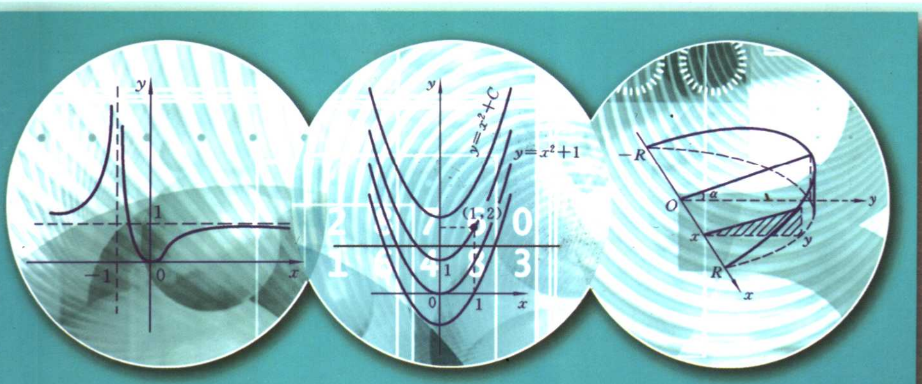
21世纪高职高专公共基础课规划教材

# 工程数学

# GONGCHENG SHUXUE

□ 夏建军 主编 吴水萍 主审




华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

21 世纪高职高专公共基础课规划教材

# 工 程 数 学

主　编　夏建军
副主编　张道振　杨建龙
主　审　吴水萍

华中科技大学出版社
中国·武汉

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学/夏建军　主编. —武汉:华中科技大学出版社,2007 年 8 月
ISBN 978-7-5609-4142-4

Ⅰ.工…　Ⅱ.夏…　Ⅲ.工程数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 130892 号

**工程数学**　　　夏建军　主编

策划编辑:张　毅
责任编辑:张　毅　　　封面设计:刘　卉
责任校对:刘　竣　　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华大图文设计室
印　刷:武汉科利德印务有限公司

开本:787mm×960mm　1/16　印张:16　字数:268 000
版次:2007 年 8 月第 1 版　印次:2007 年 8 月第 1 次印刷　定价:24.00 元
ISBN 978-7-5609-4142-4/TB·95

# 内 容 简 介

本书是21世纪高职高专公共基础课规划教材，适合于高职高专各专业对高等数学和线性代数课程"以实用为主，突出重点、难点"的要求.全书分为一元微积分（第1～5章）、复数（第6章）和线性代数（第7～10章）三部分.复数部分主要介绍复数的最基本概念和运算，专为机械、电子、计算机等专业课程的需要编写.

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校及成人高校各专业教材或参考书.

# 前　　言

本教材是针对高等职业技术学院各专业学生对微积分和线性代数的要求，结合编者多年的教学经验编写的，具有理论完备(大部分定理不作证明)、简明实用、深入浅出、便于学生自学等特点.

本教材由武汉工业职业技术学院夏建军(第1、2、6章)、张道振(第3～5章)、杨建龙(第7～10章)编写，全书由夏建军统稿.机械、电子、计算机等专业可安排120学时讲授，其他专业可安排100学时讲授.

武汉工业职业技术学院吴水萍副教授在百忙中对本教材进行了认真、细致的审定，并给予了极大的帮助和支持，提出了许多指导意见.华中科技大学出版社的编辑同志为本教材的出版付出了辛勤劳动，在此，我们深表敬意并致以衷心感谢!

因编者水平有限，书中一定存在不少错误和不足，敬请读者批评指正，以使本书得到及时修正和完善.

编　者

2007 年 6 月

# 目　　录

# 第1章 极限与连续

极限概念是高等数学中最基本、最重要的概念，它主要研究函数中相互依存的变量之间当某一变量逐渐变化时，另一变量的变化规律. 高等数学中，导数、微分、积分等许多重要概念都是用极限来描述和运算的.

## 1.1 数列的极限

### 1.1.1 极限思想

极限思想在我国古代就已出现，魏晋时期杰出的数学家刘徽在注解《九章算术》时就订正了“径一周三”(圆的直径与圆周长之比，即$\pi$为3，世称古率)之误. 他创立了“割圆术”，首先在圆内作内接正6边形，此时圆内接正6边形的周长刚好为圆直径的3倍，再作圆内接正12边形、正24边形、正48边形、正96边形等，随着正多边形的边数的增加，则多边形的周长愈来愈逼近圆周长. 刘徽论述:“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”即当圆内接正多边形的边数无限增大时，则多边形的周长的极限位置就是圆周长. 刘徽推算到正96边形长，求得$\pi$为3.14，世称徽率. 虽然其结果还不很精确，但他指出求圆周率的正确方向，即现在所说的极限思想.

