

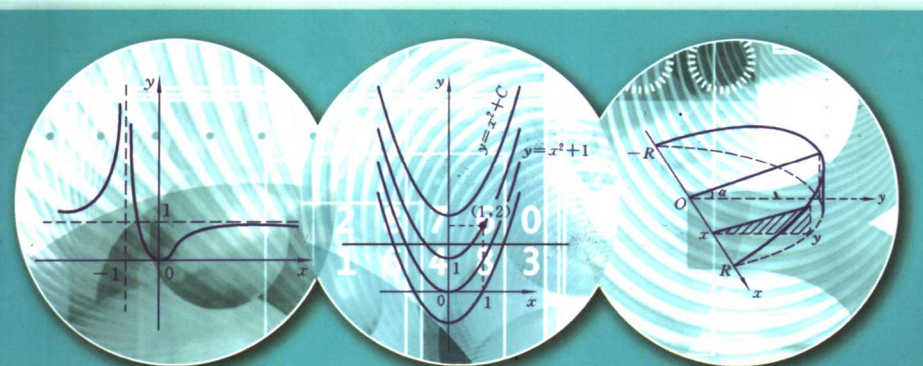


21世纪高职高专公共基础课规划教材

工程数学

GONGCHENG
SHUXUE

□ 夏建军 主编 吴水萍 主审



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

21 世纪高职高专公共基础课规划教材

工 程 数 学

主 编 夏建军
副主编 张道振 杨建龙
主 审 吴水萍

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/夏建军 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2007年8月
ISBN 978-7-5609-4142-4

I. 工… II. 夏… III. 工程数学-高等学校:技术学校-教材 IV. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第130892号

工程数学

夏建军 主编

策划编辑:张 毅

责任编辑:张 毅

责任校对:刘 竣

封面设计:刘 卉

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华大图文设计室

印 刷:武汉科利德印务有限公司

开本:787mm×960mm 1/16

印张:16

字数:268 000

版次:2007年8月第1版

印次:2007年8月第1次印刷

定价:24.00元

ISBN 978-7-5609-4142-4/TB·95

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是21世纪高职高专公共基础课规划教材,适合于高职高专各专业对高等数学和线性代数课程“以实用为主,突出重点、难点”的要求.全书分为一元微积分(第1~5章)、复数(第6章)和线性代数(第7~10章)三部分.复数部分主要介绍复数的最基本概念和运算,专为机械、电子、计算机等专业课程的需要编写.

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校及成人高校各专业教材或参考书.

前 言

本教材是针对高等职业技术学院各专业学生对微积分和线性代数的要求,结合编者多年的教学经验编写的,具有理论完备(大部分定理不作证明)、简明实用、深入浅出、便于学生自学等特点.

本教材由武汉工业职业技术学院夏建军(第1、2、6章)、张道振(第3~5章)、杨建龙(第7~10章)编写,全书由夏建军统稿.机械、电子、计算机等专业可安排120学时讲授,其他专业可安排100学时讲授.

武汉工业职业技术学院吴水萍副教授在百忙中对本教材进行了认真、细致的审定,并给予了极大的帮助和支持,提出了许多指导意见.华中科技大学出版社的编辑同志为本教材的出版付出了辛勤劳动,在此,我们深表敬意并致以衷心感谢!

因编者水平有限,书中一定存在不少错误和不足,敬请读者批评指正,以使本书得到及时修正和完善.

编 者

2007年6月

目 录

第1章 极限与连续	(1)
1.1 数列的极限	(1)
1.1.1 极限思想	(1)
1.1.2 数列的极限	(3)
1.1.3 数列极限的性质	(4)
1.1.4 收敛数列的运算法则	(4)
习题1.1	(6)
1.2 函数的极限	(6)
1.2.1 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(6)
1.2.2 单侧极限	(8)
1.2.3 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(9)
习题1.2	(10)
1.3 无穷小与无穷大	(11)
1.3.1 无穷小的定义	(11)
1.3.2 无穷大的定义	(11)
1.3.3 无穷小的比较	(12)
习题1.3	(13)
1.4 函数极限的运算法则和复合函数的极限	(14)
1.4.1 函数极限的运算法则	(14)
1.4.2 复合函数的极限	(15)
习题1.4	(16)
1.5 两个重要极限	(16)
习题1.5	(18)
1.6 函数的连续性	(19)
1.6.1 函数在点 x_0 处连续的定义	(19)
1.6.2 连续函数的性质和运算	(20)
1.6.3 函数的不连续点及分类	(21)
1.6.4 闭区间上连续函数的性质	(22)
习题1.6	(23)
第2章 导数与微分	(25)

