) = 0, \end{cases}$$

其中 $a_1, \dots, a_N$ 是未知量, $\psi_1, \dots, \psi_N$ 是定义在 N 维 Euclid 空间开域 D 上的实值函数,一般它们是 $a_1, \dots, a_N$ 的非线性函数. 如果引用矢量记号

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N]^T, \quad \boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_N]^T, \\ \mathbf{0} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T,$$

式中上标“T”表示转置,上述方程组可简单的用一个矢量方程

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

表示. 为了突出力学含义和讨论方便,有时将这个矢量方程改写为如下形式

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{a}) - \mathbf{R} = \mathbf{0},$$

这里 $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ 是未知矢量的一个矢量函数,而 $\mathbf{R}$ 是已知矢量. 在全量问题的有限元的位移表述中, $\mathbf{a}$ 代表未知的节点位移矢量, $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ 是内力的等效节点力矢量, $\mathbf{R}$ 是载荷的等效节点力矢量,而矢量方程 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 表示关于节点的平衡方程,其中的每一个分量方程对应一个自由度的平衡. 对于增量问题,我们将 $\mathbf{a}$ 理解为位移增量矢量,将 $\mathbf{R}$ 理解为载荷增量矢量,所作讨论不变.

为了直观了解 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a})$ 和 $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ 的关系,我们在单变量情况下画出 ψ - a 和 P - a 曲线,如图 1-1 所示. 不难看出,曲线 $z = \psi(a)$ 与横轴

$z=0$ 交点的坐标 a^* 是问题的解; 同样曲线 $z=P(a)$ 与水平线 $z=R$ 的交点的横坐标 a^* 同样是问题的解. 在这种单自由度情况下, 曲线 $z=P(a)$ 是曲线 $z=\psi(a)$ 的平行移动的结果.

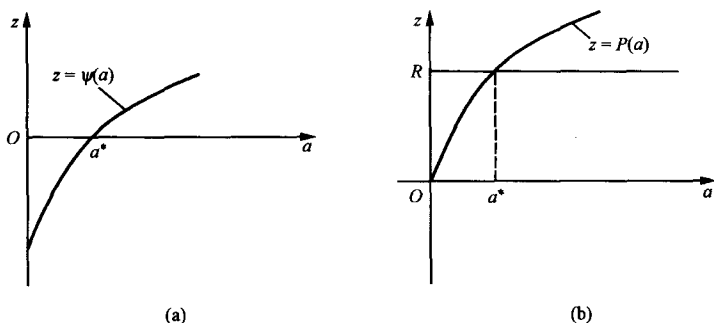


图 1-1

非线性方程组的求解问题无论在理论上还是在解法上都不如线性方程组成熟和有效. 在解法上, 除对极特殊的非线性方程组外, 直接法几乎是不能使用的, 通常采用各种数值方法, 用一系列线性方程组的解去逼近所讨论的非线性方程组的解. 在这一章将简单介绍在有限元分析中常见的各种求解非线性方程组的数值方法.

§ 1 Newton 法

数值求解非线性方程组

$$\psi(a) = P(a) - R = 0 \quad (1-1-1)$$

的一个最著名的方法是 **Newton 法**, 也称为 **Newton-Raphson 方法**. 它是一个最基本而且十分重要的方法, 目前使用的很多有效的迭代法都是以 Newton 法为基础而发展得到的.

下面我们首先介绍 Newton 法.

现在设 $a=a^n$ 是方程(1-1-1)的第 n 次近似解(要注意在 a^n 中

的上标 n 不代表幂次, 而是表示迭代法求解的第 n 次近似). 一般地, $\mathbf{a}^n$ 不是方程的最终解, 因而它不满足方程组 (1-1-1), 这时

$$\boldsymbol{\psi}^n \equiv \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n) = \mathbf{P}(\mathbf{a}^n) - \mathbf{R} \neq \mathbf{0}. \quad (1-1-2)$$

我们想进一步求方程组 (1-1-1) 的更好的近似解, 设解的修正值为 $\Delta \mathbf{a}^n$, 这个新的近似解可表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n. \quad (1-1-3)$$

将 (1-1-3) 式代入 (1-1-1) 式并在 $\mathbf{a} = \mathbf{a}^n$ 附近将 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n)$ 作 Taylor 展开, 每个分量方程为

$$\begin{aligned} \psi_i(a_1^{n+1}, \dots, a_N^{n+1}) &\equiv \psi_i(a_1^n, \dots, a_N^n) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial a_j} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n} \Delta a_j^n + \dots \\ (i &= 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (1-1-4)$$