南北朝时期的著名科学家祖冲之通过“割圆术”的极限思想精确地计算出圆周率在3.141 592 6～3.141 592 7之间，并定$\frac{22}{7}$为约率，$\frac{355}{113}$为密率，世称祖率. 他成为世界上最早把圆周率数值推算到小数点以后7位数的科学家，早于德国人鄂图(Otto)一千多年，为中国在世界数学界赢得了荣誉.

下面试着用极限思想来计算圆周长及圆周率，设半径为$R$的圆内接正6边形的周长为$L_6=L_{2^0\times 6}$，则$L_6=2R\times 3$，内接正12边形的周长为

$$L_{12}=L_{2^1\times 6}=\sqrt{(L_6)^2+[2\times 6R-\sqrt{(2\times 6R)^2-(L_6)^2}]^2}$$

$$= 2R \times 3.105\,828\,541\,230\,250,$$

$$L_{24} = L_{2^2\times 6} = \sqrt{(L_{12})^2 + [2^2 \times 6R - \sqrt{(2^2 \times 6R)^2 - (L_{12})^2}]^2}$$
$$= 2R \times 3.132\,628\,613\,281\,240,$$

$$L_{48} = L_{2^3\times 6} = \sqrt{(L_{24})^2 + [2^3 \times 6R - \sqrt{(2^3 \times 6R)^2 - (L_{24})^2}]^2}$$
$$= 2R \times 3.139\,350\,203\,046\,870,$$

$$L_{96} = L_{2^4\times 6} = \sqrt{(L_{48})^2 + [2^4 \times 6R - \sqrt{(2^4 \times 6R)^2 - (L_{48})^2}]^2}$$
$$= 2R \times 3.141\,031\,950\,890\,510,$$

$$L_{192} = L_{2^5\times 6} = \sqrt{(L_{96})^2 + [2^5 \times 6R - \sqrt{(2^5 \times 6R)^2 - (L_{96})^2}]^2}$$
$$= 2R \times 3.141\,452\,472\,285\,460,$$

$$\cdots$$

所以

$$L_{2^n\times 6} = \sqrt{(L_{2^{n-1}\times 6})^2 + [2^n \times 6R - \sqrt{(2^n \times 6R)^2 - (L_{2^{n-1}\times 6})^2}]^2},$$

得到数列$\{L_{2^n\times 6}\}$($n$ 为自然数)：

$2R\times 3$

$2R\times 3.105\,828\,541\,230\,250$

$2R\times 3.132\,628\,613\,281\,240$

$2R\times 3.139\,350\,203\,046\,870$

$2R\times 3.141\,031\,950\,890\,510$

$2R\times 3.141\,452\,472\,285\,460$

$2R\times 3.141\,557\,607\,911\,860$

$2R\times 3.141\,583\,892\,148\,320$

$2R\times 3.141\,590\,463\,228\,050$

$2R\times 3.141\,592\,105\,999\,270$

$2R\times 3.141\,592\,516\,692\,160$

$2R\times 3.141\,592\,542\,360\,460$

$2R\times 3.141\,592\,548\,777\,540$

$2R\times 3.141\,592\,550\,381\,810$

$2R\times 3.141\,592\,550\,782\,870$

$2R\times 3.141\,592\,550\,883\,140$

$2R\times 3.141\,592\,550\,908\,210$

$2R\times 3.141\,592\,550\,914\,470$

$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 040$

$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 430$

$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 530$

$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 550$

$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 560$

…

即当$n=4$,圆内接正96边形时,圆周率就精确到3.141;当$n=22$,圆内接正25 165 824边形时,多边形的周长就开始稳定在$2R\times3.141\ 592\ 550\ 916\ 560$附近.也就是说,随着$n$的无限增加,正多边形周长的极限就是圆周长,从而3.141 592 6就是圆周率的较精确数值.这是借助于计算机计算出的一组数值,而1500年前的祖冲之用最原始的手工计算就推导出精确的圆周率,令人叹服!

## 1.1.2　数列的极限

数列就是将一列无穷多个数$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$按某些规律一个一个地进行排列,记为$\{x_n\}$.第一个数$x_1$称为数列的第一项,第二个数$x_2$称为数列的第二项,…,第$n$个数$x_n$称为数列的第$n$项(又称为一般项或通项).

观察下面简单的数列:

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$;

(2) $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}:2,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},1+\frac{1}{4},\cdots,1+\frac{1}{n},\cdots$;

(3) $\{2n\}:2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$;

(4) $\{1+(-1)^{n-1}\}:2,0,2,0,2,0,\cdots,2,0,\cdots$;

(5) $\{C\}:C,C,C,C,\cdots,C,\cdots$($C$是常数).

我们发现,有的数列随着项数$n$的不断增大,一般项$x_n$将不断趋近于一个确定的数,但有的数列并不具有这一特性.例如,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$趋近于0,数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$趋近于1,数列$\{C\}$就是$C$,而数列$\{2n\}$,$\{1+(-1)^{n-1}\}$都不具有这种特性.