2.1 导数的概念	(25)
2.1.1 导数的引入	(25)
2.1.2 导数的定义及几何意义	(26)
2.1.3 可导与连续的关系	(28)
习题 2.1	(29)
2.2 基本初等函数的导数	(29)
2.2.1 常数函数的导数	(29)
2.2.2 幂函数的导数	(29)
2.2.3 三角函数的导数	(30)
2.2.4 指数函数的导数	(30)
习题 2.2	(31)
2.3 求导法则	(31)
2.3.1 导数的四则运算法则	(31)
2.3.2 反函数的求导法则	(33)
2.3.3 导数基本公式表	(34)
习题 2.3	(35)
2.4 复合函数的导数	(35)
习题 2.4	(37)
2.5 高阶导数	(38)
习题 2.5	(40)
2.6 微分	(40)
2.6.1 微分的概念	(40)
2.6.2 微分的运算法则及公式	(43)
2.6.3 一阶微分形式的不变性	(44)
2.6.4 微分在近似计算上的应用	(44)
习题 2.6	(45)
* 2.7 隐函数及参数方程所表示函数的求导法	(46)
2.7.1 隐函数的概念及其求导法	(46)
2.7.2 参数方程所表示函数的求导法	(47)
习题 2.7	(48)
第3章 导数的应用	(49)
3.1 中值定理与洛必达法则	(49)
3.1.1 罗尔中值定理	(49)
3.1.2 拉格朗日中值定理	(49)
3.1.3 柯西中值定理	(50)

3.1.4 洛必达法则	(51)
习题 3.1	(53)
3.2 函数的单调性	(53)
习题 3.2	(55)
3.3 函数的极大值与极小值	(56)
3.3.1 函数的极值	(56)
3.3.2 函数极值的判定和求法	(56)
习题 3.3	(59)
3.4 函数的最大值和最小值及实际应用举例	(59)
习题 3.4	(62)
3.5 曲线的凸凹性与拐点	(62)
3.5.1 曲线的凸凹性及其判别法	(62)
3.5.2 曲线的拐点及其求法	(63)
3.5.3 曲线的渐近线	(64)
习题 3.5	(65)
3.6 函数图形的描绘	(68)
习题 3.6	(69)
第 4 章 不定积分	(69)
4.1 不定积分的概念及性质	(69)
4.1.1 原函数的概念	(70)
4.1.2 不定积分的定义	(70)
4.1.3 不定积分的基本积分公式	(73)
4.1.4 不定积分的性质	(74)
习题 4.1	(76)
4.2 第一类换元积分法	(77)
习题 4.2	(80)
4.3 第二类换元积分法	(81)
习题 4.3	(86)
4.4 分部积分法	(86)
习题 4.4	(90)
第 5 章 定积分及其应用	(92)
5.1 定积分的概念	(92)
5.1.1 定积分概念的产生	(92)
5.1.2 定积分的概念	(94)

5.1.3 定积分的几何意义	(95)
5.1.4 定积分的性质	(96)
习题5.1	(98)
5.2 微分学的基本定理	(99)
5.2.1 变上限函数	(99)
5.2.2 微积分基本公式	(100)
习题5.2	(101)
5.3 定积分的换元法与分部积分法	(102)
5.3.1 定积分的换元法	(102)
5.3.2 定积分的分部积分法	(105)
习题5.3	(106)
* 5.4 广义积分	(106)
5.4.1 积分区间为无穷区间	(107)
5.4.2 无界函数的广义积分	(108)
习题5.4	(110)
5.5 定积分在几何中的应用	(110)
5.5.1 微元法	(110)
5.5.2 平面图形的面积	(111)
5.5.3 体积	(114)
5.5.4 平面曲线的弧长	(116)
习题5.5	(117)
* 5.6 定积分在物理学和经济学中的应用	(119)
5.6.1 变力沿直线所做的功	(119)
5.6.2 液体的压力	(120)
5.6.3 已知边际函数求总量函数	(121)
习题5.6	(121)
 * 第6章 复数	 (123)
6.1 复数及其代数运算	(123)
6.1.1 复数的概念	(123)
6.1.2 复数的代数运算	(123)
习题6.1	(125)
6.2 复数的几何表示	(125)
6.2.1 复数的表示法	(125)
6.2.2 复数的乘幂与方根	(127)
习题6.2	(129)