上式右端第一项由 (1-1-2) 式相应分量给出, 未写出的项都是高阶项. 引用 **Jacobi 矩阵**

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{a}} \right) &\equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{a}} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{a}} & \dots & \frac{\partial \psi_N}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial a_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_N}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial \psi_N}{\partial a_N} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1-1-5)$$

(1-1-4) 式可用矩阵形式写为

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^{n+1}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n} \Delta \mathbf{a}^n + \dots.$$

在上面展开式中仅取至线性项, 并令其等于零, 得

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n + \Delta \mathbf{a}^n) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n} \Delta \mathbf{a}^n = \mathbf{0}. \quad (1-1-6)$$

从而可解出修正量 $\Delta \mathbf{a}^n$ 为

$$\Delta \mathbf{a}^n = - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n}^{-1} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}^n), \quad (1-1-7)$$

式中上标“-1”表示求逆.从而得到了第 $n+1$ 次近似解

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n}^{-1} \psi(\mathbf{a}^n) \quad (n=0,1,\dots), \quad (1-1-8)$$

这就是解方程组(1-1-1)的 Newton 法.它的几何意义就是利用 N 个超切平面

$$z = \psi(\mathbf{a}^n) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^n)$$

与超平面 $z=0$ 交点 $\mathbf{a}^{n+1}$ 作为超曲面 $z=\psi(\mathbf{a})$ 与超平面 $z=0$ 交点 $\mathbf{a}^*$ 的近似. Newton 法(1-1-8)每步要计算 Jacobi 矩阵的逆,当 N 很大时计算量是很大的,实际计算可采用式(1-1-6),即在每步求解一个 N 阶线性方程组,代替求逆.

为了表述简单,可引入记号

$$\mathbf{K}_T^n = \mathbf{K}_T(\mathbf{a}^n) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^n}, \quad (1-1-9)$$

其中下标“T”代表切向,在有限元分析中 Jacobi 矩阵代表切线刚度矩阵.这样,Newton 法的迭代公式可改写为

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n - (\mathbf{K}_T^n)^{-1} \psi(\mathbf{a}^n) = \mathbf{a}^n + (\mathbf{K}_T^n)^{-1} [\mathbf{R} - \mathbf{P}(\mathbf{a}^n)] \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (1-1-10)$$

上式的最后一个等号利用了(1-1-2)式.

在给定初值 $\mathbf{a}=\mathbf{a}^0$ 之后,便可按(1-1-8)或(1-1-10)式逐步求出 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ 等等.我们将 $\{\mathbf{a}^n\}$ 称为迭代序列.如果用迭代法得到的序列

$$\{\mathbf{a}^n, n=0,1,\dots\} \subset D,$$

则称迭代序列是适定的.它表明迭代法算出的每个 $\mathbf{a}^n$ 都有意义.如果 $\mathbf{a}^* \in D$ 是方程(1-1-1)的解,且序列 $\{\mathbf{a}^n, n=0,1,\dots\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^*, \quad (1-1-11)$$

则称迭代序列收敛于 $\mathbf{a}^*$.从理论上可以证明,如果方程(1-1-1)的一个解是 $\mathbf{a}^*$,则存在 $\mathbf{a}^*$ 的一邻域 $\delta \subset D$,对任何初始近似 $\mathbf{a}^0 \in \delta$,

用 Newton 法(1-1-8)或者(1-1-10)得到的序列是收敛的. 这种在一个充分小邻域内收敛的迭代序列, 称它具有局部收敛性. 由于 Newton 法要求初始值 a^0 与解 a^* 必须充分靠近, 才能使迭代序列收敛到 a^* , 即迭代是局部收敛的, 因此在实际计算中初始近似值 a^0 的选取是至关重要的.