**1. 数列极限的定义**

设有数列$\{x_n\}$,$A$是一常数,当项数$n$无限增大时,一般项$x_n$无限趋近于$A$,则称数列$\{x_n\}$存在极限或收敛,极限是$A$或$\{x_n\}$收敛于$A$,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,$$

或

$$x_n\to A\quad(n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$的极限不存在,则称数列$\{x_n\}$发散.

由数列极限的定义有:

数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限是0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；

数列$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$的极限是1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$；

数列$\{2n\}$无极限，即数列$\{2n\}$发散；

数列$\{1+(-1)^{n-1}\}$无极限，即数列$\{1+(-1)^{n-1}\}$发散；

数列$\{C\}$($C$为常数)的极限是$C$，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

**2. 数列极限的几何解释**

如果数列$\{x_n\}$收敛于常数$A$，即将$A$及数列$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$在数轴上用对应点一一表示出来，当$n$无限增大时，数列$\{x_n\}$所对应的点$x_n$都聚集在$A$点附近，且无限趋近于$A$点，如图1-1所示.

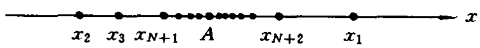



**图1-1**

## 1.1.3 数列极限的性质

**定理1.1**　若数列$\{x_n\}$收敛，则它的极限唯一.

**定理1.2**　若数列$\{x_n\}$存在极限，则数列$\{x_n\}$有界，即存在正数$M$，对任意正整数$n$，都有$|x_n|\leqslant M$.

**注意**　该定理的逆命题不成立，即有界数列不一定有极限. 例如，数列$\{1+(-1)^{n-1}\}$：2,0,2,0,2,0,…,2,0,…，是有界的(因为$|x_n|\leqslant 2$)，但它的极限并不存在.

**单调数列**　数列$\{x_n\}$若满足$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则称数列$\{x_n\}$是单调增加的；若满足$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots$，则称数列$\{x_n\}$是单调减少的. 若上述中的等号不成立，就称数列$\{x_n\}$是严格单调增加或严格单调减少的. 例如，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，就是严格单调减少的.

**定理1.3**　单调有界数列必存在极限.

## 1.1.4 收敛数列的运算法则

**定理1.4**　若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，则数列$\{x_n+y_n\}$也收敛，并且有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

**例 1.1**　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

**解**　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1.$$

**定理 1.5**　若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，则数列$\{x_ny_n\}$也收敛，并且有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

**例 1.2**　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}$.

**解**　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=3\times0=0.$$

进而有　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C}{n^k}=C\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=C\times0=0$　（$C$为常数，$k$是正整数）.

**定理 1.6**　若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$，则数列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛，并且有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

**例 1.3**　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-2}{n^2+1}$.

**解**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0-0}{1+0}=2.$$

**例 1.4**　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+b_2n^{m-2}+\cdots+b_m}$，其中$k,m$都是正整数，并且$k\leqslant m$，$a_i,b_j(i=0,1,2,\cdots,k,j=0,1,2,\cdots,m)$都是与$n$无关的常数，并设$a_0\neq0,b_0\neq0$.

**解**　由数列的极限知，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{k-m}=\begin{cases}0,k<m,\\1,k=m.\end{cases}$

于是，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+b_2n^{m-2}+\cdots+b_m}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{k-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\cdots+\frac{b_m}{n^m}}=\begin{cases}0, & k<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & k=m.\end{cases}$$

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+5n^2-7}{4n^3-6n+8}=\frac{3}{4}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+5n^2-3n+1}{2n^4-5n^3+8n-7}=0$.

### 习 题 1.1

1. 写出下列数列的前四项，并求出极限.

(1) $x_n=\frac{n+1}{n^2+1}$；　　(2) $x_n=\frac{\sin n}{n}$；

(3) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　　(4) $x_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{4n^3-2n^2+2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

## 1.2 函数的极限

高等数学课程里基本上研究两类极限，1.1 节中讲述了当$n\to\infty$时数列$\{x_n\}$的极限，即当$n$取正整数并不断增大时，函数$x_n=f(n)$的极限. 本节研究函数$y=f(x)$在某一点的极限及函数在无穷远处的极限.

### 1.2.1 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

先来讨论抛物线$y=x^2$上一点$P(2,4)$的切线斜率. 由解析几何的定义可知，曲线在点$P$的切线是过点$P$的任意割线$PQ$当点$Q$沿曲线无限趋近于点$P$(点$Q$与点$P$不重合)的极限位置，如图 1-2 所示.

设$Q(x,x^2)(x\neq 2)$，已知割线$PQ$的斜率为

$$k_1=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2,$$

当$x$无限趋近于2时，就有过点$P$的切线斜率$k=4$，4 就是函数$y=\frac{x^2-4}{x-2}$当$x$无限