第7章 行列式	(130)
7.1 n 阶行列式的定义	(130)
7.1.1 二阶行列式	(130)
7.1.2 n 阶行列式按一行(列)展开	(133)
7.1.3 几种特殊的行列式	(135)
习题7.1	(137)
7.2 n 阶行列式的性质与计算	(138)
7.2.1 n 阶行列式的性质	(138)
7.2.2 n 阶行列式的计算	(143)
习题7.2	(148)
7.3 克莱姆(Cramer)法则	(149)
7.3.1 克莱姆法则	(150)
7.3.2 齐次线性方程组	(152)
习题7.3	(153)
第8章 矩阵及其运算	(155)
8.1 矩阵的概念	(155)
习题8.1	(157)
8.2 矩阵的运算及其性质	(158)
8.2.1 矩阵的加法	(158)
8.2.2 矩阵的数量乘积	(159)
8.2.3 矩阵的乘法	(160)
8.2.4 矩阵的转置	(165)
8.2.5 几种特殊的矩阵	(166)
8.2.6 n 阶矩阵的行列式	(169)
习题8.2	(170)
8.3 矩阵的逆	(172)
8.3.1 逆矩阵的概念	(172)
8.3.2 逆矩阵的性质	(172)
8.3.3 判别可逆矩阵和逆矩阵的求法	(173)
习题8.3	(177)
* 8.4 分块矩阵	(178)
8.4.1 分块矩阵的概念	(178)
8.4.2 分块矩阵的运算	(178)
8.4.3 分块对角矩阵的逆矩阵	(182)

习题 8.4	(183)
第 9 章 矩阵的初等变换与线性方程组	(185)
9.1 矩阵的初等变换	(185)
9.1.1 初等行变换	(186)
9.1.2 等价矩阵	(186)
9.1.3 初等矩阵	(187)
9.1.4 运用初等变换求逆矩阵	(190)
习题 9.1	(193)
9.2 矩阵的秩	(194)
9.2.1 矩阵秩的概念	(194)
9.2.2 求矩阵的秩	(195)
9.2.3 矩阵的秩的性质	(197)
习题 9.2	(197)
9.3 线性方程组的解	(198)
9.3.1 消元法	(199)
9.3.2 线性方程组的解的判定定理	(201)
习题 9.3	(208)
第 10 章 向量组的线性相关性	(209)
10.1 n 维向量	(209)
10.2 向量组的线性相关性	(210)
10.2.1 向量组的线性表出	(211)
10.2.2 线性相关性	(214)
习题 10.2	(220)
10.3 向量组的秩	(221)
10.3.1 向量组的极大无关组	(221)
10.3.2 向量组的秩	(222)
习题 10.3	(225)
10.4 线性方程组的解的结构	(226)
10.4.1 齐次线性方程组解的结构	(226)
10.4.2 非齐次线性方程组解的结构	(231)
习题 10.4	(234)
附录 简易积分表	(236)
参考文献	(245)

第1章 极限与连续

极限概念是高等数学中最基本、最重要的概念,它主要研究函数中相互依存的变量之间当某一变量逐渐变化时,另一变量的变化规律.高等数学中,导数、微分、积分等许多重要概念都是用极限来描述和运算的.

1.1 数列的极限

1.1.1 极限思想

极限思想在我国古代就已出现,魏晋时期杰出的数学家刘徽在注解《九章算术》时就订正了“径一周三”(圆的直径与圆周长之比,即 π 为3,世称古率)之误.他创立了“割圆术”,首先在圆内作内接正6边形,此时圆内接正6边形的周长刚好为圆直径的3倍,再作圆内接正12边形、正24边形、正48边形、正96边形等,随着正多边形的边数的增加,则多边形的周长愈来愈逼近圆周长.刘徽论述:“割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”即当圆内接正多边形的边数无限增大时,则多边形的周长的极限位置就是圆周长.刘徽推算到正96边形长,求得 π 为3.14,世称徽率.虽然其结果还不很精确,但他指出求圆周率的正确方向,即现在所说的极限思想.

南北朝时期的著名科学家祖冲之通过“割圆术”的极限思想精确地计算出圆周率在3.141 592 6~3.141 592 7之间,并定 $\frac{22}{7}$ 为约率, $\frac{355}{113}$ 为密率,世称祖率.他成为世界上最早把圆周率数值推算到小数点以后7位数的科学家,早于德国人鄂图(Otto)一千多年,为中国在世界数学界赢得了荣誉.