在实际计算中由于方程组的解 a^* 事前未知, 因而很难直接用(1-1-11)式来判断何时终止迭代. 通常, 在两个相邻的近似解之差

$$\Delta a^m = a^{m+1} - a^m \quad (1-1-12)$$

变得充分小时, 终止迭代. 我们说, 这时的解 a^{m+1} 或 a^m 已收敛到问题(1-1-1)的解. 为了度量偏差值 Δa^m 的大小和判断是否收敛, 可以使用各种各样的范数定义收敛准则. 例如, 范数的定义可取

$$\|\Delta a\| = \max |\Delta a_i|, \quad (1-1-13)$$

$$\text{或} \quad \|\Delta a\| = ((\Delta a)^T \Delta a)^{1/2}, \quad (1-1-14)$$

迭代终止的准则可取为

$$\|\Delta a^m\| \leq \alpha \|a^m\| \quad (1-1-15)$$

(α 是事前指定的一个很小的数), 当满足(1-1-15)式时认为达到收敛, 终止迭代. 我们还注意到在迭代的每一步, 得到的近似解一般不会严格满足方程组(1-1-1)(除非收敛发生), 即 $\psi(a^m) = P(a^m) - R \neq 0$. 因此, $\psi(a^m)$ 可作为对平衡偏离的一种度量. 后文会发现, $-\psi(a^m) = R - P(a^m)$ 可代表失衡力矢量. 于是, 收敛准则可相应的采用

$$\|\psi(a^m)\| \leq \beta \|R\| \quad (1-1-16)$$

(β 是事前指定的一个很小的数), 收敛准则(1-1-15)和(1-1-16)分别称为位移收敛准则和失衡力收敛准则.

应用 Newton 法(1-1-8)或(1-1-10)解方程组(1-1-1)的计算步骤可写成如下算法:

- (1) 给定初始近似 a^0 及计算精度 α 和 β ;
- (2) 假定已经进行了 n 次迭代, 已求出 a^n 及 $\psi(a^n)$, 计算

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_{a=a^n} = K_T^n;$$

(3) 解方程组 $K_T^n \Delta a^n = -\psi(a^n)$, 得 Δa^n ;

(4) 求 $a^{n+1} = a^n + \Delta a^n$ 及 $\psi(a^{n+1})$;

(5) 若 $\|\Delta a^n\| \leq \alpha \|a^n\|$ 或 $\|\psi(a^{n+1})\| \leq \beta \|R\|$, 则置 $a^* = a^{n+1}$ 打印 a^* , $\|\psi(a^*)\|$ 及 $\|\Delta a^n\|$, 转至(6), 否则 $n+1 \rightarrow n$, $a^{n+1} \rightarrow a^n$, $\psi(a^{n+1}) \rightarrow \psi(a^n)$, 转至(2);

(6) 结束.

一个单变量的非线性方程, 用 Newton 法求解过程如图 1-2 所示, 其中(a)和(b)分别对应于低于和高于真解的初始近似值的情况. 这时, $K_T(a)$ 是 P - a 曲线上过点 $(a, P(a))$ 的切线斜率. 假设了初始近似解 a^0 之后, 就可根据 P - a 曲线确定它所对应的

$$K_T^0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)^0 = \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)^0,$$

然后求出 a^0 的修正值 Δa^0 , 这样就得到了新的近似值 $a^1 = a^0 + \Delta a^0$. 反复这样做, 直到 Δa^n 或 $\psi(a^n)$ 充分小时, 计算过程终止.

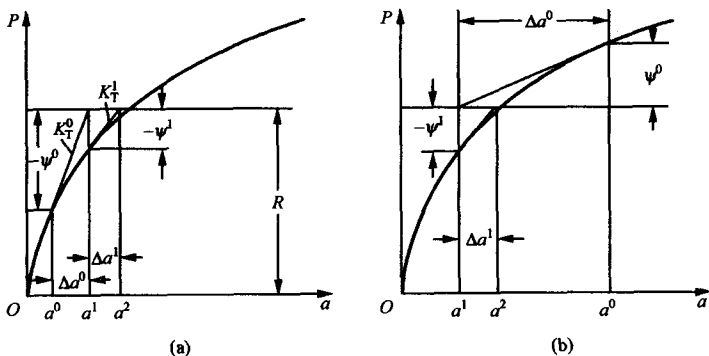


图 1-2

下面讨论迭代法的收敛速度问题, 即研究迭代序列 $\{a^n, n=0, 1, \dots\}$ 收敛的快慢. 衡量收敛快慢需有收敛阶的概念. 假定迭代序

列 $\{a^n\}$ 收敛于 a^* , 且存在 $p \geq 1$ 及常数 $\eta > 0$, 使当 $n \geq n_0$ 下式成立

$$\|a^{n+1} - a^*\| \leq \eta \|a^n - a^*\|^p, \quad (1-1-17)$$

则称序列 $\{a^n\}$ 至少 p 阶收敛. 有了收敛阶 p 的概念, 就可以比较两个收敛于 a^* 的序列的收敛速度, 收敛阶大的序列比收敛阶小的序列收敛得快.