下面试着用极限思想来计算圆周长及圆周率,设半径为 R 的圆内接正6边形的周长为 $L_6=L_2 \times 6$,则 $L_6=2R \times 3$,内接正12边形的周长为

$$L_{12} = L_{2^1 \times 6} = \sqrt{(L_6)^2 + [2 \times 6R - \sqrt{(2 \times 6R)^2 - (L_6)^2}]^2}$$

$$= 2R \times 3.105\ 828\ 541\ 230\ 250,$$

$$\begin{aligned} L_{24} = L_{2^2 \times 6} &= \sqrt{(L_{12})^2 + [2^2 \times 6R - \sqrt{(2^2 \times 6R)^2 - (L_{12})^2}]^2} \\ &= 2R \times 3.132\ 628\ 613\ 281\ 240, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{48} = L_{2^3 \times 6} &= \sqrt{(L_{24})^2 + [2^3 \times 6R - \sqrt{(2^3 \times 6R)^2 - (L_{24})^2}]^2} \\ &= 2R \times 3.139\ 350\ 203\ 046\ 870, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{96} = L_{2^4 \times 6} &= \sqrt{(L_{48})^2 + [2^4 \times 6R - \sqrt{(2^4 \times 6R)^2 - (L_{48})^2}]^2} \\ &= 2R \times 3.141\ 031\ 950\ 890\ 510, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{192} = L_{2^5 \times 6} &= \sqrt{(L_{96})^2 + [2^5 \times 6R - \sqrt{(2^5 \times 6R)^2 - (L_{96})^2}]^2} \\ &= 2R \times 3.141\ 452\ 472\ 285\ 460, \end{aligned}$$

...

所以

$$L_{2^n \times 6} = \sqrt{(L_{2^{n-1} \times 6})^2 + [2^n \times 6R - \sqrt{(2^n \times 6R)^2 - (L_{2^{n-1} \times 6})^2}]^2},$$

得到数列 $\{L_{2^n \times 6}\}$ (n 为自然数):

$$2R \times 3$$

$$2R \times 3.105\ 828\ 541\ 230\ 250$$

$$2R \times 3.132\ 628\ 613\ 281\ 240$$

$$2R \times 3.139\ 350\ 203\ 046\ 870$$

$$2R \times 3.141\ 031\ 950\ 890\ 510$$

$$2R \times 3.141\ 452\ 472\ 285\ 460$$

$$2R \times 3.141\ 557\ 607\ 911\ 860$$

$$2R \times 3.141\ 583\ 892\ 148\ 320$$

$$2R \times 3.141\ 590\ 463\ 228\ 050$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 105\ 999\ 270$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 516\ 692\ 160$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 542\ 360\ 460$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 548\ 777\ 540$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 381\ 810$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 782\ 870$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 883\ 140$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 908\ 210$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 914\ 470$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 040$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 430$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 530$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 550$$

$$2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 560$$

...

即当 $n=4$, 圆内接正 96 边形时, 圆周率就精确到 3.141; 当 $n=22$, 圆内接正 25 165 824 边形时, 多边形的周长就开始稳定在 $2R \times 3.141\ 592\ 550\ 916\ 560$ 附近. 也就是说, 随着 n 的无限增加, 正多边形周长的极限就是圆周长, 从而 3.141 592 6 就是圆周率的较精确数值. 这是借助于计算机计算出的一组数值, 而 1500 年前的祖冲之用最原始的手工计算就推导出精确的圆周率, 令人叹服!

1.1.2 数列的极限

数列就是将一列无穷多个数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 按某些规律一个一个地进行排列, 记为 $\{x_n\}$. 第一个数 x_1 称为数列的第一项, 第二个数 x_2 称为数列的第二项, ..., 第 n 个数 x_n 称为数列的第 n 项 (又称为一般项或通项).

观察下面简单的数列:

$$(1) \left\{ \frac{1}{n} \right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(2) \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}: 2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(3) \{2n\}: 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots;$$

$$(4) \{1 + (-1)^{n-1}\}: 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, \dots;$$

$$(5) \{C\}: C, C, C, C, \dots, C, \dots (C \text{ 是常数}).$$

我们发现, 有的数列随着项数 n 的不断增大, 一般项 x_n 将不断趋近于一个确定的数, 但有的数列并不具有这一特性. 例如, 数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 趋近于 0, 数列 $\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}$ 趋近于 1, 数列 $\{C\}$ 就是 C , 而数列 $\{2n\}$, $\{1 + (-1)^{n-1}\}$ 都不具有这种特性.