前面用 Newton 法得到的序列 $\{a^n\}$ 具有二阶收敛速度. 粗略的说, 用 Newton 法迭代一次大约有效数位增加一倍, 例如 a^0 准确到一位, 则迭代 3 次就可得到准确 8 位的近似解. 这意味着 Newton 迭代法收敛很快, 这是它的主要优点. 还应指出 Newton 法是自校正的. 也就是说, a^{n+1} 仅依赖于 $\phi(a^n)$ 及 a^n , 前面迭代产生的舍入误差不会一步步传下去. 由于 Newton 法有这些优点, 因此, 它目前是解非线性方程组的一个常用的重要方法.

Newton 法虽然有收敛快和自校正等优点, 但应用到实际计算中仍存在问题. 例如, 在某些非线性问题(如理想塑性和软化塑性问题)的迭代过程中, Jacobi 矩阵 $K_T = \frac{\partial \phi}{\partial a}$ 可能是奇异的或病态的. 于是对 K_T 求逆(或求解线性方程组(1-1-6))会出现困难. 为了克服这一点, 可以采用带参数的 Newton 法. 我们需要引进一个正的阻尼因子 μ^n , 以使 $[K_T^n + \mu^n I]$ 成为非奇异的或者使它的病态性质减弱(这里 I 是 $N \times N$ 阶的单位矩阵). 这时在 Newton 法中用下式

$$a^{n+1} = a^n - (K_T^n + \mu^n I)^{-1} \phi(a^n) \quad (1-1-18)$$

代替(1-1-10)式. 式中 μ^n 的作用是改变了矩阵 K_T^n 的对角元素, 只要 μ^n 选得足够大就可使矩阵 $[K_T^n + \mu^n I]$ 具有对角优势, 从而消除了奇异性. 当然, 参数 μ^n 的引入将使迭代算法的收敛速度减慢.

最后, 我们讨论迭代法的效率问题. 衡量迭代法的好坏, 即效率问题, 除了考虑收敛阶外还应考虑每步迭代计算量的大小. 从本质上讲, 一个最好的迭代法就是一个最经济方法, 即能用最少计算时间求出满足精度要求的解 a^* . 如果一个收敛于 a^* 的迭代序列

$\{a^n\}$ 的收敛阶为 $p > 1$, 每迭代一步的工作量为 W , 则定义

$$e = \frac{\ln p}{W} \quad (1-1-19)$$

为迭代法的效率. 显然, 采用这样的定义, W 越小, 效率越大. 同样, 收敛阶 p 越大, 效率也大. 用这种标准衡量迭代法好坏当然比单纯根据收敛阶衡量会更合理一些. 因此, 考虑 Newton 法的计算效率, 除了它收敛快(二阶敛速)外, 还要考虑它在每步迭代所需的计算量.

§ 2 简化 Newton 法和修正 Newton 法

Newton 法每步迭代要计算 N 个分量函数值 ψ_i 及 N^2 个偏导数值 $(\partial \psi_i / \partial a_j)_{a=a^n} (i, j=1, 2, \dots, N)$, 并求一次矩阵的逆(或求解线性方程组), 其工作量较大. 为节省计算量, 可将在每步计算

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_{a=a^n} = K_T(a^n)$$

改为使用固定的

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)_{a=a^0} = K_T(a^0).$$

这样, 得算法

$$\begin{cases} a^{n+1} = a^n + \Delta a^n, \\ \Delta a^n = - (K_T^0)^{-1} \psi(a^n) \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1-2-1)$$

或

$$a^{n+1} = a^n - (K_T^0)^{-1} \psi(a^n) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1-2-2)$$

这种算法称为简化 Newton 法^[1]. 在简化 Newton 法中, 仅在第一步迭代需要完全求解一个线性方程组. 实际上, 将 K_T^0 三角分解并存储起来, 而从第二步开始的以后各步迭代中采用公式(1-2-1), 只需对右端项的 $\psi(a^n)$ 进行回代就行了. 因而使用简单 Newton 法每步迭代所需的计算时间较少, 但迭代过程的收敛速度却降低