1. 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$, A 是一常数, 当项数 n 无限增大时, 一般项 x_n 无限趋近于 A , 则称数列 $\{x_n\}$ 存在极限或收敛, 极限是 A 或 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A,$$

或

$$x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

由数列极限的定义有:

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限是 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 的极限是 1, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$;

数列 $\{2n\}$ 无极限, 即数列 $\{2n\}$ 发散;

数列 $\{1 + (-1)^{n-1}\}$ 无极限, 即数列 $\{1 + (-1)^{n-1}\}$ 发散;

数列 $\{C\}$ (C 为常数) 的极限是 C , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$.

2. 数列极限的几何解释

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于常数 A , 即将 A 及数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 在数轴上用对应点一一表示出来, 当 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 所对应的点 x_n 都聚集在 A 点附近, 且无限趋近于 A 点, 如图 1-1 所示.

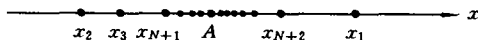


图 1-1

1.1.3 数列极限的性质

定理 1.1 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的极限唯一.

定理 1.2 若数列 $\{x_n\}$ 存在极限, 则数列 $\{x_n\}$ 有界, 即存在正数 M , 对任意正整数 n , 都有 $|x_n| \leq M$.

注意 该定理的逆命题不成立, 即有界数列不一定有极限. 例如, 数列 $\{1 + (-1)^{n-1}\}: 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, \dots$, 是有界的 (因为 $|x_n| \leq 2$), 但它的极限并不存在.

单调数列 数列 $\{x_n\}$ 若满足 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的; 若满足 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 若上述中的等号不成立, 就称数列 $\{x_n\}$ 是严格单调增加或严格单调减少的. 例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, 就是严格单调减少的.

定理 1.3 单调有界数列必存在极限.

1.1.4 收敛数列的运算法则

定理 1.4 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛, 则数列 $\{x_n + y_n\}$ 也收敛, 并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

例 1.1 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

定理 1.5 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛, 则数列 $\{x_n y_n\}$ 也收敛, 并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

例 1.2 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}$.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

所以
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 3 \times 0 = 0.$$

进而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n^k} = C \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = C \times 0 = 0$ (C 为常数, k 是正整数).

定理 1.6 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, 则数列 $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ 也收敛, 并且有
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

例 1.3 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1}$.

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 + 0} = 2.$$

例 1.4 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \cdots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \cdots + b_m}$, 其中 k, m 都是正整数, 并且 $k \leq m, a_i, b_j (i=0, 1, 2, \cdots, k, j=0, 1, 2, \cdots, m)$ 都是与 n 无关的常数, 并设 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

解 由数列的极限知, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-m} = \begin{cases} 0, & k < m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$

于是, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \cdots + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + b_2 n^{m-2} + \cdots + b_m}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_m}{n^m}} = \begin{cases} 0, & k < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & k = m. \end{cases}$$

例如, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n^2 - 7}{4n^3 - 6n + 8} = \frac{3}{4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n^2 - 3n + 1}{2n^4 - 5n^3 + 8n - 7} = 0$.

习 题 1.1

1. 写出下列数列的前四项, 并求出极限.

$$(1) x_n = \frac{n+1}{n^2+1};$$

$$(2) x_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$(3) x_n = \frac{1}{2^n};$$

$$(4) x_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

2. 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 1}{4n^3 - 2n^2 + 2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

1.2 函数的极限

高等数学课程里基本上研究两类极限, 1.1 节中讲述了当 $n \rightarrow \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限, 即当 n 取正整数并不断增大时, 函数 $x_n = f(n)$ 的极限. 本节研究函数 $y = f(x)$ 在某一极限的极限及函数在无穷远处的极限.

1.2.1 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

先来讨论抛物线 $y = x^2$ 上一点 $P(2, 4)$ 的切线斜率. 由解析几何的定义可知, 曲线在点 P 的切线是过点 P 的任意割线 PQ 当点 Q 沿曲线无限趋近于点 P (点 Q 与点 P 不重合) 的极限位置, 如图 1-2 所示.

设 $Q(x, x^2) (x \neq 2)$, 已知割线 PQ 的斜率为

$$k_1 = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2,$$

当 x 无限趋近于 2 时, 就有过点 P 的切线斜率 $k = 4$, 4 就是函数 $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 当 x 无限